

# Neparametarski testovi za testiranje dva ili više nezavisnih uzoraka



**PREDAVANJE BR.8**

# Parametarska statistika



- Najveći dio testova koje smo do sada koristili zahtijevao je ispunjenost određenih pretpostavki (Pretpostavka o obliku distribucije mjera u populaciji: normalnost raspodjele)
- Bar intervalni podaci;
- Nulta hipoteza sadrži precizno formulisane vrijednosti parametara (npr.  $\mu_1 = \mu_2$  ;  $\rho = 0$ );
- Testovi visoke statističke snage!
- Primeri: t-test, F-test, ANOVA, koeficijent linearne korelacije, linearna jednostruka i višestruka regresija...

# Greške u statističkom zaključivanju



	$H_0$ tačna	$H_0$ nije tačna
$H_0$ se odbacuje	Pogrešna odluka Greška tipa I Vjerovatnoća ovog tipa greške = $\alpha$	Tačna odluka Snaga statističkog testa = $1 - \beta$
$H_0$ se ne odbacuje	Tačna odluka	Pogrešna odluka Greška tipa II Vjerovatnoća ovog tipa greške = $\beta$

# Neparametarska statistika



- BEZ strogih pretpostavki o distribuciji mjera u populaciji;
- Nominalni i ordinalni podaci;
- “neparametrijski” često nije najprikladniji naziv (kao da ne podrazumijevaju ocjenjivanje parametara);
- Nulta hipoteza često uopšteno definisana, npr. *Uzorci pripadaju istoj populaciji u pogledu ispitivane osobine*;
- Ako su zadovoljeni uslovi za parametrijske postupke onda ovi testovi uglavnom imaju manju statističku snagu od “parametrijskih”!
- Neparametarska statistika – “slobodna” od pretpostavke o distribuciji populacije, ali ne od pretpostavke o obliku očekivane varijanse i distribucije uzorka

# Testiranje razlika dva nezavisna uzorka



1. Test medijane
2. Test zbira rangova (Man-Whitneyev U-test)

# Testiranje razlika dva nezavisna uzorka



## 1. Test medijane

- Jednostavan test koji se svodi na hi-kvadrat test
- Sličan t-testu kojim se ispituje značajnost razlika između 2 arit.sredine – kod parametarskih testova
- $H_0$ : *Uzorci pripadaju istoj populaciji u pogledu ispitivanog obilježja*
- Princip: naći medijanu iz svih rezultata zajedno (za oba niza)
- Formiramo tabelu kontingencije 2x2 – *grupa/niz* (prvi ili drugi) i *položaj* (ispod ili iznad medijane)
- Značajnost –  $\chi^2$  test

# Test medijane – primjer 1



- Uzmimo rezultate iz dva uzorka koje smo dobili u nekom mjerenju:

<b>Uzorak 1</b>	8	9	9	10	10	10	12	13	15	17	17	18	19	19	21	23	24	25	26	28	28	29	31	31
<b>Uzorak 2</b>	3	6	7	7	8	8	8	10	12	16	19	22	24	27	30	32								

<b>Oba uzorka</b>	8	9	9	10	10	10	12	13	15	17	17	18	19	19	21	23	24	25	26	28	28	29	31	31	3	6	7	7	8	8	8	10	12	16	19	22	24	27	30	32
<b>Rangirani</b>	3	6	7	7	8	8	8	8	9	9	10	10	10	10	12	12	13	15	16	17	17	18	19	19	19	21	22	23	24	24	25	26	27	28	28	29	30	31	31	32
<b>R.br.</b>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

	Medijana		
	Ispod	Iznad	
Uzorak 1	11	13	24
Uzorak 2	10	6	16
	21	19	40

$f_o$	$f_t$	$f_o - f_t$	$(f_o - f_t)^2$	$(f_o - f_t)^2 / f_t$
11	12.6	-1.6	2.6	0.203
13	11.4	1.6	2.6	0.225
10	8.4	1.6	2.6	0.305
6	7.6	-1.6	2.6	0.337
				1.069

- Iz tablica vrijednost je 3,84. Ne možemo odbaciti nultu hipotetu da se medijane oba uzorka statistički značajno ne razlikuju.

# Test medijane – primjer 1



## Independent-Samples Median Test Summary

Total N		40
Median		17.000
Test Statistic		1.069 <sup>a</sup>
Degree Of Freedom		1
Asymptotic Sig.(2-sided test)		.301
Yates's Continuity Correction	Chi-Square	.505
	Degree Of Freedom	1
	Asymptotic Sig.(2-sided test)	.477

a. Multiple comparisons are not performed because the overall test does not show significant differences across samples.

