Linearna algebra: udžbenik za studente prve godine

Vladimir Jaćimović i Marijan Marković

October 3, 2022

Sadržaj

Predgovor

Ova knjiga predstavlja udžbenik iz Linearne algebre za studente prve godine matematičkih fakulteta. Udžbenik je napisan na osnovu kursa lekcija iz predmeta "Linearna algebra 1" i "Linearna algebra 2" koji su tokom nekoliko godina držani studentima prve godine Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore. Materijal koji je izložen u udžbeniku je, po našem mišljenju, dovoljna osnova iz Linearne algebre za studente matematičkih fakulteta.

Izražavam zahvalnost za pomoć u pisanju udžbenika i dragocjene savjete svom kolegi prof. dr Izedinu Krniću. Takodje, veliku pomoć u pisanju udžbenika i tehničkoj pripremi su pružili studenti Milica Kankaraš, Jelena Dakić, Nikola Konatar, Andrea Vujisić, Milena Božović, Velibor Došljak i Velimir Ćorović.

Konačno, veliku zahvalnost dugujemo anonimnim recenzentima, čiji su brojni komentari, sugestije i korekcije doprinijeli da se ovaj udžbenik značajno poboljša.

Uvod: pojmovi grupe i polja

Ovo je uvodno poglavlje. U njemu ćemo uvesti neke matematičke pojmove koji će nam biti potrebni tokom kursa *Linearne algebre*.

Skup je jedan od svega nekoliko pojmova u matematici koji se ne definiše. Smatramo da svi podrazumijevamo isto kada koristimo riječ "skup". Skup koji sadrži konačan broj elemenata nazivamo konačnim. Kako bismo stvorili sadržajne matematičke teorije, na skupovima uvodimo različite operacije i strukture.

Algebra je široka oblast matematike koja se bavi skupovima i strukturama na skupovima. Slijede dva primjera algebarskih struktura.

Definicija 0.0.1. Reći ćemo da je na skupu G uvedena struktura grupe, ako je na G zadata binarna operacija "+", tako da su zadovoljeni sljedeći uslovi:

1) $\forall a, b \in G$ važi $a + b \in G$;
2) $\forall a, b, c \in G$ važi $a + (b + c) = (a + b) + c$;
3) $\exists 0 \in G$ tako da za $\forall a \in G$ važi $a + 0 = 0 + a = a$;
4) $\forall a \in G$ $\exists (-a) \in G$ tako da $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Takođe ćemo govoriti da skup G sa operacijom "+" čini grupu (ili da je grupa).

Svojstvo 1) naziva se zatvorenost skupa G u odnosu na definisanu operaciju "+", svojstvo 2) se naziva asocijativnost, element 0 iz svojstva 3) naziva se neutralnim elementom grupe, a element $(-a)$ iz svojstva 4) inverznim (obratnim) elementom k elementu a.

Definicija 0.0.2. Neka je $(G, +)$ grupa. Ako $\forall a, b \in G$ važi $a + b = b + a$ tada se grupa $(G, +)$ naziva komutativnom (ili Abelovom) grupom.

Primjer 0.0.3. (i) Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ sa standardnom operacijom sabiranja "+" je grupa, $(\mathbb{R}, +)$.

(ii) Skup cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ sa standardnom operacijom sabiranja "+" je grupa, $(\mathbb{Z}, +)$.

(iii) Skup prirodnih brojeva sa operacijom sabiranja, $(\mathbb{N}, +)$ nije grupa (npr. neutralni element za sabiranje, 0, nije iz skupa prirodnih brojeva, takođe elementi $\mathbb{N}$ nemaju inverzne elemente).

(iv) Skup cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ sa standardnom operacijom množenja "$\cdot$" nije grupa (zadovoljene su sve aksiome, osim četvrte).

Primjer 0.0.4. Označimo sa H skup svih rotacija geometrijske ravni za uglove $\phi \in [0, 2\pi)$. Na skupu H uvedimo operaciju "$\cdot$" superpozicije (kompozicije) dvije rotacije. Neka su $r_{\phi_1}, r_{\phi_2} \in H$, tada $r_{\phi_1} \cdot r_{\phi_2} = r_{\phi_1 + \phi_2} \in H$. Na ovaj način, superpozicija dvije rotacije je takođe rotacija. Primijetimo da bi u prethodnoj relaciji bilo pravilnije uzimati sumu uglova po modulu 2π, tj.

razmatrati $\phi_1 + \phi_2$ po modulu 2π. Na ovaj način identifikujemo rotacije za uglove ϕ i $\phi + 2k\pi$, gdje je k cijeli broj.

Potrebno je provjeriti sve četiri aksiome kako bismo se ubijedili da je $(H, \cdot)$ grupa. Na primjer, neutralni element ove grupe je rotacija za ugao nula, tj. preslikavanje geometrijske ravni koje svaki vektor ostavlja na istom mjestu.

Da li je ovo Abelova grupa?

Primjer 0.0.5. Neka je $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, tj. neka skup K sadrži kompleksne brojeve čija je apsolutna vrijednost jednaka 1. Ako se u ovom skupu ima u vidu standardna operacija množena "$\cdot$" kompleksnih brojeva, tada $(K, \cdot)$ jeste Abelova grupa.

Šta je neutralni element u ovoj grupi?

Da li možemo reći da je ovaj primjer u određenom smislu isti kao prethodni?

Zadatak 0.0.6. Razmotrimo neki konačan skup M sa n elemenata. Označimo sa P skup svih bijektivnih preslikavanja skupa M u samog sebe. Skup P se naziva skupom permutacija skupa M. Primjetimo da je P konačan skup, koji sadrži $n!$ elemenata.

Kako bismo bili konkretniji, razmotrimo skup $M = \{L, I, S, T\}$ koji sadrži 4 elementa. Na skupu P uvedimo operaciju "$\cdot$" superpozicije dvije permutacije, tj. ako su $p_1, p_2 \in P$, to je $p_1 \cdot p_2$ takođe bijektivno preslikavanje skupa M u samog sebe. Drugim riječima, $p_1 \cdot p_2$ je permutacija koja se dobija tako što se na skupu najprije izvede permutacija p_2, a zatim p_1.

Svaku permutaciju možemo predstaviti uređenim nizom elemenata skupa M. Recimo, ako je p_1 takva permutacija da

$$p_1 : L \to I, \quad p_1 : I \to T, \quad p_1 : S \to S, \quad p_1 : T \to L,$$

tada ćemo permutaciju p_1 predstavljati nizom $\{I, T, S, L\}$.

Sada pretpostavimo da je permutacija p_2 zadata nizom $\{S, T, I, L\}$. Tada će $p_1 \cdot p_2$ biti zadata nizom $\{T, L, I, S\}$.

Kada provjerimo sve aksiome zaključujemo da skup P sa operacijom "$\cdot$" čini grupu. Provjeriti da li je ovo Abelova grupa.

Primjer 0.0.7. Neka je $A = \{a, b, c, d\}$ i neka su f_1, f_2, f_3, f_4 preslikavanja skupa A u sebe zadata na sljedeći način:

$$f_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix},$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix}, \quad f_4 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \end{pmatrix}.$$

Ako se na skupu $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ ima u vidu kompozicija preslikavanja, tada $(G, \circ)$ jeste grupa. Ova operacija se može predstaviti sljedećom tablicom:

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_2	f_1
f_4	f_4	f_3	f_1	f_2

Recimo,

$$f_4 \circ f_2 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ c & d & a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \end{pmatrix} = f_3.$$

Neutralni element je f_1. Budući da svaka vrsta i svaka kolona sadrži f_1 i budući da su raspoređeni simetrično, možemo zaključiti da svaki element u G ima inverzni. Recimo, $f_4^{-1} = f_3$. Grupa $(G, \circ)$ nije komutativna.

Primjer 0.0.8. Neka je $T = \{A, B, C\}$. Naredna preslikavanja preslikavaju skup T u sebe:

$$r_0 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix}, \quad r_1 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix},$$

$$s_A = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix}, \quad s_B = \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix}, \quad s_C = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}.$$

Ovih šest funkcija formiraju grupu u odnosu na kompoziju $\circ$. Tablica za navedenu operaciju je:

$\circ$	r_0	r_1	r_2	s_A	s_B	s_C
r_0	r_0	r_1	r_2	s_A	s_B	s_C
r_1	r_1	r_2	r_0	s_C	s_A	s_B
r_2	r_2	r_0	r_1	s_B	s_C	s_A
s_A	s_A	s_B	s_C	r_0	r_1	r_2
s_B	s_B	s_C	s_A	r_2	r_0	r_1
s_C	s_C	s_A	s_B	r_1	r_2	r_0

Recimo, imamo

$$s_A \circ r_2 = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix} = s_C.$$

Neutralni element je r_0. Kako je, recimo, $r_2 \circ r_1 = r_0$ i $r_1 \circ r_2 = r_0$, važi $r_2^{-1} = r_1$.

Navedena grupa se naziva grupa simetrija jednakostraničnog trougla ABC, jer se njeni elementi mogu interpretirati na sljedeći način: r_0, r_1 i r_2 su rotacije trougla oko njegovog centra za 0, 60 i 120 stepeni (u smjeru obrnutom od kretanja kazaljke na satu), dok su s_A, s_B i s_C simetrije u odnosu na visine trougla povučene iz tjemena A, B i C, redom.

Zadatak 0.0.9. Sastaviti tablicu svih simetrija kvadrata $ABCD$.

Primjer 0.0.10. Na skupu $G = \{1, 3, 5, 7\}$ ima se u vidu operacija $*$ koja je operacija množenje po modulu 8 (brojevi se pomnože, a zatim se uzima ostatka pri djeljenju sa 8). Algebarska struktura $(G, *)$ je grupa. Ovo se može ustanoviti formiranjem tabilce za $(G, *)$:

$*$	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

Primjetimo da je operacija komutativna (zbog simetričnosti tablice u odnosu na dijagonalu) i da je svaki element inverzan sam sebi.

Definicija 0.0.11. Govorimo da je na skupu $\mathbb{P}$ uvedena struktura polja, ako su na $\mathbb{P}$ zadate dvije operacije "+" i "$\cdot$" tako da su zadovoljeni sljedeći uslovi:

1. $\forall a, b \in \mathbb{P}$ važi $a + b \in \mathbb{P}$ i $a \cdot b \in \mathbb{P}$;
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{P}$ važi $(a + b) + c = a + (b + c)$ i $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
3. $\exists 0 \in \mathbb{P}$ tako da $\forall a \in \mathbb{P}$ važi $a + 0 = a$;
4. $\forall a \in \mathbb{P} \quad \exists (-a) \in \mathbb{P}$ tako da $a + (-a) = 0$;
5. $\forall a, b \in \mathbb{P}$ važi $a + b = b + a$ i $a \cdot b = b \cdot a$;
6. $\exists 1 \in \mathbb{P}$ tako da $\forall a \in \mathbb{P}\backslash\{0\} \quad a \cdot 1 = a$;
7. $\forall a \in \mathbb{P}\backslash\{0\} \quad \exists a^{-1} \in \mathbb{P}\backslash\{0\}$ tako da važi $a \cdot a^{-1} = 1$;
8. $\forall a, b, c \in \mathbb{P}$ važi $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ i $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Operacije "+" i "$\cdot$" u polju se nazivaju "sabiranjem" i "množenjem". Neutralni element sabiranja, koji smo označili znakom 0, naziva se "nulom". Neutralni element množenja 1 se naziva "jedinicom".

Svojstvo 2.) se naziva asocijativnošću sabiranja i množenja, svojstvo 5.) komutativnošću, a svojstvo 8.) distributivnošću.

Primjer 0.0.12. (i) Skup realnih brojeva, $\mathbb{R}$ sa standardnim operacijama sabiranja i množenja, tj. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ čini polje.

(ii) Skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ sa standardnim operacijama sabiranja i množenja čini polje.

(iii) Skup kompleksnih brojeva, $\mathbb{C}$ sa standardnim operacijama sabiranja i množenja, tj. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ jeste polje.

Dio algebre, koji nam je dobro poznat iz škole, koji se bavi konkretnim skupom racionalnih brojeva sa operacijama sabiranja i množenja (a, dakle, i oduzimanja i dijeljenja), naziva se *Aritmetika*.

Zadatak 0.0.13. Razmotrimo skup S koji sadrži četiri elementa, označićemo ih simbolima O, I, A i B. Na skupu S uvedimo operacije + i $\cdot$ uz pomoć sljedećih tabela:

+	O	I	A	B	$\cdot$	O	I	A	B
O	O	I	A	B	O	O	O	O	O
I	I	O	B	A	I	O	I	A	B
A	A	B	O	I	A	O	A	B	I
B	B	A	I	O	B	O	B	I	A

Provjerite da skup S sa ovim operacijama zaista čini polje.

Ovim završavamo uvodno poglavlje u kojem smo uveli neke osnovne pojmove iz *Opšte algebre* koje ćemo dalje koristiti. Naglasimo da ćemo u svim daljim izlaganjima koristiti samo dva polja: polje realnih brojeva $\mathbb{R}$ i polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. Pri tome pretpostavljamo da su studenti upoznati sa standardnim operacijama sabiranja i množenja (a znači i oduzimanja i dijeljenja) kako realnih, tako i kompleksnih brojeva.

Glava 1

Vektorski prostori

1.1 Definicija vektorskog prostora

U ovoj sekciji ćemo uvesti osnovni pojam Linearne algebre - vektorski prostor, navesti osnovne primjere i pokazati nekoliko jednostavnih osobina vektorskih prostora.

Definicija 1.1.1. Neprazan skup V naziva se vektorskim prostorom nad poljem $\mathbb{P}$ ako su definisane operacije:
(i) $+ : V \times V \to V$ i
(ii) $\cdot : \mathbb{P} \times V \to V$, tako da su ispunjene sljedeće aksiome:

1. $\forall x, y, z \in V$ važi $x + (y + z) = (x + y) + z$;
2. $\exists \theta \in V$ tako da $\forall x \in V$ važi $x + \theta = \theta + x = x$;
3. $\forall x \in V$ $\exists (-x) \in V$ tako da je $x + (-x) = (-x) + x = \theta$;
4. $\forall x, y \in V$ važi $x + y = y + x$;
5. $\forall x, y \in V$ i $\forall \alpha \in \mathbb{P}$ važi $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$;
6. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{P}$ i $\forall x \in V$ važi $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$;
7. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{P}$ i $\forall x \in V$ važi $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$;
8. $\forall x \in V$ važi $1 \cdot x = x$, gdje je 1 neutralni element za množenje u polju $\mathbb{P}$.

Elemente skupa V nazivamo vektorima, a elemente polja $\mathbb{P}$ nazivamo skalarima.

Operacija "+" se naziva sabiranjem vektora, a "$\cdot$" se naziva množenjem vektora skalarom.

Vektor θ čije se postojanje zahtijeva drugom aksiomom nazivamo nula-vektorom. Za njega koristimo drugačiju oznaku od skalara $0 \in \mathbb{P}$ kako bismo bili precizniji, a formule jasnije. Vektor $-x$ se naziva obratnim vektoru x. Umjesto $\alpha \cdot x$ često ćemo pisati αx.

Nula-vektor je jedinstven (drugim riječima, ne postoje dva različita nula-vektora u istom vektorskom prostoru). Naime, pretpostavimo da je i θ' nula-vektor, tj. da i on ispunjava drugu aksiomu. Tada je $\theta' = \theta + \theta' = \theta$.

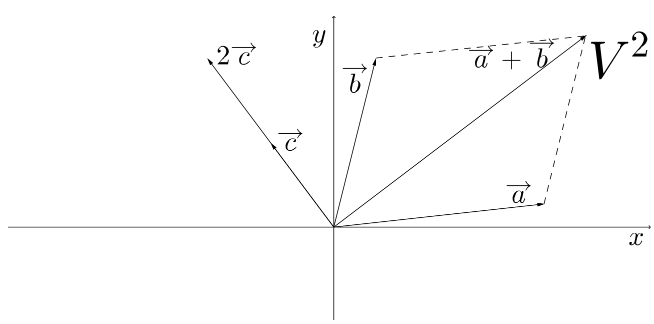
Takođe, svaki vektor $x \in V$ ima jedinstven obratni vektor. Kako bismo to pokazali, pretpostavimo da je i vektor $y \in V$ obratan za x, tj. neka je $y + x = x + y = \theta$. Međutim, tada imamo

$$-x = -x + \theta = -x + (x + y) = (-x + x) + y = \theta + y = y.$$

Napomena 1.1.2. Moguće je razmatrati vektorske prostore nad bilo kojim poljem $\mathbb{P}$. Ipak, u Linearnoj algebri se obično razmatraju vektorski prostori nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$ i nad poljem kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. Mi ćemo se tokom čitavog kursa ograničiti na ta dva polja. U početku ćemo u primjerima razmatrati isključivo vektorske prostore nad poljem realnih brojeva i tak kasnije će se pojaviti i primjeri vektorskih prostora nad poljem $\mathbb{C}$.

Napomena 1.1.3. Naglasimo da prethodna definicija podrazumijeva samo postojanje dvije operacije i to sabiranje dva vektora i množenje vektora skalarom, tj. brojem. Za sada nikakve druge operacije na vektorskom prostoru ne uvodimo. Recimo, ne možemo pomnožiti dva elementa vektorskog prostora.

Primjer 1.1.4. Razmotrimo skup V^2 čiji elementi su geometrijski vektori (orjentisane duži). Ovaj skup ćemo nazivati geometrijska ravan. Uvedimo operaciju sabiranja dva geometrijska vektora na način koji nam je veoma dobro poznat (Slika 1.1), tkz. pravilom paralelograma (nadodavanjem jedne orjentisane duži na drugu). Dalje, uvedimo operaciju množenja geometrijskih vektora realnim brojevima na takođe dobro poznat način: množenje brojem ne mijenja pravac vektora, ali mijenja dužinu i, u slučaju negativnog broja, smjer. Provjeravajući aksiome, utvrđujemo da nakon uvođenja ove dvije operacije skup V^2 postaje vektorski prostor nad poljem realnih brojeva.



Slika 1.1: Sabiranje dva vektora i množenje vektora brojem u geometrijskoj ravni V^2

Primjer 1.1.5. Razmotrimo skup $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$ koji sadrži sve kolone od n realnih brojeva. Na njemu ćemo uvesti sabiranje dva elementa i množenje svakog elementa realnim brojem, tako da dobijemo vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$. Ove operacije definišemo na sljedeći način

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}.$$

Lako je provjeriti da je sada $\mathbb{R}^n$ vektorski prostor nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$.

Primjer 1.1.6. Sa $C[0,1]$ označimo skup svih neprekidnih funkcija na $[0,1]$. Uvedimo standardnu operaciju sabiranja dvije funkcije. Poznato je da je zbir dvije neprekidne funkcije neprekidna funkcija, dakle takođe element $C[0,1]$. Takođe, množenjem neprekidne funkcije realnim brojem α dobijamo novu neprekidnu funkciju. Provjerom aksioma je lako utvrditi da $C[0,1]$ sa uvedenim operacijama čini vektorski prostor nad poljem realnih brojeva.

Teorema 1.1.7. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{P}$. Tada je*
(1) $0 \cdot x = \theta$, $\forall x \in V$;
(2) $\alpha \cdot \theta = \theta$, $\forall \alpha \in \mathbb{P}$;
(3) $\alpha \cdot x = \theta$, $x \in V$, $\alpha \in \mathbb{P}$, *ako i samo ako je* $\alpha = 0$ *ili* $x = \theta$;
(4) $-x = (-1) \cdot x$, $\forall x \in V$.

Dokaz. (1) Kako je $\theta + 0 \cdot x = 0 \cdot x = (0+0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$, to iz jednakosti $\theta + 0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$ slijedi da $\theta = 0 \cdot x$;

(2) Kako je $\theta + \alpha \cdot \theta = \alpha \cdot \theta = \alpha \cdot (\theta + \theta) = \alpha \cdot \theta + \alpha \cdot \theta$, iz $\theta + \alpha \cdot \theta = \alpha \cdot \theta + \alpha \cdot \theta$ imamo $\theta = \alpha \cdot \theta$;

(3) Pretpostavimo da $\alpha \neq 0$. Tada $x = 1 \cdot x = (\alpha^{-1} \cdot \alpha) \cdot x = \alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot x) = \alpha^{-1} \cdot \theta = \theta$;

(4) Kako je $(-1) \cdot x + x = (-1) \cdot x + 1 \cdot x = ((-1) + 1) \cdot x = 0 \cdot x = \theta$, zaključujemo da je $(-1) \cdot x$ obratni vektor za x. Kako smo već vidjeli, obratni vektor je jedinstven, pa mora biti $-x = (-1) \cdot x$. □

1.2 Vektorski potprostori

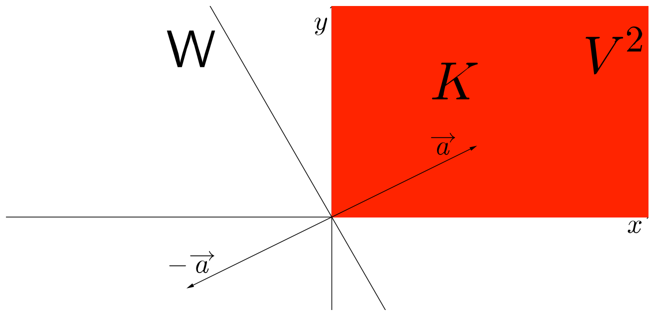
Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{P}$.

Definicija 1.2.1. Neprazan skup $W \subseteq V$ se naziva potprostorom prostora V ako je W vektorski prostor sa operacijama u V.

Primijetimo da svaki vektorski prostor V ima dva trivijalna potprostora: to je prostor koji se sastoji samo od nula-vektora $\{\theta\}$, kao i sam prostor V.

Lema 1.2.2. *Neprazan skup $W \subseteq V$ je potprostor vektorskog prostora, ako i samo ako:*
(1) $\forall x, y \in W$ *važi* $x + y \in W$;
(2) $\forall x \in W$ *i* $\forall \alpha \in \mathbb{P}$ *važi* $\alpha x \in W$.

Dokaz ove leme slijedi neposredno iz same definicije vektorskog potprostora. Dakle, neprazan skup W je potprostor vektorskog prostora ako je W "zatvoren" u odnosu na sabiranje vektora i množenje vektora skalarom.



Slika 1.2: Prvi kvadrant K nije vektorski potprostor V^2, jer postoji vektor koji je element K, ali čiji obratni vektor nije element K. Sa druge strane, prava W jeste potprostor, kao i sve prave koje prolaze kroz koordinatni početak.

Primjer 1.2.3. Razmotrimo neke podskupove vektorskog prostora V^2 geometrijskih vektora.
(a) Prvi kvadrant K nije vektorski potprostor, jer (na primjer) množenje vektora negativnim brojem daje vektor koji ne pripada skupu K (Slika 1.2).
(b) x-osa (apscisa) i y-osa (ordinata) su vektorski potprostori u V^2. Dalje, vidimo da su sve prave koje prolaze kroz koordinatni početak takođe potprostori. To su, uz dva trivijalna potprostora $\{\theta\}$ i V^2, jedini vektorski potprostori u V^2.

Primjer 1.2.4. U prostoru $\mathbb{R}^n$ razmotrimo sledeća tri skupa $A = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, $B = \left\{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} : x_1 = x_2 = 4x_n\right\}$ i $C = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. Skupovi A i B jesu vektorski potprostori u $\mathbb{R}^n$, a C nije.

Primjer 1.2.5. Uočimo neke potprostore prostora $C[0,1]$ neprekidnih funkcija na segmentu $[0,1]$.

1. Lako je provjeriti da sve funkcije konstante na $[0,1]$ čine potprostor.
2. Podskup M_n svih polinoma stepena manjeg ili jednakog n je takođe potprostor prostora $C[0,1]$.

Lema 1.2.6. *Skup $W \subseteq V$ je potprostor vektorskog prostora V, ako i samo ako*

$$\forall x, y \in W \text{ i } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{P} \text{ važi } \alpha x + \beta y \in W. \tag{1.1}$$

Dokaz. Najprije pretpostavimo da je W potprostor u V. Neka su x i y vektori u W i neka su α i β skalari. Prema Lemi 1.2.2 imamo $\alpha x \in W$ i $\beta y \in W$. Prema istoj lemi zbir vektora αx i βy pripada W, tj. $\alpha x + \beta y \in W$. Obrnuto, neka u skupu W važi (1.1). Uzimajući $\alpha = \beta = 1$ u relaciji (1.1), zaključujemo da zbir dva vektora iz W takođe pripada W. Ako zatim izaberemo $\beta = 0$, dobijamo da je množenje vektora iz W skalarom takođe element skupa W. Dakle, prema Lemi 1.2.2, W je potprostor u V. $\square$

Teorema 1.2.7. *Ako su W_1 i W_2 potprostori u V tada je i njihov presjek $W_1 \cap W_2$ takođe potprostor.*

Dokaz. Dokaz ćemo ispisati koristeći Lemu 1.2.2. Kako bismo se uvjerili da je $W_1 \cap W_2$ potprostor, treba provjeriti dva svojstva.

(i) Neka su $y_1, y_2 \in W_1 \cap W_2$. Tada $y_1 \in W_1$ i $y_2 \in W_1$. Pošto je W_1 potprostor, to iz Leme 1.2.2 slijedi da je $y_1 + y_2 \in W_1$.

Na isti način, $y_1 \in W_2$ i $y_2 \in W_2$, pa, pošto je W_2 potprostor, imamo da $y_1 + y_2 \in W_2$.