SPSS: Analyse/Nonparametric tests/Independent samples/Median test (podesiti Customize analysis i u rubrici Settings odabrati Median test)

# Testiranje razlika dva nezavisna uzorka



## 2. Test zbira rangova (Mann-Whitneyev U test)

- $H_0$ : *Uzorci pripadaju istoj populaciji u pogledu ispitivanog obeležja*
- Rangiraju se oba niza zajedno
- Sume rangova svake grupe posebno:  $T_1$  i  $T_2$
- $N$  – ukupan broj ispitanika
- Očekivana vrijednost zbira rangova za eksperimentalnu/kontrolnu grupu
- Veličina standardne greške zbira rangova
- Z statistika (odnos razlike opaženog i teorijskog zbira rangova i standardne greške razlike zbira rangova)

$$T_{tE} = \frac{n_E(N+1)}{2}$$

$$T_{tK} = \frac{n_K(N+1)}{2}$$

$$SD_T = \sqrt{n_E n_K \frac{N+1}{12}}$$

# Test zbira rangova (Mann-Whitneyev U) - primjer 2



Analizirane su dvije grupe ispitanika od kojih je prvoj dat neki vitaminski preparat, a drugoj nije. Pokazuje li prva grupa bolje opšte zdravlje? Ispitanici su rangirani prema opštem zdravlju od najboljeg do najlošijeg. Najveći broj znači da je ispitanik najzdraviji.

Ispitanici	Uzorak	Grupe	Rezultat	Rang	Rangovi E	Rangovi K
B	E	1	45	1	1	
H	E	1	43	2	2	
P	K	2	40	3		3
C	E	1	38	4	4	
M	K	2	37	5.5		5.5
F	E	1	37	5.5	5.5	
R	K	2	34	7		7
K	K	2	32	8		8
G	E	1	31	9	9	
D	E	1	30	10.5	10.5	
A	E	1	30	10.5	10.5	
J	K	2	29	12		12
O	K	2	24	13.5		13.5
N	K	2	24	13.5		13.5
D	E	1	22	15	15	
L	K	2	20	16		16
I	E	1	18	17	17	
					<b>74.5</b>	<b>78.5</b>
					<b>T1</b>	<b>T2</b>

$$T_{iE} = \frac{n_E(N+1)}{2} = \frac{9(17+1)}{2} = 81$$

$$T_{iK} = \frac{n_K(N+1)}{2} = \frac{8(17+1)}{2} = 72$$

$$SD_T = \sqrt{n_E n_K \frac{N+1}{12}} = 10,39$$

$$z = \frac{74,5 - 81}{10,39} = -0,63 \quad \text{ili}$$

$$z = \frac{78,5 - 72}{10,39} = 0,63$$

- Z je manje od 1,96, pa zaključujemo da ne postoji statistički značajna razlika između 2 grupe u zdravstvenom stanju.

# Testiranje razlika više od 2 nezavisna uzorka



## Kruskal-Wallisov test (snažniji od proširenog testa medijane)

- Zapravo test analize varijanse, samo što se umjesto brojčanih mjernih podataka služi rangovima
- $H_0$ : *Uzorci pripadaju istoj populaciji u pogledu ispitivanog obeležja*
- Rangiranje svih nizova zajedno da najniži rezultat dobije rang 1
- Sume rangova svakog niza posebno  $T_1, T_2 \dots T_k$

# Testiranje razlika više od 2 nezavisna uzorka



## Kruskal-Wallisov test

Statistik za testiranje nulte hipoteze –  $H_{KW}$ :

$$H_{KW} = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^k \left( \frac{T_i^2}{N_i} \right) - 3(N+1)$$

pri čemu je  $N$  – ukupan broj ispitanika

- Nulta distribucija uzorkovanja  $H_{KW}$  statistika: Hi-kvadrat raspodela sa  $k-1$  stepeni slobode ( $k$  je broj nezavisnih uzoraka).

# Kruskal-Wallisov test – primjer 3



- Iz 4 nezavisna uzorka dobili smo sljedeće rezultate

U	Rez	Rang	U	Rez	Rang	U	Rez	Rang	U	Rez	Rang
1	8	1	2	10	2	3	16	7.5	4	22	14
1	12	3	2	15	6	3	16	7.5	4	41	23
1	13	4	2	19	10	3	17	9	4	49	33
1	14	5	2	25	15.5	3	21	12.5	4	54	36.5
1	20	11	2	30	18	3	29	17	4	59	39
1	21	12.5	2	38	21	3	33	19.5	4	60	40
1	25	15.5	2	40	22	3	44	25	4	65	42
1	33	19.5	2	45	27	3	45	27	4	69	44
1	43	24	2	47	30.5	3	46	29	4	71	45
1	45	27	2	48	32	3	53	35	4	75	46
1	47	30.5	2	51	34	3	62	41			
			2	54	36.5	3	67	43			
			2	55	38						
<b>Ti</b>	<b>153</b>		<b>292.5</b>			<b>273</b>			<b>362.5</b>	<b>1081</b>	
<b>Ni</b>	<b>11</b>		<b>13</b>			<b>12</b>			<b>10</b>	<b>46</b>	
<b>Ti<sup>2</sup></b>	<b>23409</b>		<b>85556</b>			<b>74529</b>			<b>131406</b>		
<b>Ti<sup>2</sup>/Ni</b>	<b>2128</b>		<b>6581</b>			<b>6211</b>			<b>13141</b>	<b>28060.72</b>	