Dakle, vektor $y_1 + y_2$ pripada istovremeno potprostorima W_1 i W_2, pa $y_1 + y_2 \in W_1 \cap W_2$.

(ii) Neka je $y \in W_1 \cap W_2$. Ovo znači da je $y_1 \in W_1$ i $y_1 \in W_2$. Pošto su W_1 i W_2 potprostori, to iz Leme 1.2.2 imamo da za svako $\alpha \in \mathbb{P}$ važi $\alpha y_1 \in W_1$ i $\alpha y_1 \in W_2$. Odavde vidimo da je $\alpha y_1 \in W_1 \cap W_2$.

Sada na osnovu Leme 1.2.6 možemo zaključiti da je i $W_1 \cap W_2$ potprostor. $\square$

Zadatak 1.2.8. Pokazati da je unija dva potprostora W_1 i W_2 takođe potprostor, ako i samo ako je jedan sadržan u drugom, tj. $W_1 \subseteq W_2$ ili $W_2 \subseteq W_1$.

1.3 Linearni omotač

Pod sistemom vektora podrazumjevamo konačan skup vektora.

Definicija 1.3.1. Neka je $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ sistem vektora i $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ skalari. Vektor

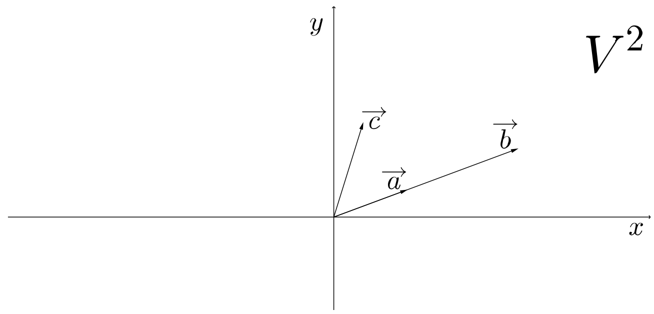
$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

se naziva linearnom kombinacijom vektora $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Skalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ se nazivaju koeficijentima te linearne kombinacije.

Definicija 1.3.2. Linearnim omotačem sistema $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ nazivamo skup svih linearnih kombinacija tog sistema. **Oznaka:** $\mathrm{Lin}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ili $\mathrm{Lin}(S)$.

Primjer 1.3.3. Razmotrimo sistem $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ u vektorskom prostoru V^2 (vidi Sliku 1.3). Vidimo da vektor $\vec{b}$ pripada linearnom omotaču sistema $\{\vec{a}\}$, a samim tim i linearnom omotaču sistema $\{\vec{a}, \vec{c}\}$. Takođe, vektor $\vec{a}$ pripada linearnom omotaču sistema $\{\vec{b}\}$, a samim tim i linearnom omotaču sistema vektora $\{\vec{b}, \vec{c}\}$. Ali, vektor $\vec{c}$ ne pripada linearnom omotaču sistema $\{\vec{a}, \vec{b}\}$.

Primjer 1.3.4. Razmotrimo vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ i vektore $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ i $x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ koji



Slika 1.3

pripadaju tom prostoru. Linearna kombinacija ovih vektora je

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3\alpha_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ -3\alpha_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Prema tome, linearni omotač sistema $\{x_1, x_2\}$ je

$$\mathrm{Lin}\{x_1, x_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Na primjer, vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ pripada linearnom omotaču sistema $\{x_1,\ x_2\}$, za konkretne vrijednosti $\alpha_1 = -1$ i $\alpha_2 = 0$. Sa druge strane, vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ne pripada linearnom omotaču sistema $\{x_1,\ x_2\}$, tj. ne može se predstaviti kao linearna kombinacija vektora iz ovog sistema.

Lema 1.3.5. *Linearni omotač skupa je potprostor.*

Dokaz. Dokaz ćemo sprovesti za konačan skup $S = \{x_1, \dots, x_m\}$. Provjerićemo dva svojstva, kako bismo se pozvali na Lemu 1.3.5.

(i) Neka je $y', y'' \in \mathrm{Lin}(S)$. Tada se y' i y'' mogu predstaviti kao linearne kombinacije vektora iz S, tj.

$$y' = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i' x_i \text{ i } y'' = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i'' x_i.$$

Sabirajući ove dvije jednakosti, imamo

$$y' + y'' = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i' + \alpha_i'') x_i.$$

Dakle, vektor $y' + y''$ smo predstavili kao linearnu kombinaciju vektora $\{x_1, \dots, x_m\}$ i tim samim pokazali da je $y' + y'' \in \mathrm{Lin}\{x_1, \dots, x_m\}$.

(ii) Neka je sada $y' \in \mathrm{Lin}\{x_1, \dots, x_m\}$. Tada važi $y' = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i' x_i$. Sada uzmimo proizvoljno $\gamma \in \mathbb{P}$. Imamo da $\gamma y' = \sum_{i=1}^{m} \gamma \alpha_i' x_i$. Dakle, vektor y' smo predstavili kao linearnu kombinaciju vektora x_i sa koeficijentima $\gamma \alpha_i'$. Odavde imamo da je $\gamma y' \in \mathrm{Lin}\{x_1, \dots, x_m\}$.

Iz (i) i (ii) zaključujemo da je $\mathrm{Lin}(S)$ potprostor. □

Lema 1.3.6. *Neka je W potprostor u V i neka su $x_1, \dots, x_m \in W$. Tada svaka linearna kombinacija vektora $x_1, \dots, x_m$ leži u W.*

Dokaz. Dokaz možemo sprovesti indukcijom po m. Za $m = 1$ ova Lema slijedi iz Leme 1.2.2, ako je $x_1 \in W$, a W potprostor, tada je $\alpha x_1 \in W$.

Sada pretpostavimo da Lema važi za m. Neka su $x_1, \dots, x_m, x_{m+1}$ vektori iz W. Tada, po induktivnoj pretpostavci imamo da $u = \alpha_1 x_1 + \cdots \alpha_m x_m \in W$, a takođe $v = \alpha_{m+1} x_{m+1} \in W$ za proizvoljne koeficijente $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}$.

Sada imamo da je W potprostor i $u, v \in W$. Odavde slijedi da $u + v = \alpha_1 x_1 + \cdots \alpha_m x_m + \alpha_{m+1} x_{m+1} \in W$. □

Lema 1.3.7. *Ako je $S \subseteq W$, gdje je W potprostor, tada je $\mathrm{Lin}(S) \subseteq W$.*

Dokaz. Neka je $y \in \mathrm{Lin}(S)$, tada je $y = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i$, gdje su $x_1, \dots, x_m \in S \implies \{x_1, \dots, x_m\} \subseteq W$. Pošto je W potprostor, to i linearna kombinacija vektora $x_1, \dots, x_m$ takođe leži u W, dakle $y \in W$. Pokazali smo da za proizvoljan vektor $y \in Lin(S)$ važi $y \in W$. Odavde slijedi $Lin(S) \subseteq W$. □

Posljedica 1.3.8. *Neka je $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sistem vektora u vektorskom prostoru V. Tada je $\mathrm{Lin}(S)$ najmanji vektorski potprostor u V koji sadrži sve vektore sistema S.*

Dokaz. Već smo dokazali da je $\mathrm{Lin}(S)$ potprostor (vidi Lemu 1.3.5).

Neka je sada W proizvoljan vektorski potprostor u V koji sadrži sve vektore sistema $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Prema Lemi 1.3.6, on mora sadržati sve linearne kombinacije sistema S, tj. imamo $\mathrm{Lin}(S) \subseteq W$. □

Lema 1.3.9. *Neka su $S = \{x_1, x_2 \dots, x_n\}$ i $T = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ sistemi u vektorskom prostoru. Ako $x_j \in \mathrm{Lin}(T)$ za svako $j = 1, 2, \dots, n$, tada je $\mathrm{Lin}(S) \subseteq \mathrm{Lin}(T)$.*

Dokaz. Neka je $x \in \mathrm{Lin}(S)$, $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$ i $x_j = \sum_{k=1}^{m} \beta_j^k y_k$, $j = \overline{1,n}$. Tada imamo

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\sum_{k=1}^{m} \beta_j^k y_k \right) = \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_j^k \right) y_k = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k y_k,$$

gdje je $\gamma_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_j^k$, $k = \overline{1,m}$. Dakle, zaista $x \in \mathrm{Lin}(T)$. □

Iz prethodne leme slijedi naredno tvrđenje.

Posljedica 1.3.10. *Ako je svaki vektor sistema* $S = \{x_1, x_2 \dots, x_n\}$ *linearna kombinacija podsistema* $T = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}\}$, *gdje je* $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_m \le n$, *tada je* $\mathrm{Lin}(S) = \mathrm{Lin}(T)$.

1.4 Linearna nezavisnost i zavisnost

U ovoj sekciji ćemo uvesti ključne pojmove linearne nezavisnosti i zavisnosti sistema vektora.

Kažemo da je linearna kombinacija $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$ vektora $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ trivijalna, ako je $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ (tj. ako su svi koeficjenti te linearne kombinacije jednaki nuli). S druge strane, linearna kombinacija je netrivijalna, ako postoji $\alpha_j \neq 0$, $1 \le j \le n$ (tj. ako postoji koeficijent α_j različit od nule).

Definicija 1.4.1. Sistem vektora $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ se naziva linearno nezavisnim ako iz jednakosti $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \theta$ slijedi $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

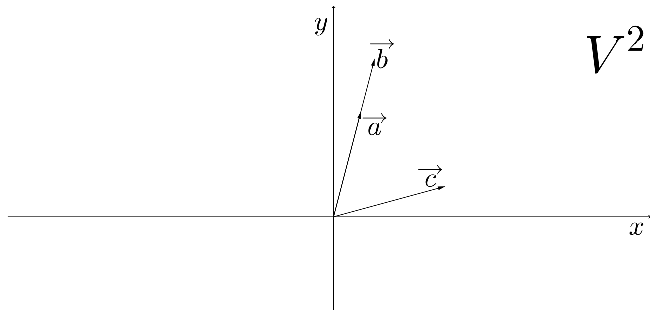
Definicija 1.4.2. Sistem vektora $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ se naziva linearno zavisnim, ako postoje skalari $\alpha_1, \alpha_2 \dots, \alpha_n$ koji nisu svi jednaki nuli, tako da je $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \theta$.

Drugim riječima, sistem vektora je linearno zavisan, ako postoji netrivijalna linearna kombinacija tog sistema koja je jednaka nula-vektoru, a linearno nezavisan ako je samo trivijalna linearna kominacija jednaka nula-vektoru.

Pojam linearne nezavisnosti i zavisnosti u geometrijskoj ravni ili prostoru ima jasnu geometrijsku interpretaciju, što ilustruje naredni primjer.

Primjer 1.4.3. (i) Sistem od dva vektora u geometrijskoj ravni V^2 je linearno zavisan ako i samo ako su vektori kolinearni. Sistem od tri vektora u V^2 je linearno zavisan.
(ii) U trodimenzionalnom geometrijskom prostoru V^3 sistem od tri vektora je linearno zavisan, ako i samo ako je riječ o komplanarnim vektorima (tj. vektorima koji leže u istoj ravni). Sistem od četiri vektora u V^3 je uvijek linearno zavisan.
(iii) Na Slici 1.4 vidimo da je sistem vektora $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ linearno zavisan, dok je sistem $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}\}$ linearno nezavisan.

Primjer 1.4.4. U prostoru $\mathbb{R}^3$ posmatramo sistem od dva vektora $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Da bismo provjerili linearnu nezavisnost sistema $\{x_1, x_2\}$, izjednačićemo njihovu linearnu kombinaciju sa nula-vektorom $\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Izjednačavajući odgovarajuće



Slika 1.4

koordinate dobijamo sistem linearnih jednačina

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ 3\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Lako je vidjeti da ovaj sistem ima jedinstveno rješenje $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Saglasno definiciji, sistem $\{x_1, x_2\}$ je linearno nezavisan.

Neka je $x_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ i razmotrimo sada sistem vektora $\{x_1, x_2, x_3\}$. Kako bismo ispitali linearnu (ne)zavisnost ovih vektora, sastavimo linearnu kombinaciju ovih vektora i izjednačimo je sa nula-vektorom:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dobijamo sistem jednačina

$$\begin{cases} \alpha_1 - 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - 3\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Ovaj sistem ima beskonačno mnogo rješenja, a jedno od mogućih je $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 1$. Zaključujemo da postoji netrivijalna linearna kombinacija sistema vektora $\{x_1, x_2, x_3\}$ koja rezultira nula-vektorom, pa je on linearno zavisan.

Napomena 1.4.5. Vidjeli smo da se provjera linearne zavisnosti i nezavisnosti u prostoru $\mathbb{R}^n$ svodi na zadatak rješavanja sistema linearnih jednačina. U trećem poglavlju ćemo detaljno proučiti teoriju i metode rješavanja sistema linearnih jednačina.

Sada ćemo dokazati nekoliko osnovnih tvrđenja o linearnoj nezavisnosti i zavisnosti sistema vektora.

Lema 1.4.6. *Ako je $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ linearno zavisan sistem i $x_{m+1}, \ldots, x_n$ proizvoljni vektori, tada je sistem $\{x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n\}$ takođe linearno zavisan.*

Dokaz. Neka je sistem $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ linearno zavisan. Tada postoji netrivijalna linearna kombinacija koja je jednaka nula-vektoru:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m = \theta, \text{ pri čemu postoji } \alpha_j \neq 0, 1 \leq j \leq m.$$

Odavde slijedi da

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m + 0 \cdot x_{m+1} + 0 \cdot x_{m+2} + \cdots + 0 \cdot x_n = \theta, \text{ pri čemu } \exists \alpha_j \neq 0.$$

Dakle, napravili smo netrivijalnu linearnu kombinaciju proširenog sistema koja je jednaka nula-vektoru. Iz definicije slijedi da je sistem $\{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n\}$ linearno zavisan. □

Iz prethodne leme neposredno slijedi naredno tvrđenje.

Posljedica 1.4.7. *Ako je sistem $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ linearno nezavisan, tada je i svaki njegov podsistem $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}\}$ linearno nezavisan (ovdje je $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n$).*

Teorema 1.4.8. *Sistem vektora $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ je linearno zavisan, ako i samo ako postoji vektor u prostoru V koji može biti predstavljen kao linearna kombinacija tih vektora na dva različita načina.*

Dokaz. Pretpostavimo da je sistem $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ linearno zavisan. Tada postoje skalari $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ koji nisu svi jednaki nuli tako da je $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \theta$. Sa druge strane, i trivijalna linearna kombinacija je, naravno, jednaka nula-vektoru: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = \theta$. Dakle, nula-vektor $\theta \in V$ je predstavljen kao linearna kombinacija sistema $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ na dva različita načina.

Dokažimo sada tvrđenje suprotnom smjeru. Pretpostavimo da postoji vektor y, takav da

$$y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \quad \text{i} \quad y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n,$$

pri čemu postoji j, $1 \leq j \leq n$ tako da je $\alpha_j \neq \beta_j$. Oduzimanjem gornjih jednakosti dobijamo

$$(\alpha_1 - \beta_1) x_1 + (\alpha_2 - \beta_2) x_2 + \dots (\alpha_j - \beta_j) x_j + \cdots + (\alpha_n - \beta_n) x_n = \theta.$$

Kako je $\alpha_j - \beta_j \neq 0$, ovo je netrivijalna linearna kombinacija, pa iz definicije slijedi da je sistem $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ linearno zavisan. □

Teorema 1.4.9. *Sistem vektora $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ je linearno zavisan, ako i samo ako postoji vektor tog sistema koji je linearna kombinacija preostalih vektora.*

Dokaz. Najprije pretpostavimo da je $x_j \in \mathrm{Lin}\{x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n\}$. Tada postoje skalari $\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_n$ takvi da je $x_j = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{j-1} x_{j-1} + \alpha_{j+1} x_{j+1} + \cdots + \alpha_n x_n$. Prebacivanjem vektora x_j na desnu stranu jednakosti dobijamo

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{j-1} x_{j-1} - x_j + \alpha_{j+1} x_{j+1} + \cdots + \alpha_n x_n = \theta.$$

Kako je koeficijent uz vektor x_j u ovoj linearnoj kombinaciji $-1 \neq 0$, to je ovo netrivijalna linearna kombinacija, pa je sistem vektora S linearno zavisan.

Obrnuto, pretpostavimo da je sistem $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ linearno zavisan. Tada postoje skalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ koji nisu svi jednaki nuli tako da je $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \theta$. Neka je, na primjer, $\alpha_j \neq 0$. Tada prethodnu jednakost možemo podijeliti sa α_j:

$$x_j = -\frac{\alpha_1}{\alpha_j} x_1 - \cdots - \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j} x_{j-1} - \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j} x_{j+1} - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_j} x_n,$$

tj. x_j se može predstaviti kao linearna kombinacija ostalih vektora. □

Slično se pokazuje i naredno tvrđenje.

Teorema 1.4.10. *Neka je $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ linearno nezavisan sistem i neka je $x_{n+1} \in V$. Tada je sistem vektora $\{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$ linearno zavisan, ako i samo ako $x_{n+1} \in \operatorname{Lin}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.*

Dokaz. Ako $x_{n+1} \in \operatorname{Lin}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, na osnovu prethodne teoreme $\{x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$ je linearno zavisan sistem.

Kako bismo pokazali da važi i obrnuto tvrđenje, pretpostavimo da je $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}\}$ linearno zavisan sistem. Tada postoje skalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta$ koji nisu svi jednaki nuli, tako da

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n + \beta x_{n+1} = \theta. \tag{1.2}$$

Ako bi bilo $\beta = 0$, tada bi iz prethodne jednakosti slijedilo da je sistem $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ linearno zavisan, a to je u kontradikciji sa pretpostavkom naše teoreme. Dakle, zaključujemo da $\beta \neq 0$, pa iz jednakosti (1.2) imamo

$$x_{n+1} = -\frac{\alpha_1}{\beta} x_1 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\beta} x_n,$$

tj. $x_{n+1} \in \operatorname{Lin}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. □

Teorema 1.4.11. *Neka je $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \neq \{\theta\}$ proizvoljan sistem vektora. Tada postoji njegov linearno nezavisan podsistem $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}\}$, $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_m \leq n$, tako da je*

$$\operatorname{Lin}\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}\} = \operatorname{Lin}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Dokaz. Ukoliko je sam sistem $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ linearno nezavisan, dokaz je završen. Ako nije, tada postoji vektor x_j, $1 \leq j \leq n$, koji je linearna kombinacija preostalih. Prema Posljedici 1.3.10, imamo da je linearni omotač sistema $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ isti kao i linearni omotač sistema koji se dobija ukljanjanjem vekotra x_j, tj. sistema $\{x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots x_n\}$. Sa novim sistemom nastavimo proces, sve dok ne dobijemo linearno nezavisan podsistem $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}\}$. □

Teorema 1.4.12. *Neka svi vektori sistema $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ pripadaju linearnom omotaču sistema $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Ako je $m > n$, tada je sistem $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ linearno zavisan.*

Dokaz. Dokaz ovog tvrđenja ćemo sprovesti indukcijom po n.

Baza indukcije.

Neka je $n = 1$. Pokazaćemo da je podsistem $\{y_1, y_2\}$ linearno zavisan. Kako oba vektora ovog sistema pripadaju $\operatorname{Lin}\{x_1\}$, postoje skalari α i β tako da je $y_1 = \alpha x_1$ i $y_2 = \beta x_1$. Ako su oba skalara jednaka 0, imamo $y_1 = y_2 = \theta$, pa je $\{y_1, y_2\}$ linearno zavisan. Pretpostavimo da je neki od tih skalara različit od nule, recimo neka je $\alpha \neq 0$. Tada imamo $x_1 = \alpha^{-1}y_1$, pa je $y_2 = \beta x_1 = (\beta\alpha^{-1})y_1$, a to ponovo znači da je sistem $\{y_1, y_2\}$ linearno zavisan.

Korak indukcije.

Pretpostavimo da teorema važi za prirodan broj n. Uzmimo sistem od $n+1$ vektora $\{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$, i pretpostavimo da svi vektori sistema $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, gdje je $m > n+1$, pripadaju linearnom omotaču prvog sistema vektora. Dakle, svaki vektor y_j, $j = \overline{1,m}$ je linearna kombinacija sistema $\{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$:

$$y_1 = \alpha_{11}x_1 + \cdots + \alpha_{1n}x_n + \alpha_{1,n+1}x_{n+1}$$

$$\vdots$$

$$y_m = \alpha_{m1}x_1 + \cdots + \alpha_{mn}x_n + \alpha_{m,n+1}x_{n+1}.$$

Ako su u svim ovim linearnim kombinacijama koeficijenti $\alpha_{j,n+1}$ ispred vektora x_{n+1} jednaki nuli, tada se možemo pozvati na induktivnu pretpostavku i zaključiti da je sistem $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ linearno zavisan.

Pretpostavimo sada da je bar jedan koeficijent $\alpha_{j,n+1}$ ispred vektora x_{n+1} u razlaganjima vektora $y_1, y_2, \dots, y_m$ različit od nule. Ne umanjujući opštost, pretpostavimo da je $\alpha_{1,n+1} \neq 0$. Tada se vektor x_{n+1} može predstaviti kao linearna kombinacija sistema $\{y_1, x_1, \dots, x_n\}$. Odavde slijedi da se svi vektori sistema $\{y_2, \dots, y_m\}$ mogu predstaviti kao linearne kombinacije vektora $y_1, x_1, \dots, x_n$:

$$y_2 = \beta_2 y_1 + \alpha_{21}x_1 + \cdots + \alpha_{2n}x_n;$$

$$\vdots$$

$$y_n = \beta_n y_1 + \alpha_{n1}x_1 + \cdots + \alpha_{nn}x_n;$$

U gornjem sistemu prebacimo sabirke $\beta_2 y_1, \dots, \beta_n y_1$ na drugu stranu jednačine. Dobili smo da je svaki od $m-1$ vektora sistema $\{y_2 - \beta_2 y_1, y_3 - \beta_3 y_1, \dots, y_m - \beta_m y_1\}$ linearna kombinacija sistema $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ od n vektora. Pošto je $m - 1 > n$, to iz induktivne pretpostavke slijedi da je prvi sistem vektora linearno zavisan, odnosno postoje skalari $\gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_m$ koji nisu svi jednaki nuli tako da je:

$$\sum_{j=2}^{m} \gamma_j (y_j - \beta_j y_1) = \theta.$$

Ova se jednakost može napisati u formi:

$$\gamma_1 y_1 + \sum_{j=2}^{m} \gamma_j y_j = \theta, \text{ gdje je } \gamma_1 = -\sum_{j=2}^{m} \gamma_j \beta_j.$$

Pri tome znamo da je neki od koeficijenata $\gamma_2, \dots, \gamma_m$ različit od nule. Dakle, u gornjoj jednakosti je riječ o netrivijalnoj linearnoj kombinaciji koja je jednaka nula vektoru. Odavde slijedi da je sistem $\{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ linearno zavisan. $\square$

Primjer 1.4.13 (preuzeto iz Insel i ostali: *Linear algebra. Fourth edition*)**.** U članku B.K. Watt i A.L. Merrill, objavljenom u *Agriculture Hand-book, N. 8, Washington, D.C., 1963.* data je sljedeća tabela sadržaja pet osnovnih vitamina (vitamina A, B_1, B_2, C i niacina) u nekim prehrambenim namirnicama:

namirnica	A	B_1	B_2	niacin	C
Jabukov maslac	0	0.01	0.02	0.2	2
svježe jabuke	90	0.03	0.02	0.1	4
čoko slatkiš sa kokosom	0	0.02	0.07	0.2	0
meso iz školjki	100	0.1	0.18	1.3	10
kolač od vafli	0	0.05	0.06	0.3	0
kaša sa žitaricama	0	0.01	0.01	0.1	0
marmelada	10	0.01	0.03	0.2	2
pita od kokosa sa prelivom	0	0.02	0.02	0.4	0
sirovi crni pirinač	0	0.34	0.05	4.7	0
soja sos	0	0.2	0.25	0.4	0
kuvane špagete	0	0.01	0.01	0.3	0
sirovi divlji pirinač	0	0.81	0.63	6.2	0

U tabeli su ukazane količine vitamina koje se nalaze u 100 grama svake od namirnica.

Sadržaj vitamina u 100 grama namirnice možemo posmatrati kao vektor u $\mathbb{R}^5$. Tada, na primjer, možemo uočiti da se vektor sirovog divljeg pirinča može predstaviti kao linearna kombinacija vektora kolača od vafli, pite od kokosa, sirovog crnog pirinča i soja sosa, tj. imamo

$$\begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.05 \\ 0.06 \\ 0.30 \\ 0.00 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.02 \\ 0.02 \\ 0.40 \\ 0.00 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.34 \\ 0.05 \\ 4.70 \\ 0.00 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.20 \\ 0.25 \\ 0.40 \\ 0.00 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.81 \\ 0.63 \\ 6.20 \\ 0.00 \end{pmatrix}.$$

Ovo nas dovodi do zaključka da 100 grama kolača od vafli, 100 grama kokosove pite sa prelivom, 100 grama sirovog crnog pirinča i 200 grama soja sosa zajedno sadrže istu količinu pet osnovnih vitamina kao 100 grama sirovog divljeg pirinča.

Zadatak 1.4.14. Pokažite da je vektor mesa iz školjki linearna kombinacija jabukovog maslaca, svježih jabuka, čokoladnog slatkiša sa kokosom, kaše, marmelade i kuvanih špageta.

1.5 Baza i dimenzija vektorskog prostora

Definicija 1.5.1. Kažemo da sistem vektora S generiše vektorski prostor V, ako je $\text{Lin}(S) = V$.

Definicija 1.5.2. Sistem vektora $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ se naziva bazom u vektorskom prostoru V, ako je

(i) sistem B linearno nezavisan i

(ii) sistem B generiše vektorski prostor V, tj. $\text{Lin}(B) = V$.

Teorema 1.5.3. *Sistem vektora $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ je baza u vektorskom prostoru V, ako i samo ako se svaki vektor prostora V može na jedinstven način predstaviti kao njihova linearna kombinacija.*

Dokaz. Neka je sistem vektora $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ baza u prostoru V. Tada je $\mathrm{Lin}(B) = V$, što znači da se svaki vektor $v \in V$ može zapisati kao linearna kombinacija vektora $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Pošto je B linearno nezavisan sistem, to se prema Teoremi 1.4.8 svaki vektor $v \in V$ može predstaviti kao njihova linearna kombinacija na jedinstven način.

Obrnuto, neka se svaki vektor $v \in V$ može predstaviti kao linearna kombinacija vektora $v_1, v_2, \ldots, v_n$ na jedinstven način. Tada sistem $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ generiše prostor. S druge strane, pošto se svaki vektor može zapisati kao njihova linearna kombinacija na jedinstven način, to iz Teoreme 1.4.8 slijedi da je sistem B linearno nezavisan. Dakle, $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ je baza u V. $\square$

Definicija 1.5.4. Neka je $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ baza vektorskog prostora V i $v \in V$ proizvoljan vektor. Prema prethodnoj teoremi postoji jedinstvena linearna kombinacija

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

Ta linearna kombinacija se naziva **razlaganjem vektora v po bazi** B, a skalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ se nazivaju **koordinatama vektora v u bazi** B.

Teoremu 1.5.3 možemo preformulisati na sljedeći način: **Razlaganje svakog vektora po bazi je jedinstveno.**

Teorema 1.5.5. *Ako je netrivijalni vektorski prostor V generisan nekim konačnim sistemom vektora, tada u V postoji baza od konačnog broja vektora.*

Dokaz. Neka je V generisan sistemom $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Prema Teoremi 1.4.11 postoji njegov linearno nezavisan podsistem $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}\}$ tako da je $\mathrm{Lin}\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}\} = \mathrm{Lin}\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} = V$. Neka je $v_j = x_{i_j}$, $j = \overline{1, n}$. Tada je sistem $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ linearno nezavisan i generiše prostor V. Dakle, B je baza u prostoru V. $\square$

Teorema 1.5.6. *Ako su $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ i $B' = \{v'_1, v'_2, \ldots, v'_n\}$ dvije baze u vektorskom prostoru V, tada je $m = n$.*

Dokaz. Kako svi vektori baze B pripadaju linearnom omotaču $\mathrm{Lin}(B')$, to na osnovu Teoreme 1.4.12 mora biti $m \leq n$. Slično, kako svi vektori baze B' pripadaju linearnom omotaču $\mathrm{Lin}(B)$, to prema istoj teoremi mora biti $n \leq m$. Dakle, imamo $m = n$. $\square$

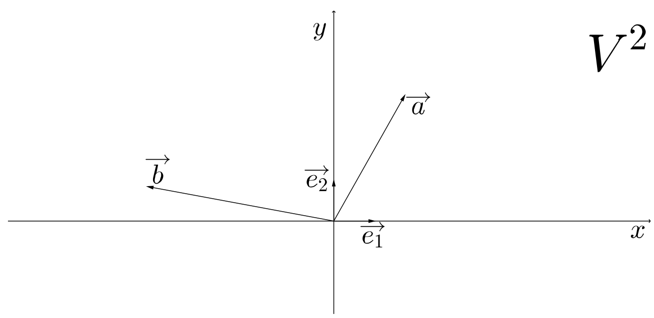
Prethodna teorema opravdava narednu definiciju.

Definicija 1.5.7. Vektorski prostor se naziva konačnodimenzionalnim ako ima bazu od konačnog broja vektora. Broj vektora u bazi vektorskog prostora se naziva dimenzijom tog prostora.
Oznaka: Dimenzija vektorskog prostora V se označava sa $\dim V$.

Napomena 1.5.8. Smatraćemo da je baza trivijalnog vektorskog prostora $V = \{\theta\}$ prazan skup i da je njegova dimenzija jednaka 0.

Primjer 1.5.9. Razmotrimo geometrijsku ravan V^2. Vektori $\vec{e_1}$ i $\vec{e_2}$ su linearno nezavisni. Uz to, svaki vektor u V^2 se može predstaviti kao linearna kombinacija ova dva vektora. Dakle, $\mathrm{Lin}\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\} = V^2$. Zaključujemo da je sistem $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ baza prostora V^2. Dakle, V^2 je dvodimenzionalan prostor, tj. $\dim V^2 = 2$. Svaki vektor u V^2 se može na jedinstven način predstaviti kao linearna kombinacija ova dva vektora. Koeficijenti razlaganja po ovoj bazi se nazivaju Dekartovim koordinatama vektora.

Naravno, ovo nije jedina baza u V^2. Bilo koji sistem od dva linearno nezavisna vektora je takođe baza u V^2. Na Slici 1.5 vidimo da sistem vektora $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ takođe čini bazu prostora V^2.



Slika 1.5

Primjer 1.5.10. Razmotrimo vektorski prostor $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$. Lako je provjeriti da sistem vektora $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ generiše $\mathbb{R}^n$ i da je linearno nezavisan. Dakle, riječ je o bazi. Za ovu bazu u $\mathbb{R}^n$ ponekad kažemo da je standardna baza. Bilo koji drugi sistem od n linearno nezavisnih vektora je takođe baza u $\mathbb{R}^n$. Dakle, prostor $\mathbb{R}^n$ je n-dimenzionalan, tj. $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Primjer 1.5.11 (preuzeto iz Šikin: *Lineinie prostranstva i otobrazheniya*)**.** Jedna mala oblast nauke, pod nazivom *Kolorimetrija*, bavi se "mjerenjem" boja, primjenjujući Linearnu algebru. "Izmjeriti" boju X znači naći način na koji se ta boja može dobiti miješanjem tri osnovne boje. Pri tome se tri osnovne boje mogu izabrati na različite načine. Tipičan izbor je: crvena, zelena, plava (red, green, blue - RGB). Recimo da se boja X dobija miješajući količine α, β, γ crvene, zelene i plave boje respektivno:

$$X = \alpha R + \beta G + \gamma B, \quad \alpha, \beta, \gamma \geq 0.$$

U praksi, neke boje se mjere tako što se najprije njima doda izvjesna količina jedne ili dvije od osnovnih boja, a zatim se ta nova boja dobije od preostalih (jedne ili dvije) osnovne boje.

Recimo, boji X se najprije dodaje crvena boja, a zatim se ta boja dobija miješanjem zelene i plave. U tom slučaju se boja X mjeri na sljedeći način:

$$X + \alpha R = \beta G + \gamma B, \Rightarrow X = -\alpha R + \beta G + \gamma B, \quad \alpha, \beta, \gamma \geq 0.$$

Vidimo da Kolorimetrija faktički uvodi strukturu vektorskog prostora na skupu boja, gdje operacija sabiranja vektora predstavlja miješanje dvije boje, a množenje boje brojem je promjena intenziteta boje. Tri osnovne boje su baza ovog prosora. Pri tome RGB nije jedini mogući izbor za bazu. Recimo, moguće je umjesto zelene boje uzeti žutu i razlagati boje po bazi RYB. Bilo koje tri boje koje su "linearno nezavisne" mogu biti izabrane kao osnovne, tj. kao baza prostora boja. Zaključujemo da je prostor boja trodimenzionalan. S druge strane, sistem YGB ne može biti baza ovog prostora, jer su te tri boje linearno zavisne.

Primjer 1.5.12. Označimo sa M_n skup polinoma stepena $\leq n$ sa standardnim operacijama sabiranja i množenja polinoma brojem. Lako je provjeriti da M_n sa ovim operacijama ima strukturu vektorskog prostora nad poljem realnih brojeva. Elementi ovog prostora su oblika

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n, \quad a_j \in \mathbb{R}, \ j = \overline{0, n}.$$

Standardna baza u prostoru M_n je $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$, dakle $\dim M_n = n + 1$.

Primjer 1.5.13. Na vektorskom prostoru $C[0, 1]$ razmotrimo beskonačan skup vektora $\{1, t, t^2, \ldots\}$. Ovo su očigledno neprekidne funkcije na $[0, 1]$, dakle pripadaju prostoru $C[0, 1]$. Primijetimo da je svaki konačan podskup ovog skupa funkcija (vektora u $C[0, 1]$) linearno nezavisan. Dakle, u prostoru $C[0, 1]$ ne može postojati baza od konačnog broja vektora, tj. ovaj prostor nije konačnodimenzionalan.

Napomena 1.5.14. Linearna algebra se bavi proučavanjem konačnodimenzionalnih prostora i linearnih preslikavanja među njima. Pošto smo vidjeli da prostor $C[0, 1]$ nema konačnu bazu, izučavanje ovog prostora ne spada u predmet Linearne algebre. Zato u daljem izlaganju više nećemo pominjati ovaj prostor.

Zadatak 1.5.15. Vratimo se na kratko na Primjenu iz Sekcije I.4. Sada možemo reći da, proučavajući sadržaj osnovnih vitamina, možemo uvesti 5-dimenzionalni vektorski prostor namirnica. Za vježbu naći dvije različite baze u tom prostoru.

Sada ćemo nastaviti još jednim tvrđenjem koje nam daje ključne odgovore o strukturi vektorskog prostora.

Posljedica 1.5.16. *Neka je V vektorski prostor i neka je* $\dim V = n$.

(i) Svaki sistem koji generiše prostor V mora sadržati najmanje n vektora. Ako sistem generiše V i sadrži n vektora, tada je taj sistem baza u V.

(ii) Svaki linearno nezavisan sistem u prostoru V može sadržati najviše n vektora. Ako linearno nezavisan sistem vektora prostora V sadrži n vektora, tada je taj sistem baza u V.

Dokaz. (i) Neka sistem S sadrži m elemenata i neka generiše prostor V. Tada po Teoremi 1.4.11, u S postoji podsistem koji je linearno nezavisan i koji takođe generiše V. Taj podsistem je baza prostora V i prema Teoremi 1.5.6 mora sadržati n elemenata. Dakle, $m \geq n$.

S druge strane, ako sistem S sadrži n elemenata i generiše vektorski prostor V tada je riječ o bazi, jer bismo u protivnom iz njega mogli izdvojiti linearno nezavisan podsistem koji sadrži manje od n elemenata i koji je baza, a to bi bilo u kontradikciji sa pretpostkom da je $dimV = n$.

(ii) Prva rečenica slijedi iz Teoreme 1.4.12. Ako sistem od n linearno nezavisnih vektora ne bi bio baza prostora V, njegov linearni omotač bi bio pravi potprostor u V (tj. strogo bi se sadržao u V). Tada bi postojao vektor $v \in V$ koji ne pripada tom potprostoru. Dakle, sistem bi se mogao proširiti sa bar jednim vektorom do novog linearno nezavisnog sistema, a to je kontradikcija sa prvom rečenicom. □

Primjer 1.5.17. Posmatrajmo prostor $\mathbb{R}^4$ i četiri vektora iz tog prostora:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ispitajmo da li su ovi vektori linearno nezavisni. Sastavimo njihovu linearnu kombinaciju i izjednačimo je sa nula vektorom:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ovu vektorsku jednakost možemo zapisati kao sistem linearnih jednačina:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_4 = 0 \\ -\alpha_2 + 5\alpha_3 + 3\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_4 = 0 \\ 3\alpha_1 - 3\alpha_2 + 7\alpha_3 + \alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Rješavajući ovaj sistem, dobijamo samo trivijalno rješenje $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Dakle, sistem vektora $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ je linearno nezavisan. Pošto su to 4 linearno nezavisna vektora u četvorodimenzionalnom prostoru, to znači da čine bazu u $\mathbb{R}^4$.

Posljedica 1.5.18. *Svaki linearno nezavisan sistem vektora može biti dopunjen do baze vektorskog prostora.*

Dokaz. Neka je dimenzija vektorskog prostora n i neka je $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ linearno nezavisan sistem vektora. Ako je $\mathrm{Lin}(S) = V$, tada je sistem S baza i $m = n$. Ako nije, tada možemo odabrati vektor $x_{m+1} \notin \mathrm{Lin}(S)$. Prema Teoremi 1.4.10, sistem $\{x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}\}$ je linearno nezavisan. Proces produžimo sa dobijenim sistemom itd.

Saglasno Posljedici 1.5.16, ovaj proces se mora okončati prilikom izbora n-tog vektora x_n, jer ćemo tada imati n linearno nezavisnih vektora $\{x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n\}$ koji će biti baza vektorskog prostora V. □

Prethodna teorema se može preformulisati na sledeći način.

Posljedica 1.5.19. *Neka je W potprostor prostora V. Tada je $dimW \leq dimV$. i baza potprostora W se može proširiti do baze prostora V. Pri tome, ako je $\dim W = \dim V$, tada je $W = V$.*

Primjer 1.5.20. Posmatrajmo vektorski prostor $\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$. Razmotrimo vektorski potprostor $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$ u $\mathbb{R}^3$. Lako je provjeriti da je $\dim W = 2$, dok je $\dim \mathbb{R}^3 = 3$. Jasno je da vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ pripada W, dok $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ne pripada W. Takođe, primijetimo da je sistem $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset W$ linearno nezavisan, pa čini bazu u W. Takav sistem vektora može se dopuniti do baze u V, s tim što je potrebno izabrati treći vektor koji zajedno sa navedena dva vektora čini linearno nezavisan sistem. Taj treći vektor može biti, na primjer: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \notin W$.

1.6 Izomorfizam vektorskih prostora

Neka su V i V' vektorski prostori nad poljem P.

Definicija 1.6.1. Vektorski prostor V' naziva se izomorfnim vektorskom prostoru V, ako postoji uzajamno jednoznačno preslikavanje $\varphi : V \to V'$ tako da $\forall u, v \in V$ i $\forall \alpha \in \mathbb{P}$ važi:

1. $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$
2. $\varphi(\alpha u) = \alpha\varphi(u)$.

Preslikavanje φ se naziva izomorfizmom.

Oznaka: $V \cong V'$ čita se: "Prostori V i V' su izomorfni".

Lako je vidjeti da važi $\varphi(\theta) = \theta'$, gdje su θ i θ' nula-vektori u prostorima V i V', respektivno.

Zaista, neka je $\varphi : V \to V'$ izomorfizam vektorskih prostora V i V'. Uzmimo proizvoljan vektor $v \in V$, tada važi:

$$\varphi(\theta) = \varphi(0 \cdot v) = 0 \cdot \varphi(v) = \theta'.$$

Lema 1.6.2. *Izomorfizam je relacija ekvivalencije na skupu vektorskih prostora.*

Dokaz. Pokazaćemo da je izomorfizam simatrična relacija. Drugim riječima, ako je $V \cong V'$, tada važi i $V' \cong V$.

Pretpostavimo da postoji preslikavanje $\varphi : V \to V'$ koje je izomorfizam. Pokazaćemo da je tada preslikavanje $\varphi^{-1} : V' \to V$ takođe izomorfizam.

Trebamo provjeriti sljedeće dvije osobine:

(1) $\varphi^{-1}(y_1 + y_2) = \varphi^{-1}(y_1) + \varphi^{-1}(y_2)$;

(2) $\varphi^{-1}(\alpha y) = \alpha\varphi^{-1}(y)$.

Neka je $x_1 = \varphi^{-1}(y_1)$ i $x_2 = \varphi^{-1}(y_2)$. Tada je $\varphi(x_1) = y_1$ i $\varphi(x_2) = y_2$, pa imamo $\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2) = y_1 + y_2$. Dakle, $\varphi^{-1}(y_1 + y_2) = x_1 + x_2 = \varphi^{-1}(y_1) + \varphi^{-1}(y_2)$.

Neka je $\varphi^{-1}(y) = x$. Tada je $\varphi(x) = y$, pa imamo $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x) = \alpha y$. Slijedi $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x) = \alpha y$. Dakle, $\varphi^{-1}(\alpha y) = \alpha x = \alpha\varphi^{-1}(y)$.

Na sličan način se može pokazati da je relacija izomorfizma tranzitivna. Naime, ako su preslikavanja $\varphi_1 : V \to V'$ i $\varphi_2 : V' \to V''$ izomorfizmi, tada je preslikavanje $\varphi_2 \cdot \varphi_1 : V \to V''$ takođe izomorfizam. Ovo ostavljamo za vježbu. □

Teorema 1.6.3. *Vektorski prostori V i V' su izomorfni, ako i samo ako $dimV = dimV'$.*

Dokaz. Neka je $dimV = dimV' = n$ i neka su $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ i $B' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ baze u V i V', respektivno. Izaberimo proizvoljni vektor $v \in V$, tada se v razlaže po bazi u svom prostoru:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$

Definišimo preslikavanje φ na sljedeći način: $\varphi(v) = v'$, gdje je $v' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e'_i$. Dakle, preslikavanje φ je definisano tako da se svaki vektor iz V slika u vektor sa istim koordinatama u V'. Preslikavanje φ je uzajamno jednoznačno, jer je razlaganje po bazi jedinstveno.

Neka su dalje $u, v \in V$, tj. $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ i $v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$. Tada je:

$$\varphi(u + v) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) e_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) e'_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e'_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i e'_i = u' + v' = \varphi(u) + \varphi(v).$$

Slično ćemo pokazati da je $\varphi(\alpha v) = \alpha\varphi(v)$:

$$\varphi(\alpha v) = \varphi\left(\alpha \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i\right) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha\beta_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha\beta_i e'_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} \beta_i e'_i = \alpha v' = \alpha\varphi(v).$$

Dakle, dokazali smo da su prostori iste dimenzije izomorfni, tako što smo konstruisali jedan takav izomorfizam.

Neka je sada $dimV = n > n' = dimV'$. Tada izomorfizam φ slika bazu B u vektore $\{\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\}$ u V', koji su linearno zavisni jer baza u V' po pretpostavci ima $n' < n$ vektora. To znači da $\exists i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tako da je $\alpha_i \neq 0$ i da:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(e_i) = \theta'$$

Pošto je φ izomorfizam, imamo da:

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \theta'.$$

Kako je φ uzajamno jednoznačno preslikavanje, to se samo jedan vektor iz V slika u nula vektor u V', a to je nula vektor iz V. Slijedi:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = \theta,$$

a pošto $\exists i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tako da je $\alpha_i \neq 0$, to znači da sistem vektora B nije baza, jer su linearno zavisni. Ovo je kontradikcija koja pokazuje da $n \leq n'$.

Na isti način se izvodi kontradikcija i za pretpostavku $n < n'$. Ovim smo dokazali da prostori različitih dimenzija nisu izomorfni. □

Napomena 1.6.4. U ovom Poglavlju smo se upoznali sa konačnodimenzionalnim vektorskim prostorima, njihovom strukturom i svojstvima. Rezultat o izomorfizmu vektorskih prostora nam omogućava da poistovjetimo dva vektorska prostora iste dimenzije. Uz pomoć izomorfizma, sve rezultate o jednom prostoru možemo lako prenijeti na drugi. To nam otvara mogućnost da dalje skoro isključivo radimo sa prostorima $\mathbb{R}^n$ i skoro zaboravimo na geometrijske prostore, prostore boja, prostore prehrambenih namirnica i slično. Tačke u geometrijskom prostoru, boje, namirnice, itd. možemo poistovjetiti sa koordinatnim kolonama u $\mathbb{R}^n$, gdje je lakše vršiti operacije sabiranja vektora i množenja brojem. Takođe, operacije nad vektorima u $\mathbb{R}^n$ je lako isprogramirati na računaru, i tako (koristeći izomorfizam) kreirati programe za operacije nad geometrijskim vektorima, za mjerenje boja ili sastavljanje optimalnog režima ishrane. Dakle, ubuduće ćemo se baviti isključivo Linearnom algebrom, znajući da se njeni rezultati mogu primijeniti na mnoge oblasti, uključujući Analitičku geometriju, Kompjutersku grafiku, Kolorimetriju ili Dijetologiju.

1.7 Direktna suma vektorskih potprostora

Definicija 1.7.1. Neka su $W_1, W_2, \ldots, W_m$ potprostori vektorskog prostora V. Njihovom sumom nazivamo skup

$$W_1 + W_2 + \cdots + W_m = \{x_1 + x_2 + \cdots + x_m : x_1 \in W_1, x_2 \in W_2, \ldots, x_m \in W_m\}.$$

Ubuduće ćemo uz oznaku $W_1 + W_2 + \cdots + W_m$ koristiti i oznaku $\sum_{j=1}^{m} W_j$.

Lema 1.7.2. *Suma vektorskih potprostora je potprostor.*

Dokaz. Neka su $W_1, W_2, \ldots, W_m$ potprostori i $W = W_1 + W_2 + \cdots + W_m$. Odaberimo proizvoljne vektore $u \in W$ i $v \in W$, i neka su α i β skalari. Tada je $u = \sum_{j=1}^{m} x_j$ i $v = \sum_{j=1}^{m} y_j$, pri čemu $x_j, y_j \in W_j$, $j = \overline{1, m}$. Sada imamo

$$\alpha u + \beta v = \alpha \sum_{j=1}^{m} x_j + \beta \sum_{j=1}^{m} y_j = \sum_{j=1}^{m} (\alpha x_j + \beta y_j) \in W,$$

budući da $\alpha x_j + \beta y_j \in W_j$, $j = \overline{1, m}$. □

Svaki vektor $x \in W = W_1 + W_2 + \cdots + W_m$ može se predstaviti u formi $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_m$, gdje je $x_j \in W_j$, $j = \overline{1, m}$. Ako je ovo predstavljanje jedinstveno za svaki vektor u W, tada govorimo o direktnoj sumi potprostora. Ovaj pojam preciziramo u narednoj definiciji.

Definicija 1.7.3. Neka su $W_1, W_2, \ldots, W_m$ potprostori u vektorskom prostoru V i $W = W_1 + W_2 + \cdots + W_m$. Neka se svaki vektor $x \in W$ može na jedinstven način predstaviti u formi $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_m$, $x_j \in W_j$, $j = \overline{1, m}$. Tada kažemo da je W direktna (ili unutrašnja) suma potprostora $W_1, W_2, \ldots, W_m$ i koristimo oznaku $W = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_m$.

Primjer 1.7.4. Prostor geometrijskih vektora V^2 je direktna suma svojih potprostora $R_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} | x \in \mathbb{R} \right\}$ (apscisa) i $R_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} | y \in \mathbb{R} \right\}$ (ordinata).

Primjer 1.7.5. Prostor $\mathbb{R}^n$ je direktna suma n potprostora $W_j = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} : x_j \in \mathbb{R} \right\}$, $j = \overline{1, n}$.

Zadatak 1.7.6. Pretpostavimo da je $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ linearno nezavisan sistem. Tada je $\text{Lin}\{x_1, \ldots, x_m\} \cap \text{Lin}\{x_{m+1}, \ldots, x_n\} = \{\theta\}$. Dokazati.

Teorema 1.7.7. *Ako su W_1 i W_2 potprostori vektorskog prostora V, tada je*

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2).$$

Dokaz. Neka je $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ baza u $W_1 \cap W_2$. Kako je $W_1 \cap W_2$ potprostor u W_1, tu bazu možemo dopuniti do baze $\{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ u W_1. Slično, kako je $W_1 \cap W_2$ potprostor u W_2, bazu prvog prostora možemo dopuniti do baze $\{v_1, \ldots, v_m, v_{n+1}, \ldots, v_k\}$ u W_2. Pokazaćemo da je $B = \{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n, v_{n+1}, \ldots, v_k\}$ baza u $W_1 + W_2$. Ovo će značiti da je $\dim(W_1 + W_2) = k$. Sa druge strane je $\dim W_1 = n$, $\dim W_2 = m + k - n$ i $\dim(W_1 \cap W_2) = m$. Kako je $k = n + (m + k - n) - m$, zaista imamo jednakost koja se pojavljuje u formulaciji teoreme.

Pokazaćemo prvo da sistem B generiše $W_1 + W_2$. Neka je $x \in W$ proizvoljan vektor. Postoje vektori $x_1 \in W_1$ i $x_2 \in W_2$ tako da je $x = x_1 + x_2$. Tada $x_1 \in \text{Lin}\{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\} \subseteq \text{Lin}(B)$ i $x_2 \in \text{Lin}\{v_1, \ldots, v_m, v_{n+1}, \ldots, v_k\} \subseteq \text{Lin}(B)$. Kako je linearni omotač sistema vektora potprostor, slijedi $x = x_1 + x_2 \in \text{Lin}(B)$.