$$H_{KW} = \frac{12}{46(46+1)} 28060.7 - 3 * 47 = 14.75$$

# Nastavak primjera 3



	grupa	N	Mean Rank
rezultat	1	11	13.91
	2	13	22.50
	3	12	22.75
	4	10	36.25
	Total	46	

	rezultat
Kruskal-Wallis H	14.758
df	3
Asymp. Sig.	.002

a. Kruskal Wallis Test  
b. Grouping Variable:  
grupa

- SPSS: Analyse/Nonparametric tests/Legacy Dialogs/K independent samples...

# Primjer 4



- 40 radnika iz jedne firme je nasumice podijeljeno u 2 grupe. Jedna grupa je učena poslu jednom metodom, a druga drugom metodom. Svi radnicu su rangirani prema uspješnosti u poslu. Da li metode imaju isti efekat na uspješnost obavljanja posla?

Hypothesis Test Summary				
	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The medians of RANG USPEŠNOSTI U OBAVLJANJU POSLA are the same across categories of grupa.	Independent-Samples Median Test	.477 <sup>a</sup>	Retain the null hypothesis.
2	The distribution of RANG USPEŠNOSTI U OBAVLJANJU POSLA is the same across categories of grupa.	Independent-Samples Mann-Whitney U Test	.095 <sup>b</sup>	Retain the null hypothesis.

Asymptotic significances are displayed. The significance level is .050.

a. Yates's Continuity Corrected Asymptotic Sig.

b. Exact significance is displayed for this test.

Independent-Samples Median Test Summary		
Total N	40	
Median	20.500	
Test Statistic	1.069 <sup>a</sup>	
Degree Of Freedom	1	
Asymptotic Sig.(2-sided test)	.301	
Yates's Continuity Correction	Chi-Square	.505
	Degree Of Freedom	1
	Asymptotic Sig.(2-sided test)	.477

a. Multiple comparisons are not performed because the overall test does not show significant differences across samples.

Independent-Samples Mann-Whitney U Test Summary	
Total N	40
Mann-Whitney U	131.000
Wilcoxon W	267.000
Test Statistic	131.000
Standard Error	36.169
Standardized Test Statistic	-1.687
Asymptotic Sig.(2-sided test)	.092
Exact Sig.(2-sided test)	.095

# Primjer 5



- Ispitano je 14 osoba kod kojih je identifikovan jedan od tri stečana tipa disleksije (dubinska, fonološka ili površinska). Bilježen je broj grešaka koje prave čitanjem i napravljeno je njihovo rangiranje prema broju grešaka. Da li postoje statistički značajne razlike između različitih tipova disleksije?

**Hypothesis Test Summary**

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The distribution of rang is the same across categories of vrsta disleksije.	Independent-Samples Kruskal-Wallis Test	.041	Reject the null hypothesis.

Asymptotic significances are displayed. The significance level is .050.

**Independent-Samples Kruskal-Wallis Test Summary**

Total N	14
Test Statistic	6.406 <sup>a</sup>
Degree Of Freedom	2
Asymptotic Sig.(2-sided test)	.041

a. The test statistic is adjusted for ties.

**Pairwise Comparisons of vrsta disleksije**

Sample 1-Sample 2	Test Statistic	Std. Error	Std. Test Statistic	Sig.	Adj. Sig. <sup>a</sup>
DUBINSKA-FONOLOŠKA	-3.000	2.646	-1.134	.257	.771
DUBINSKA-POVRŠINSKA	-7.100	2.806	-2.530	.011	.034
FONOLOŠKA-POVRŠINSKA	-4.100	2.806	-1.461	.144	.432

Each row tests the null hypothesis that the Sample 1 and Sample 2 distributions are the same. Asymptotic significances (2-sided tests) are displayed. The significance level is .05.

a. Significance values have been adjusted by the Bonferroni correction for multiple tests.

- Napomena: Greška u SPSSu (scale variable umjesto ordinal)!

# Za vježbu – uraditi postupno



## Primjer 4

Grupa	Rang	Grupa	Rang
1	6.5	2	1
1	9.5	2	2
1	9.5	2	3.5
1	12.5	2	3.5
1	12.5	2	6.5
1	12.5	2	6.5
1	15.5	2	6.5
1	17	2	12.5
1	18	2	15.5
1	20.5	2	19
1	20.5	2	24
1	22	2	27
1	24	2	29.5
1	24	2	33
1	26	2	37
1	28	2	40
1	29.5		
1	31		
1	32		
1	34.5		
1	34.5		
1	36		
1	38.5		
1	38.5		

## Primjer 5

Grupa	Broj grešaka
1	46
1	78
1	33
1	11
1	51
2	32
2	74
2	82
2	85
2	59
3	65
3	99
3	116
3	97