Preostaje da se pokaže da je sistem vektora B linearno nezavisan. Neka je

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_j + \sum_{j=m+1}^{n} \beta_j v_j + \sum_{j=n+1}^{k} \gamma_j v_j = \theta \text{ i} \tag{1.3}$$

$$u = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_j, \quad v = \sum_{j=m+1}^{n} \beta_j v_j, \quad w = \sum_{j=n+1}^{k} \gamma_j v_j.$$

Prema (1.3) je $u + v + w = \theta$. Slijedi $u + v = -w$. Kako $u + v \in W_1$, iz prethodne jednakosti imamo $-w \in W_1$, tj. $w \in W_1$. Kako $w \in W_2$, možemo zaključiti da $w \in W_1 \cap W_2$. Dakle, vektor w možemo razložiti po bazi potprostora $W_1 \cap W_2$, tj. po sistemu $\{v_1, \ldots, v_m\}$. Dakle, $w \in \mathrm{Lin}\{v_1, \ldots, v_m\}$ i $w \in \mathrm{Lin}\{v_{n+1}, \ldots, v_k\}$. Kako je presjek ova dva linearna omotača samo nula-vektor, mora biti $w = \theta$, pa imamo $\gamma_m = \cdots = \gamma_k = 0$. Sada se jednakost (1.3) svodi na

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_j + \sum_{j=m+1}^{n} \beta_j v_j = \theta.$$

Kako je $\{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ baza za W_1, slijedi $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = \beta_{m+1} = \cdots = \beta_n = 0$. Ovim je pokazana linearna nezavisnost sistema B. □

Teorema 1.7.8. *Potprostor $W = W_1 + W_2$ je direktna suma potprostora W_1 i W_2, ako i samo ako je $W_1 \cap W_2 = \{\theta\}$. Pri tome je $\dim W = \dim W_1 + \dim W_2$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $W = W_1 \oplus W_2$. Tada je $\theta = \theta + \theta$ jedinstveno predstavljanje vektora $\theta \in W$ u obilku sume dva vektora koji pripadaju W_1 i W_2. Neka je $x \in W_1 \cap W_2$. Za $x_1 = x$ i $x_2 = -x$ imamo $x_1 \in W_1$, $x_2 \in W_2$ i $x_1 + x_2 = \theta$, pa zbog jedinstvenosti predstavljanja vektora $\theta \in W$, zaključujemo da mora biti $x_1 = x_2 = \theta$, pa je $x = \theta$. Dakle, $W_1 \cap W_2 = \{\theta\}$.

Obrnuto, ako je presjek W_1 i W_2 trivijalan potprostor, pokazaćemo da je tada njihova suma direktna. Naime neka je $z \in W$ proizvoljan vektor i neka je $z = x_1 + x_2$ i $z = y_1 + y_2$, gdje je $x_1, y_1 \in W_1$ i $x_2, y_2 \in W_2$. Tada je $x_1 - y_1 = y_2 - x_2$. Prvi vektor pripada W_1, a drugi W_2. Dakle, oba vektora pripadaju potprostoru $W_1 \cap W_2$. Kako je presjek ova dva potprostora trivijalan, mora biti $x_1 - y_1 = \theta$ i $y_2 - x_2 = \theta$, tj. $x_1 = y_1$ i $x_2 = y_2$. Dakle, predstavljanje svakog vektora u $W_1 + W_2$ je zaista jedinstveno.

Upravo smo vidjeli da ako je $W = W_1 \oplus W_2$, tada mora biti $W_1 \cap W_2 = \{\theta\}$. Kako je tada $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$, to iz Teoreme 1.7.7 slijedi da $\dim W = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$. □

Prethodna teorema se može uopštiti na slučaj direktne sume više potprostora. Dokaz naredne teoreme je analogan dokazu Teoreme 1.7.8, pa ga ostavljamo čitaocu.

Teorema 1.7.9. *Neka je potprostor W suma potprostora $W_1, W_2, \ldots, W_m$. Suma $W = W_1 + W_2 + \cdots + W_m$ je direktna, ako i samo ako važi*

$$W_i \cap \sum_{j=\overline{1,m},\, j \neq i} W_j = \{\theta\}, \quad \forall i = \overline{1,m}.$$

Ako je suma direktna, tada je $\dim W = \dim W_1 + \dim W_2 + \cdots + \dim W_m$.

Definicija 1.7.10. Ako je vektorski prostor V direktna suma svojih potprostora W_1 i W_2, tada kažemo da su W_1 i W_2 komplementarni potprostori u V, odnosno da je potprostor W_1 direktna dopuna potprostora W_2 (i obrnuto: da je W_2 direktna dopuna W_1).

Teorema 1.7.11. *Svaki potprostor ima direktnu dopunu.*

Dokaz. Neka je W netrivijalni potprostor u V, $\dim W = m$ i $\dim V = n$. Neka je dalje $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ baza u W. Ovaj sistem možemo dopuniti do baze $\{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ prostora V. Neka je W' potprostor u V čija je baza sistem vektora $\{v_{m+1}, v_{m+2}, \ldots, v_n\}$. Pokazaćemo da je W' direktna dopuna za W. Naime, neka je $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$ proizvoljan vektor u V. Tada $x_1 = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j v_j$ pripada W_1, a $x_2 = \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j v_j$ pripada W_2, pri čemu je $x = x_1 + x_2$. Dakle, $V = W_1 + W_2$. Suma je direktna jer je presjek W i W' trivijalan potprostor, budući da je riječ o presjeku linearnih omotača $\mathrm{Lin}\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ i $\mathrm{Lin}\{v_{m+1}, v_{m+2}, \ldots, v_n\}$, gdje može biti samo nula-vektor. Dakle, imamo $V = W \oplus W'$. $\square$

Zadatak 1.7.12. Pokazati da komplementaran potprostor nije jedinstven, osim u slučaju trivijalnog potprostora.

Glava 2

Matrice

2.1 Definicija. Operacije nad matricama.

Definicija 2.1.1. Matricom nad poljem $\mathbb{P}$ naziva se tablica formata $m \times n$ elemenata iz polja $\mathbb{P}$.

Oznaka: $A \in \mathbb{P}^{m \times n}$ označava da matrica A nad poljem $\mathbb{P}$ sadrži m vrsta i n kolona.

Matricu $A \in \mathbb{P}^{n \times n}$ koja sadrži isti broj vrsta i kolona ćemo nazivati kvadratnom. U suprotnom, matricu ćemo nazivati pravougaonom.

Uvedimo sada tri osnovne operacije nad matricama.

1. Množenje matrice brojem

Neka je $\alpha \in \mathbb{P}$, $A \in \mathbb{P}^{m \times n}$. Matricu A možemo pomnožiti brojem α na sljedeći način:

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. Sabiranje matrica istog formata

Neka su A i B matrice istog formata, $A, B \in \mathbb{P}^{m \times n}$. Tada možemo uvesti operaciju sabiranja ovih matrica na sljedeći način:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matrica $A + B$ takođe pripada $\mathbb{P}^{m \times n}$.

Očigledno, operacija sabiranja matrica je komutativna i asocijativna (ovo slijedi iz komutativnosti i asocijativnosti operacije sabiranja u polju $\mathbb{P}$).

Naglasimo da, ukoliko matrice nisu istog formata, operacija sabiranja nije definisana.

3. Množenje dvije matrice

Proizvod $A \cdot B$ je definisan samo ako je broj kolona matrice A jednak broju vrsta matrice B. Dakle, neka je

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^{m\times n} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^{n\times k}.$$

Tada je proizvod $A \cdot B \in P^{m\times k}$ matrica definisana na sljedeći način:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^n a_{1i}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n a_{1i}b_{ik} \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^n a_{2i}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n a_{2i}b_{ik} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}b_{i1} & \sum_{i=1}^n a_{mi}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n a_{mi}b_{ik} \end{pmatrix}.$$

Primjedba 2.1.2. Znak $\sum_{i=1}^n$ označava sumu n elemenata. Na primjer,

$$\sum_{i=1}^n a_{1i}b_{i1} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$$

.

Između ostalog, razmotrimo množenje vektora matricom. Neka je $A \in \mathbb{P}^{m\times n}, b \in \mathbb{P}^n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad Ab = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}b_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}b_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}b_i \end{pmatrix}.$$

Vidimo da $Ab \in \mathbb{P}^m$.

Još jednom naglasimo da je proizvod $C \cdot D$ matrica $C \in \mathbb{P}^{p\times q}$ i $D \in \mathbb{P}^{r\times s}$ definisan samo u slučaju kada $q = r$.

Primjer 2.1.3. Neka su date matrice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 & -3 \\ -2 & -5 & 1 & -1 \\ -5 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -1 & 2 \\ 5 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 2}.$$

Tada je njihov proizvod:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 37 & 49 \\ -9 & -19 \\ -21 & -22 \end{pmatrix}.$$

Primijetimo da u ovom slučaju proizvod $B \cdot A$ nije definisan.

Zadatak 2.1.4. Da li je skup $\mathbb{R}^{n\times n}$ svih realnih kvadratnih matrica formata n sa operacijom množenja grupa?

Zadatak 2.1.5. Pokazati da operacija množenja na skupu kvadratnih matrica nije komutativna. Za ovo je potrebno navesti primjer dvije kvadratne matrice A i B, takve da $A\cdot B \neq B\cdot A$.

Primjedba 2.1.6. Operacija množenja matrica je asocijativna. Za $A \in \mathbb{P}^{k\times m}$, $B \in \mathbb{P}^{m\times n}$ i $C \in \mathbb{P}^{n\times l}$ važi

$$(AB)C = A(BC).$$

Zaista, neka je $AB = U \in \mathbb{P}^{k\times n}$, $BC = V \in \mathbb{P}^{m\times l}$, $L = UC = (AB)C \in \mathbb{P}^{k\times l}$ i $D = AV = A(BC) \in \mathbb{P}^{k\times l}$. Tada je

$$\begin{aligned} l_{ij} &= \sum_{s=1}^{n} u_{is}c_{sj} = \sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{it}b_{ts}\right)c_{sj} \\ &= \sum_{s=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{it}b_{ts}c_{sj} = \sum_{j=1}^{m} a_{it}\left(\sum_{s=1}^{n} b_{ts}c_{sj}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{m} a_{it}v_{tj} = d_{ij}, \quad i = \overline{1,k},\ j = \overline{1,l} \end{aligned}$$

2.2 Sistem linearnih jednačina. Metod Gausa

U ovoj sekciji ćemo kratko razmotriti jedan metod rješavanja sistema m linearnih jednačina sa n nepoznatih. Detaljnije ćemo se ovim zadatkom baviti u sljedećem Poglavlju.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.1}$$

Matricom ovog sistema nazovimo sljedeću matricu:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Vektor $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ nazovimo vektorom desne strane, a vektor $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vektorom nepoznatih promjenljivih.

Znajući operaciju množenja matrica i, između ostalog, množenja vektora matricom, sada zadatak (2.1) možemo zapisati kraće, u vektorskom obliku na sljedeći način:

$$AX = b. \tag{2.2}$$

2.2.1 Metod Gausa

Posmatrajmo proširenu matricu sistema (2.1) $(A|b)$:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Pretpostavimo da je $a_{11} \neq 0$. Prvu vrstu pomnoženu sa $-\frac{a_{21}}{a_{11}}, \dots, -\frac{a_{m1}}{a_{11}}$ dodajemo respektivno drugoj, trećoj, ..., $m-$toj vrsti, dobijamo:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \widetilde{a_{22}} & \dots & \widetilde{a_{2n}} & \widetilde{b_2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \widetilde{a_{m2}} & \dots & \widetilde{a_{mn}} & \widetilde{b_m} \end{array}\right).$$

Pod pretpostavkom da je $\widetilde{a_{22}} \neq 0$, ponavljamo postupak sve dok ne dobijemo tzv. stepenasti oblik matrice (u svakoj novoj vrsti ispred prvog nenultog elementa postoji jedna bar jedna nula više nego u prethodnoj vrsti), tj.:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \widetilde{a_{22}} & \dots & \widetilde{a_{2n}} & \widetilde{b_2} \\ 0 & 0 & \dots & \widetilde{\widetilde{a_{2n}}} & \widetilde{\widetilde{b_2}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \widetilde{\widetilde{\widetilde{a_{mn}}}} & \widetilde{\widetilde{\widetilde{b_m}}} \end{array}\right).$$

U slučaju da se u nekom momentu dogodi da $\widetilde{a_{ii}} = 0$, to ćemo vrstu i zamijeniti sa nekom od donjih vrsta $j > i$, takvom da $\widetilde{a_{ji}} \neq 0$. Ukoliko se dogodi situacija da svi $a_{ji} = 0$, $j \geq i$, to prelazimo na sljedeću kolonu. Na ovaj način uvijek svodimo matricu na stepenasti oblik, što se jasno vidi iz narednih primjera.

Primjer 2.2.1. Neka je dat sistem jednačina:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -3 \\ x_1 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

Svedimo matricu sistema na trougaoni oblik:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right) \to Iv \cdot (-\frac{1}{2}) + IIv; Iv \cdot (-1) + IIIv \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to IIv \cdot (-6) + IIIv \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -19 & -8 \end{array}\right).$$

Odavde nalazimo da je $-19x_3 = -8$, tj. $x_3 = \frac{8}{19}$. Uvrstimo ovo u drugu jednačinu i dobijamo $\frac{1}{2}x_2 + \frac{5}{2}\frac{8}{19} = \frac{3}{2}$ odakle imamo $x_2 = \frac{17}{19}$. Iz prve jednačine $2x_1 - x_2 + 3x_3 = -3$ zamjenom konkretnih vrijednosti za x_2 i x_3 dobijamo da je $x_1 = -\frac{32}{19}$. Na ovaj način smo našli rješenje sistema linearnih jednačina koristeći metod Gausa.

Primjer 2.2.2. Neka je dat sistem jednačina:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 5 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 - 5x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 3x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Svedimo matricu sistema na trougaoni oblik:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -3 & -1 & 5 \\ 3 & 3 & -1 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \rightarrow Iv \cdot (-\frac{3}{2}) + IIv; Iv \cdot (-\frac{1}{2}) + IIIv; Iv \cdot (-2) + IVv \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & -\frac{13}{2} \\ 0 & -2 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & -4 & 3 & -1 & -10 \end{array}\right) \rightarrow IIIv\cdot(-2)+IVv; IIv \leftrightarrow IIIv \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & -\frac{13}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right).$$

Na osnovu posljednje matrice zaključujemo da sistem nema rješenje.

Primjer 2.2.3. Neka je dat sistem jednačina:

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_3 = -1 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Svedimo matricu sistema na trougaoni oblik:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Zamijenićemo mjesta prve i druge vrste, a onda prvu vrstu pomnoženu sa -3 dodajemo drugoj, pa zatim pomnoženu sa -4 trećoj, dobijamo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -7 & 4 \\ 0 & -3 & -7 & 4 \end{array}\right) \rightarrow IIv \cdot (-1) + IIIv \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Odavde zaključujemo da je $-3x_2 - 7x_3 = 4$, tj. $x_2 = -\frac{7}{3}x_3 - \frac{4}{3}$, a iz prve jednačine imamo $x_1 + 2x_3 = -1$, tj $x_1 = -1 - 2x_3$. Opšte rješenje sistema je

$$\begin{pmatrix} -1 - 2x_3 \\ -\frac{7}{3}x_3 - \frac{4}{3} \\ x_3 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{R}.$$

Metod Gausa je algoritam rješavanja sistema linearnih jednačina, putem svođenja matrice na stepenasti oblik. Pri tome se koriste tri operacije nad vrstama matrice:

1. množenje jedne vrste brojem $\lambda \neq 0$;
2. zamjena dvije vrste mjestima;
3. dodavanje jedne vrste, pomnožene brojem α, drugoj vrsti.

Ove tri operacije nad vrstama nazivamo *elementarnim transformacijama vrsta.*

Osim elementarnih transformacija vrsta, mogu se razmotriti i elementarne transformacije kolona matrice. Koristeći elementarne transformacije i vrsta i kolona, matrica se može svesti na veoma prost oblik.

Teorema 2.2.4. *Neka je $A \in \mathbb{P}^{m\times n}$. Elementarnim transformacijama vrsta i kolona matrica A se može svesti na sljedeći oblik:*

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

gdje je G matrica formata $m \times n$, na čijoj glavnoj dijagonali stoji $r \leq m$ jedinica i $m - r$ nula, a svi ostali elementi matrice su jednaki nuli.

Dokaz se može sprovesti indukcijom. Umjesto strogog dokaza, ovdje ćemo navesti primjer koji ilustruje postupak svođenja.

Primjer 2.2.5.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 0 \\ -4 & -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to Iv \cdot (-\frac{3}{2}) + IIv; Iv \cdot 2 + IIIv \to \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -7 & 3 \end{pmatrix} \to$$

$$\to Ik \cdot (-1) + IIk; Ik \cdot \frac{3}{2} + IIIk; Ik \cdot (-\frac{1}{2}) + IVk \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -7 & 3 \end{pmatrix} \to$$

$$\to IIv \cdot 2 + IIIv; IIk \leftrightarrow IIIk \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to IIk \cdot \frac{3}{7} + IVk \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to Ik \cdot \frac{1}{2}; IIk \cdot \frac{2}{7} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.3 Determinanta kvadratne matrice

Na početku se podsjetimo pojma permutacije konačnog skupa.

Skup K' se naziva permutacijom konačnog skupa $K = \{1, 2, \ldots, n\}$ ako je K' dobijen iz K zamjenom elemenata mjestima. Prostom permutacijom se naziva skup u kome su samo dva elementa zamijenila mjesta. Skup od n elemenata ukupno ima $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$ permutacija.

Skup K' se naziva parnom permutacijom skupa K, ako se on može dobiti putem parnog broja prostih permutacija elemenata iz skupa K. U suprotnom, skup se naziva neparnom permutacijom, ako nam treba neparan broj takvih permutacija.

Sada uvedimo pojam determinante kvadratne matrice $A \in \mathbb{P}^{n\times n}$. Izaberimo n elemenata matrice A, tako da bude tačno po jedan iz svake vrste i kolone i formirajmo prozivod oblika: $a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$, gdje je $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Na ovaj način možemo formirati $n!$ različitih proizvoda. Dalje, saberimo svih $n!$ proizvoda, pri čemu ćemo svaki proizvod uzeti sa odgovarajućim znakom. Pravilo određivanja znaka svakog od proizvoda je sljedeće: ukoliko je permutacija $i_1, i_2, \ldots, i_n$ parna, taj proizvod će ući sa znakom plus, ukoliko je neparna, proizvod će ući sa znakom minus.

Dobijeni zbir od $n!$ sabiraka, uzetih sa odgovarajućim znakovima, se naziva *determinantom* kvadratne matrice $A \in \mathbb{P}^{n\times n}$.

Oznaka: $\det A$ ili $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ili $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Primjetimo da je determinanta matrice element polja $\mathbb{P}$. Determinantu imaju samo kvadratne matrice i nema smisla govoriti o determinanti pravougaone matrice, tj. matrice koja ima različit broj vrsta i kolona.

Primjer 2.3.1. (i) Neka je $A = (a_{11}) \in \mathbb{P}^{1\times 1}$ matrica formata 1×1. Tada $\det A = a_{11}$.

(ii) Neka je $A \in \mathbb{P}^{2\times 2}$. Tada, saglasno definiciji:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

(iii) Neka je $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^{3\times 3}$. Tada je

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\pi \in Skup\, permutacija\{1,2,3\}} sgn(\pi) a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}.$$

U ovom slučaju determinanta matrice će biti jednaka zbiru $3! = 6$ proizvoda. Označimo sa $\pi_1, \ldots, \pi_6$ sve permutacije skupa $\{1, 2, 3\}$, sa $P(\pi_j)$ broj inverzija u permutaciji π_j. Znak (parnost) permutacije π_j je $(-1)^{P(\pi_j)}$.

$\pi_1 : 1 \quad 2 \quad 3 \quad P(\pi_1) = 0 \Rightarrow \text{sgn}\pi_1 = (-1)^0 = 1;$

$\pi_2 : 1 \quad 3 \quad 2 \quad P(\pi_2) = 1 \Rightarrow \text{sgn}\pi_2 = (-1)^1 = -1;$

$\pi_3 : 2 \quad 1 \quad 3 \quad P(\pi_3) = 1 \Rightarrow \mathrm{sgn}\pi_3 = (-1)^1 = -1;$
$\pi_4 : 2 \quad 3 \quad 1 \quad P(\pi_4) = 2 \Rightarrow \mathrm{sgn}\pi_4 = (-1)^2 = 1;$
$\pi_5 : 3 \quad 1 \quad 2 \quad P(\pi_5) = 2 \Rightarrow \mathrm{sgn}\pi_5 = (-1)^2 = 1;$
$\pi_6 : 3 \quad 2 \quad 1 \quad P(\pi_6) = 3 \Rightarrow \mathrm{sgn}\pi_6 = (-1)^3 = -1.$
Konačno, imamo:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Primjer 2.3.2. Odredimo determinantu matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Determinanta ove matrice se dobija sabiranjem $3! = 6$ proizvoda. Računajući parnost svake od permutacija, dobijamo:

$$\det A = 1\cdot 2\cdot 3 + 0\cdot(-1)\cdot(-1) + 7\cdot 0\cdot(-1) - (-1)\cdot 2\cdot 7 - 0\cdot 0\cdot 3 - (-1)\cdot(-1)\cdot 1 = 19.$$

Neka je $A = (a_{ij}) \in \mathbb{P}^{n\times n}$. Sa $\widetilde{A_{ij}} \in \mathbb{P}^{(n-1)\times(n-1)}$ označimo matricu dobijenu iz A izbacivanjem $i-$te vrste i $j-$te kolone.

Teorema 2.3.3. *Determinanta kvadratne matrice A se može izračunati razlaganjem po bilo kojoj vrsti, tj. važi:*

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} \det \tilde{A}_{jk}, \quad j = \overline{1,n}.$$

Dokaz. Neka je Π_j skup svih permutacija π kod kojih je $\pi(j) = k$, tj. kod kojih na poziciji j stoji element k. Ako se izostavi k na poziciji j tada se dolazi do permutacije π' skupa $\{1, 2, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n\}$ pri čemu vazi $\mathrm{sgn}(\pi') = (-1)^{|k-j|}\mathrm{sgn}(\pi) = (-1)^{k+j}\mathrm{sigh}(\pi)$ jer da bi element k doveli do pozicije j potrebrno je da izvedemo $|k-j|$ zamjena mjesta. Parnost broja $|k-j|$ je ista kao parnost broja $j+k$. Dakle, imamo

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\sigma} (-1)^{\mathrm{sign}(\pi)} a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\pi\in\Pi_j} (-1)^{j+k+\mathrm{sgn}(\pi')} a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{jk}\cdots a_{ni_n} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} \sum_{\pi\in\Pi_j} (-1)^{\mathrm{sgn}(\pi')} a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} \det \tilde{A}_{jk} \end{aligned}$$

□

Definicija 2.3.4. Broj $(-1)^{i+j}\cdot\det\widetilde{A_{ij}}$ naziva se algebarskom dopunom elementa a_{ij}.

Primjer 2.3.5. Odredimo determinantu matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ razvijajući je po drugoj vrsti:

$$\begin{aligned} \det A &= -0\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + 2\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - (-1)\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= -0\cdot 7 + 2\cdot 10 + 1\cdot(-1) = 19. \end{aligned}$$

2.3.1 Geometrijski smisao determinante

(A) Razmotrimo dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ u geometrijskom prostoru V^2. Izaberimo standardnu bazu $\{e_1, e_2\}$ u V^2. Tada se $\vec{a}$ i $\vec{b}$ razlažu po bazi: $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$, $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2$.

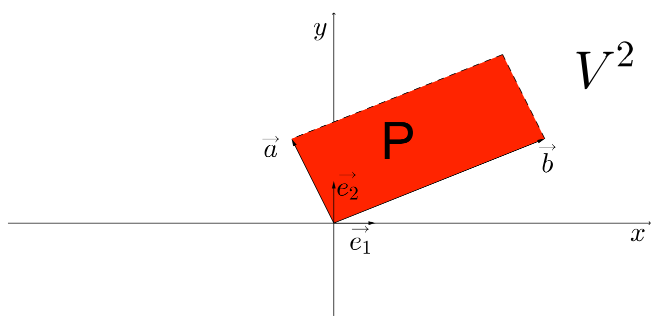
Označimo sa P površinu paralelograma koji je navučen na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Tada:

$$P = |\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}|.$$

Dakle, kako bi se izračunala površina paraleleograma koji je navučen na dva vektora, dovoljno je koordinate tih vektora uvrstiti u vrste matrice i izračunati determinantu dobijene matrice formata 2×2. Istina, determinanta matrice može biti negativnom, zato će površina biti apsolutna vrijednost determinante.

Primijetimo da površina zavisi od izbora baze. Kada se govori o površini obično se podrazumijeva da je izabrana standardna baza $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, ako nije naglašeno drugačije.

Primjer 2.3.6. Izračunaćemo površinu paralelograma navučenog na vektore $\vec{a} = (-1,\ 2)$ i $\vec{b} = (5,\ 2)$. Imamo:



Slika 2.1

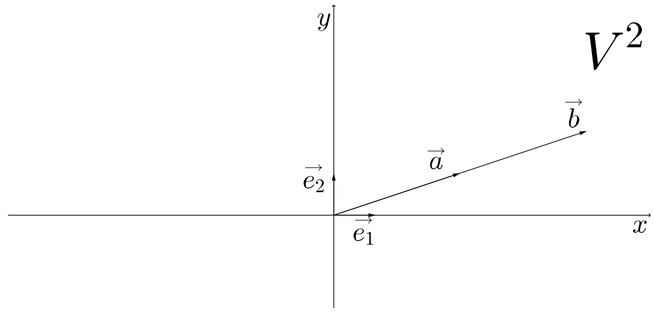
$$P = |\det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}| = |-2-10| = 12.$$

Primjer 2.3.7. Izračunati površinu paralelograma navučenog na vektore $\vec{a} = (3,\ 1)$ i $\vec{b} = (6,\ 2)$. Lako je provjeriti da je tražena površina nula. Ovo je bilo očekivano, s obzirom da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni.

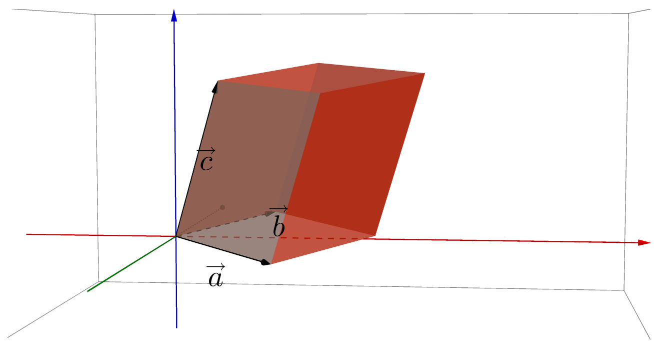
(B) U geometrijskom trodimenzionalnom prostoru V^3 paralelopiped je geometrijsko tijelo navučeno na tri vektora: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ i $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Uvrstivši koordinate ovih vektora u vrste matrice, možemo izračunati zapreminu V ovog paralelopipeda:

$$V = |\det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}|.$$

Na Slici 2.3 je prikazan paralelogram navučen na vektore $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$.



Slika 2.2



Slika 2.3

Primjer 2.3.8. Izračunaćemo zapreminu paralelopipeda navučenog na vektore $\vec{a} = (3, 0, -6)$, $vecb = (1, -3, -2)$, i $\vec{c} = (1, 6, -2)$.

Uvrstimo koordinate vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ u vrste matrice i nađimo determinantu:

$$V = |\det \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 6 & -2 \end{pmatrix} | = 0.$$

Dobijeni rezultat je očekivan, ako uočimo da su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarni (linearno zavisni). Pošto leže u istoj ravni, paralelopiped koji je navučen na njih je, u stvari, paralelogram i zapremina mu je nula.

(C) Iako se naša geometrijska intuicija završava na trodimenzionalnom geometrijskom prostoru, moguće je razmotriti zapreminu apstraktnog paralelopipeda u geometrijskom prostoru R^n. Ovaj paralelopiped je navučen na n vektora: $\vec{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots a_{1n})$, $\vec{a}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots a_{2n})$, $\dots, \vec{a}_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn})$. Očekivano, zapremina ovog apstraktnog n-dimenzionalnog paralelopipeda se može izračunati pomoću determinante:

$$V = |\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} |.$$

Sada već možemo pogoditi da će ova zapremina biti jednaka nuli, ako su vektori-vrste $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ linearno zavisni.

2.3.2 Svojstva determinante

Nakon ovih geometrijskih ilustracija pojma determinante, vratimo se algebarskim razmatranjima. Najprije ćemo navest dva jednostavna tvrđenja o determinanti matrice koja direktno slijede iz same definicije determinante.

Lema 2.3.9. *Ako matrica A sadrži vrstu koja se sastoji isključivo od nula, tada je* $\det A = 0$.

Lema 2.3.10. *Neka je matrica B dobijena iz A množenjem jedne vrste brojem λ. Tada je* $\det B = \lambda \cdot \det A$.

Lema 2.3.11. *Ako matrica $A \in \mathbb{P}^{n\times n}$, $n \geq 2$, sadrži dvije identične vrste, tada je* $\det A = 0$.

Dokaz. Dokaz ćemo izvesti indukcijom po formatu matrice.

Neka je $A \in \mathbb{P}^{2\times 2}$ matrica sa dvije iste vrste. Tada je $\det \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = 0$, prema samoj definiciji.

Pretpostavimo da tvrđenje važi za matricu formata $(n-1)\times(n-1)$. Pretpostavimo da je $n \geq 3$ i da je A matrica formata $n \times n$, koja ima dvije iste vrste. Pošto A sadrži $n \geq 3$ vrste, to možemo izabrati neku vrstu i koja nije jedna od dvije iste vrste. Razložimo determinantu matrice A po toj vrsti i:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det \widetilde{A_{ij}}. \tag{2.3}$$

Pošto A sadrži dvije iste vrste, to sve matrice $\widetilde{A_{ij}}$ (formata $(n-1)\times(n-1)$) sadrže dvije iste vrste. Po pretpostavci indukcije slijedi da je $\det \widetilde{A_{ij}} = 0$. Sada možemo zaključiti da u (2.3) imamo sumu od n sabiraka od kojih je svaki jednak nuli, pa je $\det A = 0$. □

U daljem tekstu ćemo zbog jednostavnosti sa $a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$, $i = \overline{1,n}$ označavati $i-$tu vrstu matrice A.

Teorema 2.3.12. *Determinanta matrice $A \in \mathbb{P}^{n\times n}$ je linearna funkcija svake vrste, tj. važi*

$$\det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ \alpha u + \beta v \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \alpha \cdot \det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ u \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \beta \cdot \det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{i-1} \\ v \\ a_{i+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{P}, i = \overline{1,n}.$$

Dokaz. Neka je A matrica formata $n \times n$ sa vrstama $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i pretpostavimo da je $a_i = \alpha u + \beta v$, gdje su u i v vrste $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ i $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$. Označimo sa B i C matrice dobijene iz A tako što je vrsta a_i zamjenjena vrstom u i v, respektivno. Treba dokazati da je:

$$\det A = \alpha \cdot \det B + \beta \cdot \det C.$$

Kako su matrice $\widetilde{A_{ij}}, \widetilde{B_{ij}}$ i $\widetilde{C_{ij}}$ iste, razlažući determinantu A po $i-$toj vrsti dobijamo traženo tvrđenje:

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}(\alpha u_i + \beta v_i)\det\widetilde{A_{ij}} = \alpha\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}u_i\det\widetilde{B_{ij}} + \beta\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}v_i\det\widetilde{C_{ij}}\\ &= \alpha\cdot\det B + \beta\cdot\det C.\end{aligned}$$

□

Posljedica 2.3.13. *Neka je matrica B dobijena zamjenom mjestima dvije vrste u matrici A. Tada je* $\det A = -\det B$.

Dokaz. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vrste u matrici A i neka se B dobija zamjenom mjesta vrsta a_i i a_j, tj. neka je $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. Posmatrajmo matricu C dobijenu iz A zamjenom vrsta a_i i a_j sa vrstom $a_i + a_j$, tj. neka je $C = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. Determinanta matrice

C je 0, jer ima dvije iste vrste, dakle:

$$\begin{aligned}
0 = \det C = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \\
&= 0 + \det A + \det B + 0.
\end{aligned}$$

Odavde imamo da je $\det A + \det B = 0$, tj. $\det A = -\det B$, što je i trebalo dokazati. □

Posljedica 2.3.14. *Neka je matrica B dobijena dodavanjem jedne vrste matrice A, pomnožene brojem α, drugoj vrsti matrice A. Tada je* $\det A = \det B$.

Dokaz. Neka su $a_1, a_2, \dots, a_n$ vrste u matrici A i neka je matrica B dobijena dodavanjem vrste a_i, pomnožene sa α, vrsti a_j u A, tj. neka je $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j + \alpha a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. Tada je

$$\det B = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j + \alpha a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \alpha \cdot \det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det A + \alpha \cdot 0 = \det A.$$

□

Posljedica 2.3.15. *Ukoliko su vrste matrice A linearno zavisne tada je* $\det A = 0$.

Dokaz. Neka su $a_1, a_2, \dots, a_n$ vrste u matrici A. Tada se u matrici A jedna vrsta može izraziti kao linearna kombinacija ostalih. Neka je vrsta a_r linearna kombinacija ostalih, tj. neka je $a_r = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{r-1} a_{r-1} + \alpha_{r+1} a_{r+1} + \cdots + \alpha_n a_n$. Formirajmo matricu B na sljedeći način: vrsti a_r dodajmo vrstu a_1 pomnoženu sa $-\alpha_1$, vrstu a_2 pomnoženu sa $-\alpha_2$,...,vrstu a_{r-1} pomnoženu sa $-\alpha_{r-1}$, vrstu a_{r+1} pomnoženu sa $-\alpha_{r+1}$,..., vrstu a_n pomnoženu sa $-\alpha_n$. Determinante matrica A i B su jednake po Posljedici 2.3.14 Imamo:

$$\det A = \det B = \det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{r-1} \\ a_r - \alpha_1 a_1 - \cdots - \alpha_{r-1} a_{r-1} - \alpha_{r+1} a_{r+1} - \cdots - \alpha_n a_n \\ a_{r+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0$$

jer u B imamo vrstu u kojoj su sve nule. □

Primjer 2.3.16. Posmatrajmo matricu: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & 2 \\ 1 & -18 & -3 \end{pmatrix}$. Vrste ove matrice su $a_1 = (1, 3, 3)$, $a_2 = (0, 7, 2)$ i $a_3 = (1, -18, -3)$. Kako je $a_3 = a_1 - 3a_2$, imamo $\det A = 0$.

2.4 Matrice elementarnih transformacija

Neka je zadata matrica $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^{m \times n}$. U ovoj sekciji ćemo se baviti transformacijama vrsta matrice A. Razlikovaćemo elementarne transformacije vrsta tri tipa:

1. tip: množenje jedne vrste matrice A brojem $\lambda \neq 0$;
2. tip: zamjena dvije vrste matrice A mjestima;
3. tip: dodavanje jedne vrste matrice A, pomnožene brojem α, drugoj vrsti.

Napomenimo da metod Gausa, svođenje matrice na stepenasti oblik, se sastoji od konačnog broja elementarnih transformacija vrsta matrice A.

Sada ćemo pokazati da se elementarne transformacije vrsta mogu dobiti množenjem matrice A nekim kvadratnim matricama. Te matrice ćemo nazivati *matricama elementarnih transformacija.*

1. tip: Matrica elementarne transformacije množenja vrste brojem $\lambda \neq 0$.

Označimo sa E_a kvadratnu dijagonalnu matricu formata $m \times m$, na čijoj dijagonali su sve jedinice, osim r-te vrste, gdje se nalazi broj λ, tj.

$$E_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Pomnožimo matricu $A \in \mathbb{P}^{m\times n}$ matricom $E_a \in \mathbb{P}^{m\times m}$ sa lijeve strane:

$$E_aA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{r1} & \lambda a_{r2} & \dots & \lambda a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Vidimo da je proizvod ove dvije matrice matrica dobijena iz A množenjem r-te vrste brojem λ.

Primijetimo da je $\det E_a = \lambda \neq 0$.

2. tip: Matrica elementarne transformacije zamjene dvije vrste mjestima.

Označimo sa E_b kvadratnu matricu formata $m \times m$ u kojoj u svakoj vrsti stoji tačno po jedna jedinica. Pri tome u svim vrstama, osim r-te i s-te, jedinice stoje na dijagonali, dok u vrsti r jedinica stoji u s-toj koloni, a u vrsti s u r-toj koloni:

$$E_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Pomnožimo matricu A matricom E_b sa lijeve strane:

$$E_bA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Vidimo da je proizvod E_bA matrica dobijena iz A zamjenom vrsta r i s mjestima.

Primijetimo da $\det E_b = -1$.

3. tip: Dodavanje jedne vrste, pomnožene brojem α, drugoj vrsti.

Označimo sa E_c kvadratnu matricu formata m u kojoj na dijagonali stoje sve jedinice, ostalo su nule, osim elementa na poziciji r, s, koji je jednak α:

$$E_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Pomnožimo matricu A matricom E_c sa lijeve strane:

$$E_cA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} + \alpha a_{r1} & a_{s2} + \alpha a_{r2} & \dots & a_{sn} + \alpha a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Vidimo da je proizvod E_cA matrica dobijena iz A dodavanjem vrste r, pomnožene brojem α, vrsti s.

Primijetimo da $\det E_c = 1$.

Primjer 2.4.1. Neka je data matrica $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 6 & -5 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$. Pretpostavimo da je u matrici A potrebno prvoj vrsti dodati drugu, pomnoženu brojem 2. Formirajmo matricu E_c elementarnih transormacija trećeg tipa: $E_c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Rezultat proizvoda E_cA je upravo matricu koju smo tražili. $E_cA = \begin{pmatrix} 13 & -7 & 5 & 4 \\ 6 & -5 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Napomena 2.4.2. Prilikom rješavanja sistema linearnih jednačina smo koristili metod Gausa. Sada vidimo da se metod Gausa svođenja matrice $A \in \mathbb{P}^{m\times n}$ na stepenasti oblik može zapisati kao množenje matrice A matricama elementarnih transformacija sa lijeve strane.

Primjedba 2.4.3. Množenje matrice A matricama elementarnih transformacija sa desne strane odgovara elementarnim transformacijama kolona.

Zadatak 2.4.4. Zadata je matrica $A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 8 & 4 \\ 4 & -5 & 0 & 2 \\ 1 & -11 & 0 & 7 \end{pmatrix}$. Zapisati matrice elementarnih transformacija $E_1, E_2, \dots, E_m$ kojima je potrebno pomnožiti A s lijeve strane kako bi se matrica A svela na stepenasti oblik.

2.5 Obratna matrica

U ovoj Sekciji ćemo nastaviti da se bavimo isključivo kvadratnim matricama iz $\mathbb{P}^{n\times n}$.

Definicija 2.5.1. Matrica $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^{n\times n}$ na čijoj dijagonali se nalaze jedinice, a izvan dijagonale nule, se naziva jediničnom matricom.

Definicija 2.5.2. Neka je $A \in \mathbb{P}^{n\times n}$. Ako postoji matrica $Q \in \mathbb{P}^{n\times n}$ takva da je

$$Q \cdot A = A \cdot Q = I,$$

tada ćemo Q nazivati obratnom (ili inverznom) matricom matrice A.

Matricu koja ima obratnu ćemo nazivati invertibilnom.

Oznaka: Obratna matrica za matricu A se označava A^{-1}.

Teorema 2.5.3. *Matrice elementarnih transformacija su invertibilne i njihove obratne matrice su matrice elementarnih transformacija istog tipa.*

Dokaz. Dokaz ćemo izvesti tako što ćemo za svaki od tri tipa matrica elementarnih transformacija neposredno naći njihove obratne matrice.

(i) Razmotrimo najprije matricu E_a elementarnih transformacija prvog tipa. Imamo

$$E_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad E_a^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \frac{1}{\lambda} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Neka je E_b matrica elementarnih transformacija drugog tipa, tj. zamjene dvije vrste mjestima. Tada je lako provjeriti da $E_b = E_b^{-1}$.

(iii) Konačno, razmotrimo matricu elementarnih transformacija trećeg tipa. Imamo

$$E_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad E_c^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\alpha & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Na ovaj način je pokazano da su matrice elementarnih transformacija invertibilne. Vidimo da su obratne matrice $E_a^{-1}, E_b^{-1}, E_c^{-1}$ takođe matrice elementarnih transformacija. □

2.6 Rang matrice

Neka je zadata matrica $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^{m\times n}$. Naglasimo da, kao i ranije, vrste matrice A označavamo sa $a_1, a_2, \dots, a_m$ i $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$. Iz A izaberimo k vrsta i k kolona, tj. podmatricu M_k formata $k \times k$. Označimo sa $i_1, i_2, \dots, i_k$ indekse izabranih vrsta, a sa $j_1, j_2, \dots, j_k$ indekse kolona. Tada je $M_k = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & \dots & a_{i_k j_k} \end{pmatrix}$.

Definicija 2.6.1. Determinanta matrice M_k naziva se minorom reda k matrice A.

Definicija 2.6.2. Reći ćemo da matrica A ima rang jednak r, ako važi:
1. postoji minor reda r različit od nule;
2. svaki minor reda $> r$ matrice A je jednak nuli.

Drugim riječima, rang matrice je format najveće kvadratne podmatrice čija je detemninata različita od nule.

Oznaka: $r = \operatorname{rank} A$.

Matrica A ranga r ima bar jednu kvadratnu podmatricu M_r formata r, takvu da je $\det M_r \neq 0$. Vrste i kolone matrice A na čijim se presjecima nalaze elementi matrice M_r nazivaju se bazisnim vrstama i bazisnim kolonama.

Primjer 2.6.3. Posmatrajmo matricu $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & -17 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$. Najveća kvadratna podmatrica matrice A je formata 3. Međutim, direktnim računanjem determinanti možemo vidjeti da su sva četiri minora reda 3 jednaka nuli. Izdvajajući iz A podmatrice formata 2×2, dobijamo minore drugog reda koji nisu jednaki nuli. Kao bazisne vrste i kolone možemo uzeti, recimo, prvu i drugu vrstu i prvu i drugu kolonu. Tada je $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $\det M_2 = -3 \neq 0$. Sada iz definicije slijedi da je rang matrice A jednak 2. Primijetimo da izbor bazisnih vrsta i kolona nije jednoznačan. Na primjer, možemo izabrati drugu i treću vrstu i prvu i četvrtu kolonu i one će takođe biti bazisne. Zaista, na ovaj način smo izabrali podmatricu $M_2' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, čija je determinanta jednaka -1.

Teorema 2.6.4. *Važe sljedeća tvrđenja:*

(i) Bazisne vrste (bazisne kolone) matrice A su linearno nezavisne.

(ii) Svaka vrsta (kolona) matrice A se može predstaviti kao linearna kombinacija bazisnih vrsta (kolona).

Dokaz. 1. Neka je $\operatorname{rank} A = r$, i $a_{i_1}, \dots, a_{i_r}$ bazisne vrste matrice A. Tada je podmatrica M_r koja sadrži ove vrste takva da $\det M_r \neq 0$. Saglasno Posljedici 2.3.15 vrste matrice M_r su linearno nezavisne. No, tada su i vrste $a_{i_1}, \dots, a_{i_r}$ matrice A linearno nezavisne.

2. Pretpostavimo da je $\operatorname{rank} A = r$. Tada su svi minori reda $r+1$ jednaki nuli, tj. $\det M_{r+1} = 0$, gdje je:

$$M_{r+1} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rs} \\ a_{p1} & \dots & a_{pr} & a_{ps} \end{pmatrix}, \quad p > r, s > r.$$

Označimo sa $\Delta_{1s}, \Delta_{2s}, \dots, \Delta_{rs}, \Delta_{ps}$ algebarske dopune elemenata $a_{1s}, a_{2s}, \dots, a_{rs}, a_{ps}$ i izračunajmo determinantu M_{r+1}, razlažući je po zadnjoj koloni:

$$\det M_{r+1} = a_{1s}\Delta_{1s} + a_{2s}\Delta_{2s} + \dots + a_{rs}\Delta_{rs} + a_{ps}\Delta_{ps} = 0. \tag{2.4}$$

Podijelimo jednačinu (2.4) sa $\det M_r \neq 0$:

$$a_{ps} = -\frac{\Delta_{1s}}{\det M_r} a_{1s} - \frac{\Delta_{2s}}{\det M_r} a_{2s} - \dots - \frac{\Delta_{rs}}{\det M_r} a_{rs}.$$

Uvodeći oznake $\alpha_k = -\frac{\Delta_{ks}}{\det M_r}$, $k = \overline{1, r}$ dobijamo:

$$a_{ps} = \alpha_1 a_{1s} + \alpha_2 a_{2s} + \dots + \alpha_r a_{rs}.$$

Uvrštavajući u prethodnu jednakost redom $s = 1, 2, \dots, n$ dobijamo:

$$\begin{cases} a_{p1} = \alpha_1 a_{11} + \dots + \alpha_r a_{r1} \\ \vdots \\ a_{pn} = \alpha_1 a_{1n} + \dots + \alpha_r a_{rn}. \end{cases}$$

Posljednjih n jednakosti možemo zapisati kao vektorsku jednakost:

$$a_p = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_r a_r.$$

Znači, vrsta a_p je linearna kombinacija bazisnih vrsta $a_1, \dots, a_r$. □

Teorema 2.6.5. *Ako se svaka vrsta $a_1, a_2, \dots, a_m$ može predstaviti kao linearna kombinacija vrsta $b_1, b_2, \dots, b_k$ i $m > k$, tada su vrste $a_1, a_2, \dots, a_m$ linearno zavisne.*

Dokaz. Budući da se vrste mogu vijdeti kao vektori u prostoru $\mathbb{P}^n$, moguće je primjetniti Teoremu 1.4.12. □

Teorema 2.6.6. *Rang $A \in \mathbb{P}^{m\times n}$ je maksimalan broj linearno nezavisnih vrsta (kolona) matrice A.*

Dokaz. Neka je $\operatorname{rank} A = r$ i neka su $a_1, a_2, \dots, a_r$ bazisne vrste matrice A. Neka je $a_{i_1}, \dots, a_{i_s}$ proizvoljan skup s vrsta matrice A, gdje je $s > r$. Po Teoremi 2.6.4, svaka vrsta $a_{i_1}, \dots, a_{i_s}$ se može predstaviti kao linearna kombinacija vrsta $a_1, \dots, a_r$. Pošto je $s > r$, to su po Teoremi 2.6.5 $a_{i_1}, \dots, a_{i_s}$ linearno zavisne. □

Teorema 2.6.7. *Ako se svaka vrsta (kolona) matrice A može izraziti kao linearna kombinacija vrsta (kolona) matrice B, tada $rankA \leq rankB$.*

Dokaz. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_r$ bazisne vrste u matrici A, a $b_1, b_2, \ldots, b_s$ bazisne vrste u B. Treba pokazati da je $r \leq s$.

Pretpostavimo suprotno, da je $r > s$. Po uslovu svaka vrsta $a_1, \ldots, a_r$ može se predstaviti kao linearna kombinacija $b_1, \ldots, b_s$, pa su po Teoremi 2.6.5 vrste $a_1, \ldots, a_r$ linearno zavisne. Ali, to su po pretpostavci bazisne vrste, pa imamo kontradikciju, koja dokazuje da je $r \leq s$, tj. $\operatorname{rank} A \leq \operatorname{rank} B$. $\square$

Teorema 2.6.8. *Neka je $A \in \mathbb{P}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{P}^{n\times k}$. Tada* $\operatorname{rank}(A \cdot B) \leq \operatorname{rank} A$ *i* $\operatorname{rank}(A \cdot B) \leq \operatorname{rank} B$.

Dokaz. Vrste matrice $A \cdot B$ su linearna kombinacija vrsta matrice B (što direktno slijedi iz definicije množenja matrica). Takođe vrste matrice $A \cdot B$ su linearna kombinacija vrsta matrice A. Na osnovu Teoreme 2.6.7, imamo da je $\operatorname{rank}(A \cdot B) \leq \operatorname{rank} B$ i $\operatorname{rank}(A \cdot B) \leq \operatorname{rank} A$. Slično važi i za kolone. $\square$

Teorema 2.6.9. *Neka je $A \in \mathbb{P}^{m\times n}$.*

(i) Ako je $B \in P^{m\times m}$ invertibilna matrica, tada je $\operatorname{rank}(B \cdot A) = \operatorname{rank} A$.

(ii) Ako je $C \in P^{n\times n}$ - invertibilna matrica, tada $\operatorname{rank}(A \cdot C) = \operatorname{rank} A$.

Dokaz. Na osnovu prethodne Teoreme je $\operatorname{rank}(B \cdot A) \leq \operatorname{rank} A$. Kako je B invertibilna matrica, imamo $A = I \cdot A = (B^{-1} \cdot B) \cdot A = B^{-1} \cdot (B \cdot A)$. Slijedi $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(B^{-1} \cdot (B \cdot A)) \leq \operatorname{rank}(B \cdot A)$. Posljednja nejednakost slijedi takođe iz prethodne Teoreme. Dvije dobijene nejednakosti dokazuju našu Teoremu. $\square$

Posljedica 2.6.10. *Elementarne transformacije vrsta i kolona ne mijenjaju rang matrice.*

Dokaz slijedi iz činjenice da su matrice elementarnih transformacija invertibilne (Teorema 2.5.3).

Primjer 2.6.11. Odredimo rang matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & -17 & -3 \end{pmatrix}$. Primijetimo da treću vrstu možemo izraziti kao linearnu kombinaciju prve i druge. Naime, ako prvu vrstu oduzmemo od druge i dodamo trećoj, imamo $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 & 1 \\ 0 & -3 & 12 & 1 \\ 0 & 6 & -24 & -2 \end{pmatrix}$. Dodavanjem druge vrste, pomnožene brojem 2, trećoj, dobijamo $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 & 1 \\ 0 & -3 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Vidimo da je rang posljednje matrice jednak 2, a pošto elementarne transformacije ne mijenjaju rang matrice, to znači da je i rang matrice A jednak 2.

2.7 Singularne i regularne matrice

U ovoj Sekciji ćemo se vratiti kvadratnim matricama.

Definicija 2.7.1. Kvadratna matrica A naziva se regularnom, ako je $\det A \neq 0$. Ako je $\det A = 0$, matrica A se naziva singularnom.

Teorema 2.7.2. *Matrica $A \in \mathbb{P}^{n\times n}$ je regularna ako i samo ako je* $\operatorname{rank} A = n$.

Dokaz. Ukoliko je $\operatorname{rank} A < n$, to su vrste matrice A linearno zavisne. Dakle, postoji jedna vrsta koja je linearna kombinacija preostalih. Iz Posljedice 2.3.15 slijedi da je tada $\det A = 0$, tj. A je singularna matrica.

S druge strane, ako je $\operatorname{rank} A = n$, to, po definiciji ranga matrice, postoji minor reda n koji je različit od nule. Pošto je format matrice $n \times n$, ovo znači da je $\det A \neq 0$, tj. matrica A je regularna. □

Teorema 2.7.3. *Svaka regularna matrica se može predstaviti kao proizvod matrica elementarnih transformacija.*

Dokaz. Neka je A regularna. Iz prethodnog Tvrđenja imamo da je $\operatorname{rank} A = n$. Prema Tvrđenju 2.2.4, matrica A se elementarnim transformacijama vrsta i kolona može svesti na jediničnu matricu (ovdje smo osim pomenutog Tvrđenja iskoristili činjenicu da elementarne transformacije vrsta i kolona ne mijenjaju rang matrice). Podsjetimo da elementarne transformacije vrsta odgovaraju množenju matricama elementarnih transformacija $E_1, E_2, \dots, E_s$ sa lijeve strane. Takođe, elementarne transformacije kolona se mogu zapisati kao množenje matricama elementarnih transformacija $G_1, G_2, \dots, G_q$ sa desne strane. Zapišimo sve rečeno u obliku jednakosti:

$$I = E_s \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot A \cdot G_1 \cdot G_2 \cdots G_q, \tag{2.5}$$

Matrice $E_1, \dots, E_s, G_1, \dots, G_q$ su, kao matrice elementarnih transformacija, invertibilne. Sada jednakost (2.5) množimo redom sa $E_s^{-1}, \dots, E_2^{-1}, E_1^{-1}$ sa lijeve strane. Tako dobijamo:

$$E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_s^{-1} = A G_1 G_2 \cdots G_q. \tag{2.6}$$

Dalje množimo (2.6) sa $G_q^{-1}, \dots, G_2^{-1}, G_1^{-1}$ sa desne strane:

$$E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_s^{-1} G_q^{-1} \cdots G_2^{-1} G_1^{-1} = A.$$

Po Teoremi 2.5.3, matrice $E_s^{-1}, \dots, E_1^{-1}, G_1^{-1}, \dots, G_q^{-1}$ su matrice elemetarnih transformacija, što čini dokaz kompletnim. □

Sada smo u mogućnosti da pokažemo da je determinanta proizvoda matrica jednaka proizvodu determinanti.

Teorema 2.7.4. *Za $A, B \in \mathbb{P}^{n\times n}$ važi* $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$.

Dokaz. Dokaz ćemo podijeliti u tri dijela. Prvo ćemo dokazati Teoremu za slučaj kada je A matrica elementarnih transformacija. Zatim razmatramo slučaj kada je matrica A singularna i konačno, koristeći prethodnu Teoremu, razmotrićemo slučaj kada je A regularna matrica.

(i) Neka je A matrica elementarnih transformacija.

(i1) Neka je A matrica elementarnih transformacija prvog tipa. Tada je $A \cdot B$ matrica dobijena iz B množenjem jedne vrste brojem $\lambda \neq 0$. Imajući to u vidu, lako je vidjeti da $\det(A \cdot B) = \lambda \cdot \det B$ (Tvrđenje 2.3.10). Prisjetimo se da je determinanta matrice elementarnih transformacija prvog tipa jednaka λ, pa imamo $\det(A \cdot B) = \lambda \cdot \det B = \det A \cdot \det B$.

(i2) Neka je A matrica elementarnih transformacija drugog tipa. Tada je $\det A = -1$, a matrica $A \cdot B$ se dobija kada u matrici B zamjenimo mjesta za dvije vrste. Po Posljedici 2.3.13 imamo $\det(A \cdot B) = -\det B = -1 \cdot \det B = \det A \cdot \det B$.

(i3) Neka je A matrica elementarnih transformacija trećeg tipa. Tada je $\det A = 1$, a matrica $A \cdot B$ dobijena iz B dodavanjem $i-$te vrste, pomnožene brojem α, $j-$ toj vrsti. Poznato je da se determinanta matrice ne mijenja od takve operacije (Posljedica 2.3.14), prema tome: $\det(A \cdot B) = \det B = 1 \cdot \det B = \det A \cdot \det B$.

(ii) Razmotrimo slučaj kada je A singularna, tada je (Tvrđenje 2.7.2) $\operatorname{rank} A < n$: $\operatorname{rank}(A \cdot B) \leq \operatorname{rank} A < n$, odakle zaključujemo da je matrica $A \cdot B$ singularna, tj. $\det(A \cdot B) = 0 = 0 \cdot \det B = \det A \cdot \det B$. Dakle, Teorema važi i za slučaj kada je A singularna matrica.

(iii) Konačno, ako je matrica A regularna, ona se može predstaviti kao prozivod matrica elementarnih transformacija, tj. $A = E_1 E_2 \cdots E_s$. Tada na matrice $E_1, E_2, \ldots, E_s$ možemo primijeniti punkt (i) ovog dokaza:

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(E_1 E_2 \cdots E_s B) = \det E_1 \det(E_2 \cdots E_s B) = \det E_1 \det E_2 \det(E_3 \cdots E_s B) \\ &= \cdots = \det E_1 \det E_2 \cdots \det E_s \det B = \det(E_1 E_2 \cdots E_s) \det B = \det A \det B.\end{aligned}$$

□

Teorema 2.7.5. *Matrica A je invertibilna ako i samo ako je regularna i tada imamo* $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

Dokaz. Neka je A singularna, tj. $detA = 0$. Pretpostavimo da postoji matrica A^{-1}. Tada $A^{-1} \cdot A = I$, pa po Teoremi 2.7.4, imamo $\det(A^{-1} \cdot A) = \det A^{-1} \cdot \det A = 1$. No, kako je $\det A = 0$, to je posljednja jednakost nemoguća, što dokazuje da matrica A^{-1} ne postoji.

Neka je A regularna. Ponovo se pozovimo na Teoremu 2.7.3: $A = E_1 E_2 \cdots E_s$, gdje su $E_1, E_2, \ldots, E_s$ matrice elementarnih transformacija. Označimo $A^{-1} = E_s^{-1} \cdots E_2^{-1} E_1^{-1}$. Lako je provjeriti da $A^{-1} \cdot A = I$, dakle A je invertibilna. Dalje, imamo da je $\det(A^{-1} \cdot A) = \det A^{-1} \cdot \det A = \det I = 1$. Kako je $\det A \neq 0$, odavde je $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$. □

Konačno, kombinujući Tvrđenje 2.7.2 i Teoremu 2.7.5 izvodimo sljedeći zaključak o vezi između ranga matrice, njene determinante i invertibilnosti:

Posljedica 2.7.6. *Neka je $A \in \mathbb{P}^{n \times n}$. Tada:*
(i) A je regularna $\Longleftrightarrow$ A je invertibilna $\Longleftrightarrow$ A je punog ranga, tj. $\operatorname{rank} A = n$;
(ii) A je singularna $\Longleftrightarrow$ A nema obratnu matricu $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{rank} A < n$.

Sada se možemo vratiti metodima provjere da li je sistem vektora u $\mathbb{R}^n$ linearno nezavisan, da li je baza i slično. Kako smo se uvjerili u Glavi 1, zadaci ove vrste se svode na rješavanje sistema linearnih jednačina. Koristeći pojam ranga matrice i metod Gausa, ove zadatke sada možemo efikasnije rješavati.

Zadatak 2.7.7. U $\mathbb{R}^n$ je zadat sistem od $m < n$ vektora $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Potrebno je provjeriti da li su vektori $a_1, a_2, \ldots, a_m$ linearno nezavisni.

Od vektora $a_1, \ldots, a_m$ formirajmo matricu $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Ako je $\operatorname{rank} A = m$ tada su vektori linearno nezavisni.

Ako je $\operatorname{rank} A < m$ tada su vektori linearno zavisni.

Na primjer, ispitajmo linearnu zavisnost sistema $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -1 \\ 49 \end{pmatrix}$.

Formirajmo matricu čije su vrste koordinate zadatih vektora i na nju primijenimo algoritam Gausa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 8 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & 7 & -1 & 49 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & -9 & 1 & -63 \\ 0 & 7 & -1 & 49 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & -9 & 1 & -63 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{9} & 0 \end{pmatrix}.$$

Rang ove matrice je 3, što znači da je ovaj sistem vektora linearno nezavisan.

Zadatak 2.7.8. U $\mathbb{R}^n$ zadato n vektora $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Provjeriti da li ovi vektori čine bazu.

Formirajmo matricu $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. A je kvadratna matrica formata n.

Provjeru možemo izvršiti na dva načina: računanjem determinante ili ranga matrice A.

Ako je $detA = 0$, tada je $rankA < n$, dakle navedeni vektori su linearno zavisni, pa ne mogu činiti bazu. Ako je $detA \neq 0$ tada vektori $a_1, a_2, \cdots, a_n$ čine bazu prostora $\mathbb{R}^n$.

Primijetimo da je u većini slučajeva brži način za provjeru korištenje metoda Gausa, budući da računanje determinante u opštem slučaju zahtijeva više operacija.

Zadatak 2.7.9. U $\mathbb{R}^n$ je zadato m vektora $a_1, a_2, \ldots, a_m$ pri čemu je $m > n$. Provjera linearne zavisnosti ovih vektora se vrši nalaženjem ranga matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, A \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Najveći mogući rang ove matrice je n, a kako je $m > n$, to su ovi vektori sigurno linearno zavisni. Ovo je u skladu sa činjenicom koja nam je već poznata da je sistem od $m > n$ vektora u n-dimenzionalnom prostoru uvijek linearno zavisan, pa ne mogu biti baza.

2.7.1 Determinanta transponovane matrice

Definicija 2.7.10. Neka je $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^{m\times n}$. Tada se matrica

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^{n\times m}$$

naziva transponovanom matricom k matrici A.

Primjedba 2.7.11. Ako se matrice A i B mogu pomnožiti, tada se može lako pokazati da je $(A\cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Teorema 2.7.12. *Neka je A matrica formata $n\times n$. Tada je* $\det A = \det A^T$.

Dokaz. Ako je A singularna, tada je $\operatorname{rank} A < n$, pa je $\operatorname{rank} A^T < n$, pa zaključujemo $\det A = \det A^T = 0$.

Ako je A regularna matrica tada je možemo predstaviti na sljedeći način $A = E_1E_2\cdots E_s$. Tada je $A^T = (E_1E_2\cdots E_s)^T = E_s^T\cdots E_2^TE_1^T$. Po Teoremi 2.7.4 je:

$$\det A = \det E_1 \det E_2 \cdots \det E_s, \quad \det A^T = \det E_s^T \cdots \det E_2^T \det E_1^T.$$

Za matrice elementarnih transformacija je lako provjeriti da važi $\det E_j = \det E_j^T$ $j = \overline{1,s}$, pa zaključujemo da je zaista $\det A = \det A^T$. □

2.7.2 Metod nalaženja obratne matrice

Sada ćemo na konkretnom primjeru objasniti jedan od algoritama nalaženja obratne matrice. Napomenimo da navedeni algoritam nije jedini, postoji više načina da se nađe obratna matrica.

Neka je zadata sljedeća matrica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & -9 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pored matrice A dopišimo jediničnu matricu i nad vrstama nove matrice vršimo elementarne transformacije, sve dok na mjestu gdje se nalazila matrica A ne dobijemo jediničnu matricu:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to IIIv + Iv \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to IIIv + IIv \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to IIv + IIIv \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to Iv + IIv\cdot\frac{7}{9} \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{16}{9} & \frac{14}{9} & \frac{7}{9} \\ 0 & -9 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to IIv\cdot(-\frac{1}{9}) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{16}{9} & \frac{14}{9} & \frac{7}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Matrica koja je dobijena na desnoj strani je obratna k matrici A, dakle:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{16}{9} & \frac{14}{9} & \frac{7}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Primijetimo da je ovaj algoritam moguće dovesti do kraja, osim u slučaju kada je rank$A < n$. tj. kada je matrica A singularna. U tom slučaju nećemo dobiti jediničnu matricu na lijevoj strani (umjesto toga, pojaviće se vrsta u kojoj su svi elementi nule), pa nam algoritam neće dati rezultat. Naravno, to nam ukazuje da matrica A nema obratnu.

2.7.3 Drugi metod nalaženja obratne matrice

Teorema 2.7.13. *Neka je $A \in \mathbb{P}^{n\times n}$ regularna matrica. Tada je*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \dots & \tilde{A}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{A}_{n1} & \dots & \tilde{A}_{nn} \end{pmatrix}^T,$$

gdje je $\tilde{A}_{ij}$ algebarska dopuna elementa a_{ij}.

Dokaz. Neka je $B = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \dots & \tilde{A}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{A}_{n1} & \dots & \tilde{A}_{nn} \end{pmatrix}^T$ i $C = AB$. Tada imamo

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \frac{1}{\det A} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \det \tilde{A}_{jk} = \frac{1}{\det A} \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j-11} & \dots & a_{j-1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{j+11} & \dots & a_{j+1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \det X.$$

Za $i \neq j$, X je matrica koja ima dvije iste vrste (i-tu i j-tu), pa je $\det X = 0$, i $c_{ij} = 0$. Za $i = j$ je $X = A$, pa je $c_{ii} = \frac{1}{\det A} \det A = 1$. Dakle, matrica C je jedinična matrica, i prema tome je $AB = I$.

Analogno se može pokazati da je $BA = I$, pa zaključujemo da je $A^{-1} = B$. □

2.8 Zamjena baza. Formule prelaska

Neka je V vektorski prostor, $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ i $S' = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$ dvije baze u V i razložimo vektore iz baze S' po bazi S:

$$v'_j = \alpha_{1j} v_1 + \dots + \alpha_{nj} v_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} v_i, \quad j = \overline{1,n}.$$

Zapišimo prethodne jednakosti u matričnom obliku:

$$(v_1'\, v_2' \cdots v_n') = (v_1\, v_2 \cdots v_n) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Definicija 2.8.1. Matrica $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ se naziva matricom prelaska iz baze S u S'

Teorema 2.8.2. *Neka je $\{v_1, \dots, v_n\}$ baza u V, A regularna matrica formata n. Tada kolone matrice $S' = SA$ čine bazu u V.*

Dokaz. Pošto su $\operatorname{rank} S = n$, $\operatorname{rank} A = n$, to je po Teoremi 2.6.9 $\operatorname{rank} S' = n$. To znači da su vektori $\{v_1', v_2', \dots, v_n'\}$ linearno nezavisni, pa oni čine bazu u V. □

Primjer 2.8.3. Razmotrimo dvije baze S i S' u $\mathbb{R}^2$:

$$S = \{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\};$$

$$S' = \{v_1{}' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_2{}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}.$$

Razložimo vektore iz baze S' po bazi S:

$$v_1' = 1 \cdot v_1 - 1 \cdot v_2; v_2' = 1 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2.$$

Dakle, matrica prelaska iz baze S u S' je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Razmotrimo sada vektor x sa koordinatama $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ u bazi $\{v_1, v_2\}$. Nađimo koordinate ovog vektora u bazi $\{v_1', v_2'\}$:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{7}{3}, \alpha_2 = \frac{2}{3}.$$

Dakle, koordinate vektora x u bazi $\{v_1', v_2'\}$ su $\begin{pmatrix} 7/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$.

Koristeći matricu prelaska, imamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Kao što smo vidjeli na prethodnom primjeru, koordinate vektora u jednoj bazi se mogu dobiti iz koordinata u drugoj uz pomoć matrice prelaska.

Primjedba 2.8.4. Označimo sa $x(S)$ i $x(S')$ koordinate vektora x u bazama S i S'. Neka je A matrica prelaska iz baze S u bazu S'. Tada $x(S) = Ax(S')$.

Teorema 2.8.5. *Neka je A matrica prelaska iz baze S u S', $S' = SA$. Tada $S = S'A^{-1}$.*

Dokaz. Pošto je A matrica prelaska, to je ona regularna, dakle i invertibilna. Množeći jednakost $S' = SA$ sa A^{-1} sa lijeve strane, dobijamo naše tvrđenje. □

Definicija 2.8.6. Govorićemo da su baze S i S', gdje je $S' = SA$, jednako orjentisane, ako $detA > 0$. Ako je $detA < 0$, tada kažemo da su baze suprotno orjentisane.

2.9 Ekvivalentne matrice

Definicija 2.9.1. Matrice A i B formata $m \times n$ and poljem $\mathbb{P}$ se nazivaju ekvivalentnima, ako postoje regularne matrice $P \in \mathbb{P}^{m\times m}$ i $Q \in \mathbb{P}^{n\times n}$ takve da je $A = PBQ$.

Teorema 2.9.2. *Neka je matrica A formata $m\times n$ i* $\operatorname{rank} A = r$. *Tada postoje regularne matrice $P \in \mathbb{P}^{m\times m}$ i $Q \in \mathbb{P}^{n\times n}$ takve da je $G = PAQ = \begin{pmatrix} I_r & O_1 \\ O_2 & O_3 \end{pmatrix}$, gdje je I_r jedinična matrica formata $r \times r$, O_1, O_2 i O_3 nula-matrice formata, $r \times (n-r)$, $(m-r) \times r$ i $(m-r) \times (n-r)$, respektivno.*

Dokaz. Pozovimo se na Tvrđenje 2.2.4 da elementarnim transformacijama vrsta i kolona matricu A svedemo na oblik G. Dakle: $G = E_s \cdots E_2 E_1 A G_1 G_2 \cdots G_q$, gdje su E_1, E_2, $\dots E_s$, G_1, G_2, $\dots, G_q$ matrice elementarnih transformacija. Budući da elementarne transformacije ne mijenjaju rang matrice, to će matrica G imati $r = \operatorname{rank} A$ jedinica na glavnoj dijagonali. Označimo $P = E_s \cdots E_2 E_1$ i $Q = G_1 G_2 \cdots G_q$. Matrice P i Q su, kao proizvodi matrica elementarnih transformacija, regularne. Ovim je Teorema dokazana. □

Teorema 2.9.3. *Matrice A i B formata $m\times n$ su ekvivalentne ako i samo ako* $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$.

Dokaz. Neka su A i B ekvivalentne. Tada po definiciji postoje regularne matrice P i Q, takve da $A = PBQ$. Pošto množenje regularnim matricama ne mijenja rang (Teorema 2.6.9), to važi da je $rankA = rankB = r$.

Neka je sada $\operatorname{rank}A = \operatorname{rank}B = r$. Po prethodnoj Teoremi imamo: $G = P_1 A Q_1, G = P_2 B Q_2$, gdje su P_1, P_2, Q_1, Q_2 regularne matrice. Izjednačavajući, dobijamo: $P_1 A Q_1 = P_2 B Q_2$, pa slijedi $A = P_1^{-1} P_2 B Q_2 Q_1^{-1}$. Matrice $P = P_1^{-1} P_2$ i $Q = Q_2 Q_1^{-1}$ su regularne, slijedi da su A i B ekvivalentne. □

Glava 3

Sistemi linearnih jednačina

U prethodnim glavama smo vidjeli da se mnogi konkretni zadaci Linearne algebre svode na rješavanje sistema linearnih jednačina. Zato nam je potrebno da podrobno proučimo taj zadatak. U Glavi 2 smo objasnili metod Gausa kao jedan od metoda rješavanja sistema linearnih jednčina (koji je u opštem slučaju i najefikasniji metod). U ovoj glavi ćemo se fokusirati na pitanja o postojanju i jedinstvenosti rješenja ovog zadatka, kao i strukturi skupa rješenja.

Neka je $\mathbb{P}$ polje i pretpostavimo da imamo sistem od m jednačina i n nepoznatih sa koeficijentima $a_{ij} \in \mathbb{P}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{3.1}$$

Matrica sistema je

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Vektor desne strane je $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, a vektor nepoznatih promjenljivih $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Sada (3.1) možemo zapisati u matričnom obliku na sljedeći način

$$Ax = b. \tag{3.3}$$

3.1 Homogeni sistem linearnih jednačina

Sistem linearnih jednačina se naziva homogenim, ako ima sljedeći oblik

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0; \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Njegov matrični oblik je

$$Ax = \theta$$

gdje je $A \in \mathbb{P}^{m\times n}$ matrica sistema i θ nula-vektor u $\mathbb{P}^n$.

Najprije primijetimo da svaki homogeni sistem ima makar jedno rješenje – to je trivijalno rješenje $x = \theta$, tj. $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Teorema 3.1.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{P}^n$ skup rješenja sistema* (3.4). *Tada je S vektorski potprostor u $\mathbb{P}^n$.*

Dokaz. 1. Pretpostavimo da su $x, y \in \mathbb{P}^n$ rješenja sistema (3.4), tj. $x, y \in S$. Tada važi $Ax = \theta$ i $Ay = \theta$, pa je $A(x + y) = Ax + Ay = \theta + \theta = \theta$. Dakle, $x + y$ je takođe rješenje sistema (3.4), tj. $x + y \in S$.

2. Neka je $x \in S$ i $\alpha \in \mathbb{P}$. Tada je $Ax = \theta$, pa imamo $A(\alpha x) = \alpha Ax = \theta$. Dakle, $\alpha x \in S$.

Iz 1. i 2. slijedi da je S vektorski potprostor u $\mathbb{P}^n$. □

Nakon što smo utvrdili da je skup rješenja homogenog sistema vektorski potprostor, prirodno je zapitati se čemu je jednaka dimenzija tog potprostora. Naredna teorema daje odgovor na to pitanje.

Teorema 3.1.2.

$$\dim S = n - \mathrm{rank} A.$$

Dokaz. Označimo sa S' direktnu dopunu potprostora S u $\mathbb{P}^n$. Neka je $\dim S' = k$ i neka je $\{v_1, v_2 \ldots, v_k\}$ baza potprostora S', a $\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ baza potprostora S. Pokazaćemo prvo da je sistem vektora $\{Av_1, Av_2, \ldots, Av_k\}$ linearno nezavisan. Neka je $\lambda_1 Av_1 + \lambda_2 Av_2 + \cdots + \lambda_k Av_k = \theta$, gdje su $\lambda_j \in \mathbb{P}$, $j = \overline{1,k}$ skalari. Tada imamo $A(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k) = \theta$. Dakle, $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k \in S$. Međutim, $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \in S'$, pa kako je presjek ova dva potprostora samo nula-vektor, imamo $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k = \theta$. Kako je sistem vektora $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ linearno nezavisan, možemo zaključiti da $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$, čime je pokazana linearna nezavisnost sistema $\{Av_1, Av_2, \ldots, Av_k\}$.

Dokažimo sada da je $\mathrm{rank} A = k$. Za sve $i = 1, 2, \ldots, n$ neka je

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1(\text{i-ti red}) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^n.$$

Vektor $Ae_i \in \mathbb{P}^m$ predstavlja i-tu kolonu matrice A. Kako je $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ baza prostora $\mathbb{P}^n$, to $e_i \in \mathrm{Lin}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, tj. $Ae_i \in \mathrm{Lin}\{Av_1, Av_2, \ldots, Av_k\}$. Dakle, među kolonama $Ae_1, Ae_2, \ldots, Ae_n$ matrice A postoji sistem od najviše k linearno nezavisnih, pa je $\mathrm{rank}A \leq k$. Sada ćemo pokazati da važi jednakost. Pretpostavimo suprotno, da je $\mathrm{rank}A < k$. Tada matrica A ima $r < k$ linearno nezavisnih kolona. Neka je C matrica formata $n \times k$ čije su kolone $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Posmatrajmo matricu $B = AC$. Imamo da $\mathrm{rank}B \leq \mathrm{rank}A = r$. Dakle, B ima najviše $r < k$ linearno nezavisnih kolona. Odavde zaključujemo da je sistem vektora $\{Av_1, Av_2, \ldots, Av_k\}$ linearno zavisan, što je u kontradikciji sa prvim dijelom našeg dokaza. Dakle, zaista je $\mathrm{rank}A = k$.

Na kraju, kako je $S \oplus S' = \mathbb{P}^n$, imamo $\dim \mathbb{P}^n = \dim S + \dim S'$. Kako je prema pokazanom $\dim S' = \mathrm{rank}A$, slijedi $\dim S = n - \mathrm{rank}A$. □

Posljedica 3.1.3. *Ako u sistemu* (3.4) $m < n$, *tada taj sistem ima netrivijalno rješenje.*

3.1.1 Homogeni sistem linearnih jednačina sa kvadratnom matricom

Posljedica 3.1.4. *Homogeni sistem od n jednačina i n nepoznatih*

$$Ax = \theta \tag{3.5}$$

ima netrivijalno rješenje ako i samo ako je matrica sistema $A \in \mathbb{P}^{n\times n}$ singularna.

Dokaz. Ako je matrica A regularna, tada je $\mathrm{rank}A = n$ i iz Teoreme 3.1.2 imamo da je $\dim S = n - n = 0$. U ovom slučaju skup rješenja sadrži samo trivijalno rješenje $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Ako je matrica A singularna, tada je $\mathrm{rank}A < n$, pa je $\dim S = n - \mathrm{rank}A > 0$. Ovo znači da skup rješenja S sadrži netrivijalno rješenje sistema (3.5). □

Primjer 3.1.5. Posmatrajmo sistem od 2 jednačine i 2 nepoznate:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0; \\ 3x_1 - 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Matrica sistema je $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, čiji je rang 1. Očigledno, ovaj sistem ima netrivijalna rješenja. Skup rješenja ovog sistema S potprostor dimenzije $n - \mathrm{rank}A = 2 - 1 = 1$.

S druge strane, sistem

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0; \\ 3x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$

ima samo trivijalno rješenje jer je matrica sistema $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ regularna.

3.2 Nehomogeni sistem linearnih jednačina

Sistem jednačina se naziva nehomogenim, ako desna strana b u tom sistemu jednačina nije nula vektor:

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{P}^{m\times n},\ b \in \mathbb{P}^m,\ x \in \mathbb{P}^n. \tag{3.6}$$

Za razliku od homogenog, nehomogeni sistem ne mora uvijek imati rješenje, a to pokazuje sljedeći primjer.

Primjer 3.2.1. Sistem

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1; \\ 5x_1 - 5x_2 = 2 \end{cases}$$

nema rješenja.

Uz nehomogeni, razmotrimo i homogeni sistem jednačina sa istom matricom

$$Ax = \theta. \tag{3.7}$$

Teorema 3.2.2. *Neka je S skup rješenja sistema* (3.7) *i w jedno rješenje sistema* (3.6)*. Tada skup rješenja K sistema* (3.6) *ima sljedeći oblik*

$$K = \{w\} + S = \{w + s | s \in S\}.$$

Dokaz. Neka je w jedno rješenje sistema (3.6) i $z \in K$. Tada je $A(z-w) = Az-Aw = b-b = \theta$. Dakle, $z - w$ je rješenje sistema (3.7), tj. $z - w \in S$. Dakle, postoji $s \in S$, tako da je $z - w = s$. Odavde imamo $z = w + s \in \{w\} + S$, pa važi $K \subseteq \{w\} + S$.

S druge strane, neka je $z \in \{w\} + S$, tada $z = w + s$, gdje je $s \in S$. Slijedi $Az = A(w + s) = Aw + As = b + \theta = b$, pa $z \in K$. Odavde $\{w\} + S \subseteq K$. Znači, $K = \{w\} + S$. □

Definicija 3.2.3. Skup K se naziva opštim rješenjem sistema (3.6).

Primjer 3.2.4. Posmatrajmo dva sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 1; \\ -4x_1 + 10x_2 = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 0; \\ -4x_1 + 10x_2 = 0. \end{cases} .$$

Jedno od rješenja nehomogenog sistema je $w = \{x_1, x_2\} = \{3, 1\}$.

S druge strane, lako je naći da je opšte rješenje homogenog sistema oblika $S = \{\frac{5}{2}x_2, x_2\}$, gdje je $x_2 \in \mathbb{R}$ proizvoljno.

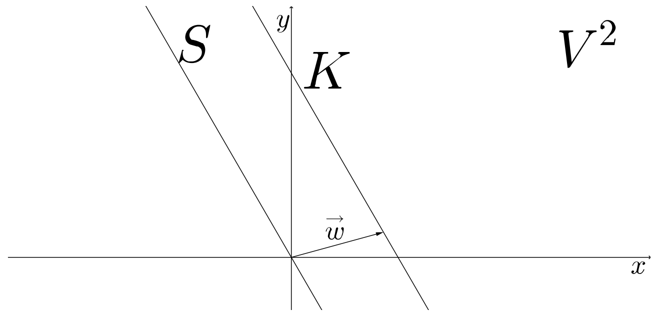
Odavde imamo da je opšte rješenje nehomogenog sistema oblika $K = \{w + s | s \in S\} = (3 + \frac{5}{2}x_2, 1 + x_2)$.

Definicija 3.2.5. Skup oblika $K = \{w\} + S$, gdje je S potprostor se naziva linearna afina mnogostrukost.

Primjer 3.2.6. Podsjetimo da su u prostoru V^2 potprostori sve prave koje prolaze kroz koordinatni početak. Ukoliko neku pravu koja prolazi kroz koordinatni početak pomjerimo za vektor $w \neq \theta$, dobićemo pravu koja ne prolazi kroz koordinatni početak. Takve prave i jesu linearne afine mnogostrukosti u V^2 (Slika 3.1).

Dakle, opšte rješenje nehomogenog sistema linearnih jednačina ima strukturu linearne afine mnogostrukosti (u slučaju da nije prazan skup).

Sada razmotrimo pitanje kada sistem nehomogenih jednačina ima rješenje. Sa $(A|b)$ označavamo proširenu matricu sistema (3.6) formata $m \times (n + 1)$.



Slika 3.1: S je vektorski potprostor, a $K = \{w\} + S$ je afina mnogostrukost u V^2.

Teorema 3.2.7 (Kroneker-Kapeli)**.** *Sistem linearnih jednačina* (3.6) *ima rješenje ako i samo ako je* $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|b)$.

Dokaz. Pretpostavimo da je sistem (3.6) saglasan. Tada postoje skalari $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{P}$ tako da je $\sum_{j=1}^{n} a_j^i \lambda_j = b_i$, $i = \overline{1, m}$, odnosno $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j = b$. Iz ovoga se vidi da je kolona b linearna kombinacija kolona matrice A, pa je $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|b)$.

Dokažimo tvrđenje i u drugom smjeru. Neka je $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A|b) = k$. Tada postoji k linearno nezavisnih kolona matrice A, a time i matrice $(A|b)$. Bez smanjenja opštosti možemo pretpostaviti da se radi o prvih k kolona. Svaka kolona $(A|b)$ je linearna kombinacija bazisnih, pa je i $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_k a_k$, pri čemu postoji $\lambda_i \neq 0$, $1 \leq i \leq k$. Odavde je $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_k a_k + 0 \cdot a_{k+1} + \cdots + 0 \cdot a_n$, odnosno $(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{P}^n$ je rješenje sistema (3.6). $\square$

Primjer 3.2.8. Razmotrimo nehomogeni sistem linearnih jednačina:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 1; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -1; \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -7. \end{cases}$$

Odredimo rang matrice $(A|b)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & -1 & 3 & -7 \end{array}\right) \to Iv \cdot (-3) + IIv; Iv \cdot (-5) + IIIv \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -12 \end{array}\right)$$

$$\to IIv \cdot (-1) + IIIv \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right).$$

Sada vidimo da je $\operatorname{rank} A = 2$ i $\operatorname{rank}(A|b) = 3$, pa po Kroneker-Kapelijevoj teoremi sistem nema rješenja.

Primjer 3.2.9. Razmotrimo nehomogeni sistem linearnih jednačina:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 1; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -1; \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 1. \end{cases}$$

Odredimo rang matrice $(A|b)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) \to Iv \cdot (-3) + IIv; Iv \cdot (-5) + IIIv \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

$$\to IIv \cdot (-1) + IIIv \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Dakle, $\text{rank}A = 2$ i $\text{rank}(A|b) = 2$, sistem ima rješenje.

3.2.1 Nehomogeni sistem linearnih jednačina sa kvadratnom matricom

Posmatrajmo nehomogeni sistem linearnih jednačina od n jednačina sa n nepoznatih:

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{P}^{n\times n},\ b \in \mathbb{P}^n,\ x \in \mathbb{P}^n. \tag{3.8}$$

Teorema 3.2.10. *Neka je matrica A u sistemu* (3.8) *regularna. Tada sistem* (3.8) *ima jedinstveno rješenje $x = A^{-1}b$. Obratno, ako sistem* (3.8) *ima jedinstveno rješenje, tada je matrica A regularna.*

Dokaz. Neka je matrica A regularna. Uvrštavajući $x = A^{-1}b$ u (3.8), imamo $A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = b$. Dakle, $A^{-1}b$ je rješenje (3.8). Neka je w proizvoljno rješenje (3.8), tj. $Aw = b$. Množeći posljednju jednakost sa A^{-1} imamo $w = A^{-1}b$. Dakle, sistem ima jedinstveno rješenje $A^{-1}b$.

Pokažimo sada obratno. Neka sistem (3.8) ima jedinstveno rješenje w. S je skup rješenja homogenog sistema $Ax = \theta$. Tada po Teoremi 3.2.2 imamo da je $\{w\} = \{w\} + S$. To je moguće jedino ako je $S = \{\theta\}$. Dakle, sistem $Ax = \theta$ ima samo trivijalno rješenje, pa je po Teoremi 3.1.4 matrica A regularna. □

Sada ćemo navesti jedan metod rješavanja sistema (3.8) sa regularnom matricom.

Teorema 3.2.11 (Kramerovo pravilo)**.** *Neka je matrica A u sistemu* (3.8) *regularna. Za svako $j = 1, \ldots, n$ označimo sa M_j matricu, dobijenu zamjenom j-te kolone u matrici A kolonom b. Tada je*

$$x_1 = \frac{\det M_1}{\det A},\ x_2 = \frac{\det M_2}{\det A}, \ldots, x_n = \frac{\det M_n}{\det A}$$

jedinstveno rješenje sistema (3.8).

Dokaz. Kako je A regularna matrica, sistem $Ax = b$ ima jedinstveno rješenje po Teoremi 3.2.10. Označimo sa $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kolone matrice A, a sa X_k označimo matricu dobijenu iz jedinične matrice zamjenom k-te kolone vektorom nepoznatih $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Tada je

$$AX_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & x_1 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & x_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & x_k & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & x_n & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & \sum_{i=1}^n a_{ki}x_i & \ldots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & \sum_{i=1}^n a_{ni}x_i & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & b_k & \ldots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = M_k.$$

Nađimo sada determinantu matrice X_k razlažući po k-toj koloni:

$$\det X_k = x_k \det I_{n-1} = x_k.$$

U prethodnoj jednakosti smo sa I_{n-1} označili jediničnu matricu formata $n-1$. Slijedi

$$\det M_k = \det(AX_k) = \det A \cdot \det X_k = x_k \det A,$$

pa je

$$x_k = \frac{\det M_k}{\det A}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

□

Glava 4

Linearni operatori u konačnodimenionalnim vektorskim prostorima

U ovoj glavi ćemo se upoznati sa preslikavanjima jednih vektorskih prostora u druge. Takva preslikavanja ćemo nazivati operatorima. Linearna algebra se bavi operatorima koji imaju svojstvo linearnosti.

4.1 Definicija i osnovna svojstva

Neka su V i W vektorski prostori nad poljem $\mathbb{P}$.

Definicija 4.1.1. Preslikavanje $\mathscr{A} : V \to W$ se naziva linearnim operatorom ako ispunjava sljedeća dva uslova:
(i) $\mathscr{A}(x+y) = \mathscr{A}x + \mathscr{A}y$, $\forall x, y \in V$ (aditivnost) i
(ii) $\mathscr{A}(\alpha x) = \alpha \mathscr{A}x$, $\forall x \in V$ i $\forall \alpha \in \mathbb{P}$ (homogenost).

Linearne operatore ćemo uvijek označavati velikim latinskim pisanim slovima, recimo $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, itd. Sa $\mathcal{L}(V \to W)$ označavamo skup svih linearnih operatora koji preslikavaju prostor V u prostor W (kasnije ćemo vidjeti da je riječ o vektorskom prostoru nad poljem $\mathbb{P}$). Dakle, oznaka $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ znači da je $\mathscr{A}$ linearan operator iz prostora V u prostor W. Napomenimo da je svaki izomorfizam vektorskih prostora linearan operator.

Lema 4.1.2. $\mathscr{A} : V \to W$ *je linearan operator, ako i samo ako važi*

$$\mathscr{A}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathscr{A}x + \beta \mathscr{A}y, \quad \forall x, y \in V \ \text{ i } \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{P}.$$

Dokaz. Ako je $\mathscr{A}$ linearan operator, tada za $x, y \in V$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{P}$ imamo

$$\mathscr{A}(\alpha x + \beta y) = \mathscr{A}(\alpha x) + \mathscr{A}(\beta y) = \alpha \mathscr{A}x + \beta \mathscr{A}y.$$

Obrnuto, ako je ispunjeno svojstvo u formulaciji leme, tada možemo postaviti $\alpha = 1$ i $\beta = 1$ kako bismo ustanovili aditivnost operatora, a potom $\alpha = 1$ i $\beta = 0$ čime zaključujemo da važi i homogenost. $\square$

Primjetimo da iz prethodne leme imamo sljedeće svojstvo: $\mathscr{A}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mathscr{A}x_j$, $\alpha_j\in\mathbb{P}$, $x_j\in V$, $j=\overline{1,n}$, $n\in\mathbb{N}$.

Lema 4.1.3. *Neka je $\mathscr{A}\in\mathcal{L}(V\to W)$. Tada važi $\mathscr{A}\theta_V=\theta_W$ (tj. $\mathscr{A}$ preslikava nula-vektor prostora V u nula-vektor prostora W) i $\mathscr{A}(-x)=-\mathscr{A}x$, $\forall x\in V$.*

Dokaz. Imajući u vidu svojstvo homogenosti, nalazimo $\mathscr{A}\theta_V=\mathscr{A}(0\cdot\theta_V)=0\cdot\mathscr{A}\theta_V=\theta_W$ i $\mathscr{A}(-x)=\mathscr{A}((-1)\cdot x)=(-1)\cdot\mathscr{A}x=-\mathscr{A}x$. □

Primjer 4.1.4. (i) Razmotrimo operator $\mathscr{A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $\mathscr{A}x=2x$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$. Važi

$$\mathscr{A}(x+y)=2(x+y)=2x+2y=\mathscr{A}x+\mathscr{A}y,\quad\forall x,y\in\mathbb{R}^n$$

i

$$\mathscr{A}(\alpha x)=2(\alpha x)=\alpha(2x)=\alpha\mathscr{A}x,\quad\forall x\in\mathbb{R}^n\text{ i }\forall\alpha\in\mathbb{R}.$$

Dakle, možemo zaključiti da je $\mathscr{A}$ linearni operator, tj. $\mathscr{A}\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n)$.

(ii) Razmotrimo operator $\mathscr{P}$ koji preslikava prostor $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}^2$ zadat na sljedeći način:

$$\mathscr{P}x=\begin{pmatrix}x_1\\0\end{pmatrix},\quad\forall x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2.$$

Za $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ i $y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ je $x+y=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\end{pmatrix}$ i prema tome

$$\mathscr{P}(x+y)=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}y_1\\0\end{pmatrix}=\mathscr{P}x+\mathscr{P}y.$$

Kako je $\alpha x=\begin{pmatrix}\alpha x_1\\\alpha x_2\end{pmatrix}$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, imamo

$$\mathscr{P}(\alpha x)=\begin{pmatrix}\alpha x_1\\0\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}x_1\\0\end{pmatrix}=\alpha\mathscr{P}x.$$

Ovim smo ustanovili da je $\mathscr{P}$ linearni operator.

Operator $\mathscr{P}$ se naziva operatorom projekcije.

(iii) Na prostoru geometrijskih vektora V^2 razmotrimo operator rotacije za ugao $\frac{\pi}{2}$ suprotno kazaljci na satu. Označimo ovaj operator sa $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}}$. Možemo se neposredno provjeriti da je $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}}$ linearni operator, tj. $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}}\in\mathcal{L}(V^2\to V^2)$.

(iv) Neka je M_n vektorski prostor svih polinoma stepena $\leq n$ sa koeficjentima iz polja $\mathbb{R}$ i razmotrimo operator diferenciranja $\mathscr{D}$. Iz svojstava diferenciranja znamo da ovaj operator preslikava M_n u M_{n-1} i da pri tome važi

$$\mathscr{D}(p+q)=\mathscr{D}p+\mathscr{D}q,\quad\forall p,q\in M_n$$

i

$$\mathscr{D}(\alpha p)=\alpha\mathscr{D}p,\quad\forall p\in M_n\text{ i }\forall\alpha\in\mathbb{R}.$$

Prema tome $\mathscr{D}$ je linearni operator iz prostora M_n u M_{n-1}, tj. $\mathscr{D}\in\mathcal{L}(M_n\to M_{n-1})$.

4.2 Jezgro i slika linearnog operatora

Jezgro operatora je skup svih vektora koji se slikaju u nula-vektor, dok je njegova slika skup svih vektora u koje se neki vektor preslikava. Ova dva pojma ćemo precizirati u definicijama koje slijede.

Definicija 4.2.1. Jezgro linearnog operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ je skup

$$\{u \in V : \mathscr{A}u = \theta_W\}.$$

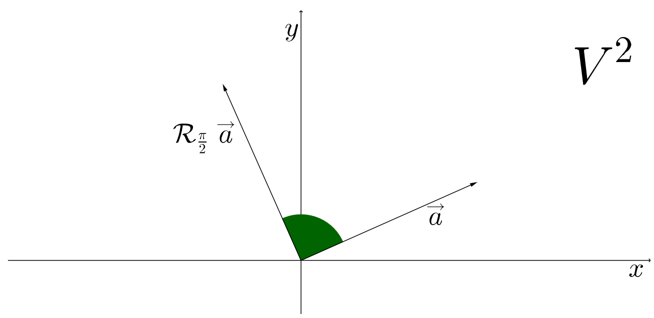
Oznaka: $\operatorname{Ker} \mathscr{A}$.

Definicija 4.2.2. Slika linearnog operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ je skup

$$\{w \in W : \exists u \in V \ \mathscr{A}u = w\}.$$

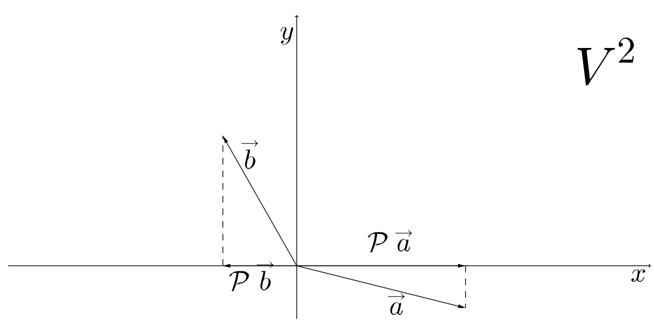
Oznaka: $\operatorname{Im} \mathscr{A}$.

Primjer 4.2.3. (i) Za operator rotacije u ravni za ugao $\frac{\pi}{2}$ imamo $\operatorname{Ker} \mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} = \{\theta\}$ i $\operatorname{Im} \mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} = V^2$.



Slika 4.1: Operator rotacije za ugao $\frac{\pi}{2}$

(ii) Razmotrimo operator projekcije $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$ zadat sa $\mathscr{P}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Lako je vidjeti da je $\operatorname{Ker} \mathscr{P} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}\}$ i $\operatorname{Im} \mathscr{P} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.



Slika 4.2: Operator projekcije na x-osu.

(iii) Jezgro operatora $\mathscr{D} \in \mathcal{L}\,(M_n \to M_{n-1})$ čine svi polinomi konstante, dok su u njegovoj slici svi polinomi stepena $\leq n-1$. Dakle, $\operatorname{Ker} \mathscr{D} = \{\text{const}\}$ i $\operatorname{Im} \mathscr{D} = M_{n-1}$.

Napomena 4.2.4. Ukoliko jezgro operatora sadrži samo nula-vektor (kao, na primjer, u slučaju operatora $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}}$), govorićemo da je jezgro operatora trivijalno.

Teorema 4.2.5. *(i) Jezgro linearnog operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ je vektorski potprostor u V.*

(ii) Slika linearnog operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ je vektorski potprostor u W.

Dokaz. (i) Neka su $u, v \in \operatorname{Ker} \mathscr{A}$ proizvoljni vektori. Tada je $\mathscr{A}u = \mathscr{A}v = \theta_W$. Odavde slijedi da $\mathscr{A}(u+v) = \mathscr{A}u + \mathscr{A}v = \theta_W + \theta_W = \theta_W$. Dakle, $u + v \in \operatorname{Ker} \mathscr{A}$. Takođe, za proizvoljni skalar $\alpha \in \mathbb{P}$ važi $\mathscr{A}(\alpha u) = \alpha \mathscr{A}u = \alpha \cdot \theta_W = \theta_W$. Dakle, imamo $\alpha u \in \operatorname{Ker} \mathscr{A}$. Sada možemo zaključiti da je $\operatorname{Ker} \mathscr{A}$ zaista vektorski potprostor u V.

(ii) Neka su $w, z \in \operatorname{Im} \mathscr{A}$. Tada postoje $u, v \in V$ tako da je $\mathscr{A}u = w$ i $\mathscr{A}v = z$, pa imamo $\mathscr{A}(u+v) = \mathscr{A}u + \mathscr{A}v = w + z$. Dakle, vektor $u + v \in V$ se slika u $w + z$, tj. $w + z \in \operatorname{Im} \mathscr{A}$. Dalje, za proizvoljno $\alpha \in \mathbb{P}$ imamo $\mathscr{A}(\alpha u) = \alpha \mathscr{A}u = \alpha w$, pa se, dakle, vektor αu slika u αw, tj. $\alpha w \in \operatorname{Im} \mathscr{A}$. Iz prethodnog slijedi da je $\operatorname{Im} \mathscr{A}$ zaista vektorski potprostor u W. □

Teorema 4.2.6. *Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ i neka je $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ baza u prostoru V. Tada je*

$$\operatorname{Im} \mathscr{A} = \operatorname{Lin}\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \ldots, \mathscr{A}u_n\}.$$

Dokaz. Neka je $w \in \operatorname{Im} \mathscr{A}$ proizvoljan vektor. Tada postoji $v \in V$ tako da je $w = \mathscr{A}v$. Ako je $v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j$ razlaganje vektora v po bazi u V, tada imamo

$$w = \mathscr{A}v = \mathscr{A}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j\right) = \alpha_j \sum_{j=1}^{n} \mathscr{A}u_j.$$

Dakle, $w \in \operatorname{Lin}\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \ldots, \mathscr{A}u_n\}$, tj. $\operatorname{Im} \mathscr{A} \subseteq \operatorname{Lin}\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \ldots, \mathscr{A}u_n\}$.

Pokažimo sada obrnutu inkluziju. Neka je $v \in \operatorname{Lin}\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \ldots, \mathscr{A}u_n\}$. Tada je

$$v = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mathscr{A}u_j = \mathscr{A}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j\right) \in \operatorname{Im} \mathscr{A}.$$

Dakle, $\operatorname{Lin}\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \ldots, \mathscr{A}u_n\} \subseteq \operatorname{Im} \mathscr{A}$. □

Primjer 4.2.7. (i) Razmotrimo operator projekcije $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$. U $\mathbb{R}^2$ izaberimo bazu $\{u_1, u_2\}$, gdje je

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad u_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Tada imamo

$$\mathscr{P}u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathscr{P}u_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Prema prethodnoj teoremi je

$$\operatorname{Lin}\{\mathscr{P}u_1, \mathscr{P}u_2\} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \operatorname{Im} \mathscr{P}.$$

(ii) Za operator rotacije $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} \in \mathcal{L}(V^2 \to V^2)$ razmotrimo standardnu bazu $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ u V^2. Primijetimo da je

$$\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}}\vec{e}_1 = \vec{e}_2 \quad \text{i} \quad \mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}}\vec{e}_2 = -\vec{e}_1,$$

pa je $\operatorname{Im}\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} = \operatorname{Lin}\{\vec{e}_2, -\vec{e}_1\} = V^2$.

(iii) Razmotrimo standardnu bazu $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ u prostoru polinoma M_n. Kako je $\mathscr{D}1 = 0$, $\mathscr{D}t = 1$, $\mathscr{D}t^2 = 2t, \dots, \mathscr{D}t^n = nt^{n-1}$, imamo $\operatorname{Im}\mathscr{D} = \operatorname{Lin}\{0, 1, 2t, \dots, nt^{n-1}\} = M_{n-1}$.

Teorema 4.2.8. *Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ i $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ linearno zavisan sistem vektora u prostoru V. Tada je $\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \dots, \mathscr{A}u_m\}$ linearno zavisan sistem u W.*

Dokaz. Neka je $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_m u_m = \theta_V$, pri čemu postoji $\alpha_i \neq 0$, $1 \leq i \leq m$. Ako na posljednju jednakost djelujemo operatorom $\mathscr{A}$, dobijamo

$$\mathscr{A}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_m u_m) = \alpha_1 \mathscr{A}u_1 + \alpha_2 \mathscr{A}u_2 + \cdots + \alpha_m \mathscr{A}u_m = \mathscr{A}\theta_V = \theta_W.$$

Kako je riječ o netrivijalnoj linearnoj kombinaciji, možemo zaključiti da je sistem vektora $\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \dots, \mathscr{A}u_m\}$ linearno zavisan. □

Ova teorema se može preformulisati na sledeći način.

Posljedica 4.2.9. *Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$. Ako je $\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \dots, \mathscr{A}u_m\}$ linearno nezavisan sistem vektora u W, tada je $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ takođe linearno nezavisan sistem u V.*

Teorema 4.2.10. *Neka je $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ baza u V, a $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ proizvoljan sistem vektora u W. Postoji jedinstven linearani operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ tako da je $\mathscr{A}v_j = w_j$, $j = \overline{1, n}$.*

Dokaz. Neka je $u \in V$ proizvoljan vektor i $u = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$ razlaganje vektora u po bazi u V. Definišimo operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ na sljedeći način:

$$\mathscr{A}u = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j w_j.$$

Neposredno se može provjeriti da je $\mathscr{A}$ zaista linearni operator. Takođe imamo

$$\begin{aligned} \mathscr{A}v_j &= \mathscr{A}(0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 1 \cdot v_j + \cdots + 0 \cdot v_n) \\ &= 0 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + \cdots + 1 \cdot w_j + \cdots + 0 \cdot w_n = w_j, \quad j = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

Da ustanovimo jedinstvenost, pretpostavimo da i za linearni operator $\mathscr{B} \in \mathcal{L}(V \to W)$ važi $\mathscr{B}v_j = w_j$, $j = \overline{1, n}$. Izaberimo proizvoljan vektor $u \in V$ i neka je $u = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$. Tada imamo

$$\mathscr{B}u = \mathscr{B}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathscr{B}v_j = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j w_j = \mathscr{A}u.$$

Dakle, $\mathscr{A}u = \mathscr{B}u$, $\forall u \in V$, tj. $\mathscr{A} \equiv \mathscr{B}$. □

Definicija 4.2.11. Rangom linearnog operatora $\mathscr{A}$ nazivamo dimenziju njegove slike.

Oznaka: $\operatorname{rank}\mathscr{A}$.

Definicija 4.2.12. Defektom linearnog operatora $\mathscr{A}$ nazivamo dimenziju njegovog jezgra. Oznaka: defect $\mathscr{A}$.

Dakle,

$$\operatorname{rank}\mathscr{A} = \dim \operatorname{Im}\mathscr{A} \quad \text{i} \quad \operatorname{defect}\mathscr{A} = \dim \operatorname{Ker}\mathscr{A}.$$

Lema 4.2.13. *Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$. Tada je $\operatorname{rank}\mathscr{A} \leq \dim V$.*

Dokaz. Neka je $\dim V = n$ i neka je $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ baza u prostoru V. Prema Teoremi 4.2.6 je $\operatorname{Im}\mathscr{A} = \operatorname{Lin}\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \ldots, \mathscr{A}u_n\}$, pa imamo

$$\operatorname{rank}\mathscr{A} = \dim \operatorname{Im}\mathscr{A} = \dim \operatorname{Lin}\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \ldots, \mathscr{A}u_n\} \leq n.$$

Napomenimo da ukoliko je sistem vektora $\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \ldots, \mathscr{A}u_n\}$ linearno nezavisan, ovdje važi znak jednakosti, a ukoliko je taj sistem linearno zavisan, tada je $\operatorname{rank}\mathscr{A} < n$. $\square$

Teorema 4.2.14. *Za svaki operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ važi*

$$\operatorname{rank}\mathscr{A} + \operatorname{defect}\mathscr{A} = \dim V.$$

Dokaz. Neka je $\dim V = n$ i neka je $\dim \operatorname{Ker}\mathscr{A} = k$. Pokazaćemo da je $\operatorname{rank}\mathscr{A} = n-k$. Izaberimo bazu $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ u potprostoru $\operatorname{Ker}\mathscr{A}$ i dopunimo je do baze $\{u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n\}$ prostora V. Pokazaćemo da je sistem vektora $\{\mathscr{A}u_{k+1}, \mathscr{A}u_{k+2}, \ldots, \mathscr{A}u_n\}$ baza za $\operatorname{Im}\mathscr{A}$. Zaista, imamo

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\mathscr{A} &= \operatorname{Lin}\{\mathscr{A}u_1, \ldots, \mathscr{A}u_k, \mathscr{A}u_{k+1}, \ldots, \mathscr{A}u_n\} \\ &= \operatorname{Lin}\{\theta_W, \ldots, \theta_W, \mathscr{A}u_{k+1}, \ldots, \mathscr{A}u_n\} = \operatorname{Lin}\{\mathscr{A}u_{k+1}, \ldots, \mathscr{A}u_n\},\end{aligned}$$

što znači da sistem vektora $\{\mathscr{A}u_{k+1}, \mathscr{A}u_{k+2}, \ldots, \mathscr{A}u_n\}$ generiše $\operatorname{Im}\mathscr{A}$. Preostaje da se pokaže da je taj sistem linearno nezavisan. Neka je $\alpha_{k+1}\mathscr{A}u_{k+1} + \alpha_{k+2}\mathscr{A}u_{k+2} + \cdots + \alpha_n\mathscr{A}u_n = \theta_W$. Ova jednakost se može napisati u obliku $\mathscr{A}\left(\sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j u_j\right) = \theta_W$. Dakle, $\sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j u_j \in \operatorname{Ker}\mathscr{A}$, što znači da se ovaj vektor može razložiti po bazi potprostora $\operatorname{Ker}\mathscr{A}$. Neka je $\sum_{j=k+1}^{n} \alpha_j u_j = \sum_{j=1}^{k} \beta_j u_j$. Odavde imamo $\sum_{j=1}^{k} \beta_j u_j + \sum_{j=k+1}^{n} (-\alpha_j) u_j = \theta_V$. Međutim, sistem vektora $\{u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n\}$ je baza u V, pa slijedi da svi koeficijenti prethodne linearne kombinacije moraju biti jednaki nuli. Posebno, imamo $\alpha_j = 0$ za sve $j = \overline{k+1, n}$. Dakle, pokazali smo da je sistem vektora $\{\mathscr{A}u_{k+1}, \mathscr{A}u_{k+2}, \ldots, \mathscr{A}u_n\}$ linearno nezavisan i prema tome baza potprostora $\operatorname{Im}\mathscr{A}$. Na osnovu prethodnog imamo $\dim \operatorname{Im}\mathscr{A} = n-k$, tj. $\operatorname{rank}\mathscr{A} = n-k$. $\square$

4.3 Operacije sa linearnim operatorima

(i) Zbir operatora $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \mathcal{L}(V \to W)$ je operator $\mathscr{A} + \mathscr{B} : V \to W$ koji djeluje na sledeći način:

$$(\mathscr{A} + \mathscr{B})u = \mathscr{A}u + \mathscr{B}u, \quad \forall u \in V.$$

Lako je ustanoviti da $\mathscr{A} + \mathscr{B} \in \mathcal{L}(V \to W)$. Dakle, imamo dobro definisanu operaciju na skupu svih linearnih operatora $\mathcal{L}(V \to W)$.

(ii) Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$, i neka je $\alpha \in \mathbb{P}$. Množenjem operator $\mathscr{A}$ skalarom $\alpha \in \mathbb{P}$ dobijamo operator $\alpha\mathscr{A} : V \to W$ koji dejstvuje na sljedeći način:

$$(\alpha\mathscr{A})u = \alpha(\mathscr{A}u), \quad \forall u \in V.$$

Lako je provjeriti da $\alpha\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$.

iii) Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ i $\mathscr{B} \in \mathcal{L}(W \to Z)$. Tada možemo definisati operator $\mathscr{B} \circ \mathscr{A} : V \to Z$ na sljedeći način:

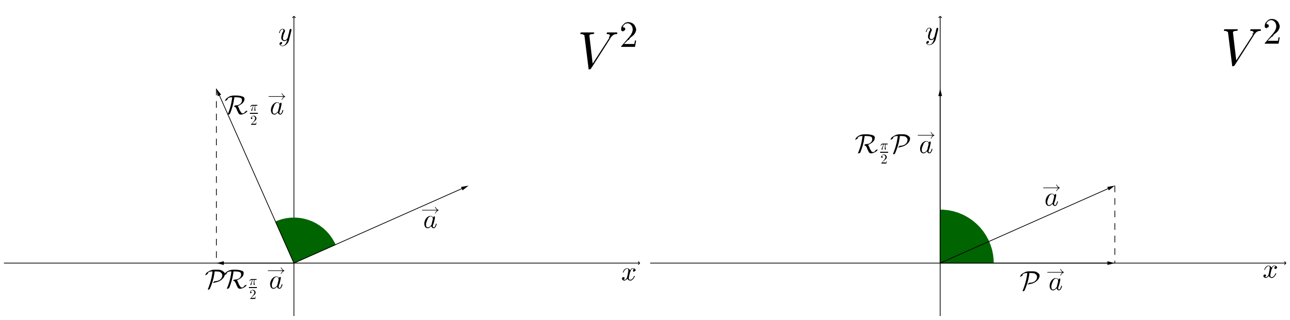
$$(\mathscr{B} \circ \mathscr{A})u = \mathscr{B}(\mathscr{A}u), \quad \forall u \in V.$$

Neposredno se može provjeriti da je $\mathscr{B}\circ\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to Z)$. Operator $\mathscr{B}\circ\mathscr{A}$ nazivamo proizvodom (ili superpozicijom) operatora $\mathscr{A}$ i $\mathscr{B}$. Umjesto $\mathscr{B} \circ \mathscr{A}$ često ćemo pisati $\mathscr{B}\mathscr{A}$.

Teorema 4.3.1. *Neka su V i W vektorski prostori nad poljem $\mathbb{P}$. Tada skup svih linearnih operatora $\mathcal{L}(V \to W)$ sa operacijama sabiranja i množenja operatora skalarom čini vektorski prostor nad poljem $\mathbb{P}$.*

Za dokaz je potrebno provjeriti aksiome vektorskog prostora. Napomenimo da je neutralni element za sabiranje operatora nula-operator $O \in \mathcal{L}(V \to W)$, koji dejstvuje na način: $Ou = \theta_W$, $\forall u \in V$.

Primjer 4.3.2. Neka su $\mathscr{R}, \mathscr{P} \in \mathcal{L}(V^2 \to V^2)$ operatori rotacije za ugao $\frac{\pi}{2}$ i projekcije na $x-$osu. Tada je moguće razmotriti dva proizvoda: $\mathscr{R}\mathscr{P}$ i $\mathscr{P}\mathscr{R}$. Imamo $\operatorname{Ker}\mathscr{R}\mathscr{P} = y -$ osa i $\operatorname{Im}\mathscr{R}\mathscr{P} = y -$ osa. Za operator $\mathscr{P}\mathscr{R}$ je $\operatorname{Ker}\mathscr{P}\mathscr{R} = x -$ osa i $\operatorname{Im}\mathscr{P}\mathscr{R} = x -$ osa.



Slika 4.3: Dejstvo operatora $\mathscr{P}\mathscr{R}_{\pi/2}$ i $\mathscr{R}_{\pi/2}\mathscr{P}$.

Teorema 4.3.3. *Neka su $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ i $\mathscr{B} \in \mathcal{L}(W \to Z)$ linearni operatori. Tada važi:*

1. $\operatorname{rank}\mathscr{B}\mathscr{A} \leq \min\{\operatorname{rank}\mathscr{A}, \operatorname{rank}\mathscr{B}\}$;
2. $\operatorname{rank}\mathscr{A} = \dim W \Rightarrow \operatorname{rank}\mathscr{B}\mathscr{A} = \operatorname{rank}\mathscr{B}$;
3. $\operatorname{rank}\mathscr{B} = \dim W \Rightarrow \operatorname{rank}\mathscr{B}\mathscr{A} = \operatorname{rank}\mathscr{A}$.

Dokaz. 1. Kako je $\operatorname{Im}\mathscr{B}\mathscr{A} \subseteq \operatorname{Im}\mathscr{B}$, imamo $\dim\operatorname{Im}\mathscr{B}\mathscr{A} \leq \dim\operatorname{Im}\mathscr{B}$, tj. $\operatorname{rank}\mathscr{B}\mathscr{A} \leq \operatorname{rank}\mathscr{B}$. Dokažimo sada da je $\operatorname{rank}\mathscr{B}\mathscr{A} \leq \operatorname{rank}\mathscr{A}$. Neka je $W' = \operatorname{Im}\mathscr{A} \subseteq W$ i razmotrimo suženje operatora $\mathscr{B}$ na potprostor W', tj. $\mathscr{B}|_{W'}$. Primijetimo da je $\operatorname{Im}\mathscr{B}|_{W'} = \operatorname{Im}\mathscr{B}\mathscr{A}$, pa imamo

$$\operatorname{rank}\mathscr{B}\mathscr{A} = \dim\operatorname{Im}\mathscr{B}\mathscr{A} = \dim\operatorname{Im}\mathscr{B}|_{W'} \leq \dim W' = \dim\operatorname{Im}\mathscr{A} = \operatorname{rank}\mathscr{A}.$$

2. Neka je $\operatorname{rank}\mathscr{A} = \dim W$. Tada je $\operatorname{Im}\mathscr{A} = W$ i $\operatorname{Im}\mathscr{B}\mathscr{A} = \operatorname{Im}\mathscr{B}$, pa je $\operatorname{rank}\mathscr{B}\mathscr{A} = \operatorname{rank}\mathscr{B}$.

3. Neka je $\operatorname{rank}\mathscr{B} = \dim W$. Tada je $\operatorname{defect}\mathscr{B} = 0$, a to znači da je operator $\mathscr{B}$ jednoznačan i prema tome preslikava linearno nezavisan sistem vektora u linearno nezavisan sistem vektora. Neka je $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ baza prostora V. Odaberimo $k = \operatorname{rank}\mathscr{A}$ vektora tako da je $\{\mathscr{A}u_{i_1}, \mathscr{A}u_{i_2}, \ldots, \mathscr{A}u_{i_k}\} \subseteq W$ baza za $\operatorname{Im}\mathscr{A}$. Kako je slika ovog sistema linearno nezavisan sistem $\{\mathscr{B}\mathscr{A}u_{i_1}, \mathscr{B}\mathscr{A}u_{i_2}, \ldots, \mathscr{B}\mathscr{A}u_{i_k}\}$, imamo $\operatorname{rank}\mathscr{B}\mathscr{A} \geq k = \operatorname{rank}\mathscr{A}$. Kako na osnovu prvog dijela tvrđenja imamo obrnutu nejednakost, možemo zaključiti da važi $\operatorname{rank}\mathscr{B}\mathscr{A} = \operatorname{rank}\mathscr{A}$. □

Primjer 4.3.4. Uz oznake iz prethodnog primjera imamo $\operatorname{rank}\mathscr{R}\mathscr{P} = 1$, dok je $\operatorname{rank}\mathscr{P} = 1$ i $\mathscr{R} = 2$.

4.4 Obratni operator

U ovoj sekciji ćemo razmatrati operatore koji preslikavaju vektorski prostor V u sebe, dakle razmatramo operatore koji pripadaju prostoru $\mathcal{L}(V \to V)$.

Definicija 4.4.1. Operator $\mathscr{I} \in \mathcal{L}(V \to V)$, $\mathscr{I}u = u$, $\forall u \in V$ se naziva jediničnim operatorom ili operatorom identiteta na prostoru V.

Definicija 4.4.2. Operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ se naziva invertibilnim, ako postoji $\mathscr{B} \in \mathcal{L}(V \to V)$ tako da je $\mathscr{B}\mathscr{A} = \mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{I}$. Tada se $\mathscr{B}$ naziva obratnim operatorom operatoru $\mathscr{A}$.

Pokazaćemo jedinstvenost operatora $\mathscr{B}$ u gornjoj definiciji: ako je operator $\mathscr{A}$ invertibilan, njegov obratni operator je jedinstven. Naime, pretpostavimo da je pored $\mathscr{B}$ i operator $\mathscr{C} \in \mathcal{L}(V \to V)$ obratni za $\mathscr{A}$. Tada je

$$\mathscr{B} = \mathscr{I}\mathscr{B} = (\mathscr{C}\mathscr{A})\mathscr{B} = \mathscr{C}(\mathscr{A}\mathscr{B}) = \mathscr{C}\mathscr{I} = \mathscr{C}.$$

Teorema 4.4.3. *Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$. Sljedeći uslovi su ekvivalentni:*
(1) $\mathscr{A}$ je invertibilan operator;
(2) $\mathscr{A}$ je uzajamno jednoznačan operator;
(3) $\operatorname{Ker}\mathscr{A} = \{\theta\}$, tj. $\operatorname{defect}\mathscr{A} = 0$;
(4) $\operatorname{Im}\mathscr{A} = V$, tj. $\operatorname{rang}\mathscr{A} = \dim V$.

Dokaz. (1) $\Rightarrow$ (2): Neka je $\mathscr{A}$ invertibilan i neka je $\mathscr{A}x_1 = \mathscr{A}x_2$. Pomnožimo posljednju jednakost sa $\mathscr{A}^{-1}$:

$$\mathscr{A}^{-1}\mathscr{A}x_1 = \mathscr{A}^{-1}\mathscr{A}x_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Dakle, dokazali smo da iz $\mathscr{A}x_1 = \mathscr{A}x_2$ slijedi da $x_1 = x_2$. To znači da je operator $\mathscr{A}$ uzajamno jednoznačan.

(2) $\Rightarrow$ (1): Pretpostavimo da je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ uzajamno jednoznačno preslikavanje. Tada $\forall v \in V\ \exists u : \mathscr{A}u = v$. Definišimo operator $\mathscr{A}^{-1}$ po sljedećem pravilu: $\mathscr{A}^{-1}v = u$. Tada je $\mathscr{A}^{-1}$ zaista obratni operator za $\mathscr{A}$, jer za svako $u \in V$ važi: $\mathscr{A}^{-1}\mathscr{A}u = \mathscr{A}^{-1}v = u$.

postoji inverzno preslikavanje $\mathscr{A}^{-1} : W \to V$. Kako je tada $\mathscr{A}^{-1}\mathscr{A} = \mathscr{A}\mathscr{A}^{-1} = \mathscr{I}$, dovoljno je još pokazati da je $\mathscr{A}^{-1}$ linearan operator. Naime, zbog jedinstvenosti obratnog operatora, tada možemo zaključiti da je $\mathscr{A}^{-1}$ obratni operator za $\mathscr{A}$.

Ostaje da pokažemo da je preslikavanje $\mathscr{A}^{-1}$ linearno. Za $u, v \in V$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{P}$ imamo $\mathscr{A}(\alpha\mathscr{A}^{-1}u + \beta\mathscr{A}^{-1}v) = \alpha\mathscr{A}\mathscr{A}^{-1}u + \beta\mathscr{A}\mathscr{A}^{-1}v = \alpha u + \beta v$, pa je $\mathscr{A}^{-1}(\alpha u + \beta v) = \alpha\mathscr{A}^{-1}u + \beta\mathscr{A}^{-1}v$.

Ovo dokazuje linearnost operatora $\mathscr{A}^{-1}$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Ako je $\mathscr{A}$ obostarno jednoznačan, svaki vektor ima samo jednu obratnu sliku, pa i nula-vektor $\theta \in V$. Međutim, mi znamo da se nula-vektor slika u nula-vektor. Odavde slijedi da je $\operatorname{Ker}\mathscr{A} = \{\theta\}$.

(3) $\Leftrightarrow$ (4) jer je $\operatorname{defect}\mathscr{A} + \operatorname{rang}\mathscr{A} = \dim V$.

(4) $\Rightarrow$ (2): Neka je $\operatorname{Im}\mathscr{A} = V$. Tada je i $\operatorname{Ker}\mathscr{A} = \{\theta\}$. Trebamo pokazati da je operator $\mathscr{A}$ obostrano jednoznačan. Zbog pretpostavke o slici operatora, dovoljno je pokazati još da $\mathscr{A}x_1 = \mathscr{A}x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. Naime, ako je $\mathscr{A}x_1 = \mathscr{A}x_2$, tada imamo $\mathscr{A}(x_1 - x_2) = \theta$, tj. $x_1 - x_2 \in \operatorname{Ker}\mathscr{A} = \{\theta\}$, pa je $x_1 - x_2 = \theta$ ili $x_1 = x_2$. □

Definicija 4.4.4. Operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ se naziva singularnim, ako je $\operatorname{Ker}\mathscr{A} \neq \{\theta\}$. Ako je $\operatorname{Ker}\mathscr{A} = \{\theta\}$, za operator $\mathscr{A}$ kažemo da je regularan.

Sada iz prethodnog izlaganja možemo izvesti zaključak.

Posljedica 4.4.5. *Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$.*

$\mathscr{A}$ singularan $\Leftrightarrow$ $\mathscr{A}$ nije invertibilan $\Leftrightarrow$ $\mathscr{A}$ nije uzajamno jednoznačan $\Leftrightarrow \operatorname{rank}\mathscr{A} < \dim V$ $\Leftrightarrow \operatorname{defect}\mathscr{A} > 0$.

Primjer 4.4.6. (i) Za operator $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} \in \mathcal{L}(V^2 \to V^2)$ rotacije geometrijske ravni za ugao $\frac{\pi}{2}$ je lako vidjeti da je $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}}^{-1} = \mathscr{R}_{-\frac{\pi}{2}}$.

(ii) Operator $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(V^2 \to V^2)$ projekcije vektora na x-osu nema obratni operator, jer nije uzajamno jednoznačan.

(iii) Kako jezgro operatora $\mathscr{D} \in \mathcal{L}(M_n \to M_n)$ nije trivijalan potprostor, operator $\mathscr{D}$ nije invertibilan.

4.5 Matrica linearnog operatora

Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ i neka je $v = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ baza u V, a $w = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ baza u W. Vektor $\mathscr{A}v_j \in W$ možemo razložiti po bazi prostora W na **jedinstven** način, tj. imamo

$$\mathscr{A}v_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} w_i, \quad j = \overline{1, n}.$$

Definicija 4.5.1. Matricom operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ u bazama v i w nazivamo matricu

$$A(v, w) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^{m \times n}.$$

Isatknimo da su kolone matrice linearnog operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ koordinatne reprezentacije vektora baze prostora V u bazi prostora W i da je prema tome format matrice jednak $m \times n = \dim W \times \dim V$.

Primjer 4.5.2. Neka je dat operator projekcije $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$ i izaberimo bazu $v = \{v_1, v_2\}$ u prostoru $\mathbb{R}^2$, gdje je $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ i $v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Kako bismo našli matricu operatora u ovoj bazi, potrebno je naći slike svih vektora iz baze:

$$\mathscr{P}v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{P}v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dalje, potrebno je dobijene vektore razložiti po izabranoj bazi:

$$\mathscr{P}v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_{21} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Odavde imamo:

$$\alpha_{11} - 4\alpha_{21} = 1,\ \alpha_{11} + 2\alpha_{21} = 0 \Rightarrow \alpha_{11} = \frac{1}{3},\ \alpha_{21} = -\frac{1}{6}.$$

Dobijene koeficijente α_{11}, α_{21} možemo upisati u prvu kolonu matrice.

Nastavimo sada sa slikom drugog vektora u bazi:

$$\mathscr{P}v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_{22} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Tada je:

$$\alpha_{12} - 4\alpha_{22} = -4,\ \alpha_{12} + 2\alpha_{22} = 0 \Rightarrow \alpha_{12} = -\frac{4}{3},\ \alpha_{22} = \frac{2}{3}.$$

Matrica operatora $\mathscr{P}$ u bazi v je

$$P(v) = \begin{pmatrix} 1/3 & -4/3 \\ -1/6 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Sada nađimo matricu istog operatora u standardnoj bazi $e = \{e_1, e_2\}$, gdje je $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ i $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Prije svega imamo

$$\mathscr{P}e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 \quad \text{i} \quad \mathscr{P}e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2,$$

pa možemo zaključiti da je matrica operatora u bazi e:

$$P(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Primjer 4.5.3. Nađimo matricu operatora rotacije $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$ u standardnoj bazi $e = \{e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ u $\mathbb{R}^2$.

Lako je vidjeti da je

$$\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} e_1 = e_2 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 \quad \text{i} \quad \mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} e_2 = -e_1 = -1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2,$$

pa imamo

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Primjer 4.5.4. Razmotrimo operator diferenciranja $\mathscr{D} \in \mathcal{L}(M_n \to M_n)$, i izaberimo u prostoru M_n bazu $v = \{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$. Imamo

$$\begin{aligned}
&\mathscr{D}1 = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + \cdots + 0 \cdot t^n;\\
&\mathscr{D}t = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + \cdots + 0 \cdot t^n;\\
&\mathscr{D}t^2 = 2t = 0 \cdot 1 + 2 \cdot t + 0 \cdot t^2 + \cdots + 0 \cdot t^n;\\
&\mathscr{D}t^3 = 3t^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + +3 \cdot t^2 + \cdots + 0 \cdot t^n\\
&\vdots\\
&\mathscr{D}t^n = nt^{n-1} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + \cdots + n \cdot t^{n-1} + 0 \cdot t^n.
\end{aligned}$$

Uvrštavajući dobijene koeficijente razlaganja redom u kolone, dobićemo matricu operatora $\mathscr{D}$ u izabranoj bazi

$$D(v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & n\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Napomenimo da je matrica $D(v)$ formata $(n+1) \times (n+1)$.

Odredimo sada matricu istog operatora u drugoj bazi $w = \{1, t, \frac{t^2}{2!}, \frac{t^3}{3!}, \ldots, \frac{t^n}{n!}\}$. Nađimo slike vektora baze i njihova razlaganja:

$$\begin{aligned}
&\mathscr{D}1 = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + \cdots + 0 \cdot \frac{t^n}{n!};\\
&\mathscr{D}t = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + \cdots + 0 \cdot \frac{t^n}{n!};\\
&\mathscr{D}\frac{t^2}{2!} = t = 0 \cdot 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot \frac{t^2}{2!} + \cdots + 0 \cdot \frac{t^n}{n!};\\
&\mathscr{D}\frac{t^3}{3!} = \frac{t^2}{2} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 1 \cdot \frac{t^2}{2!} + \cdots + 0 \cdot \frac{t^n}{n!};\\
&\vdots\\
&\mathscr{D}\frac{t^n}{n!} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + \cdots + 1 \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + 0 \cdot \frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Uvrstimo u kolone i dobijemo matricu u novoj bazi:

$$D(w) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Sada smo našli način da linearne operatore zapišemo uz pomoć matrica. Ovo je važno, budući da matrice možemo jednostavno zapisati i da imamo prilično znanja o njima. Ipak, vidimo da situacija nije tako jednostavna, budući da matrica operatora zavisi od izbora baze. Kako smo vidjeli na primjeru operatora projekcije, u različitim bazama njegove matrice izgledaju potpuno različito.

Podsjetimo da prema dogovoru operatore označavamo velikim latinskim pisanim slovima. Njihove matrice ćemo označavati odgovarajućim velikim štampanim slovima. Pri tome u zagradama ćemo pisati oznaku za bazu, kako bi bilo jasno da je matrica upravo u toj bazi. Recimo, ako je $\mathscr{D}$ operator diferenciranja, sa $D(v)$ ćemo označavati matricu tog operatora u bazi v. Naglasimo da ćemo oznaku za bazu izostavljati kada je jasno u kojoj bazi radimo.

Nakon što smo zaključili da matrica operatora zavisi od izbora baze, vidjećemo da matrica operatora ipak zadržava neke osobine tog operatora, bez obzira na izbor baze. Recimo, mogli smo primijetiti da u gore navedenim primjerima matrice istog operatora uvijek imaju isti rang i da je taj rang jednak rangu operatora. Naprimjer, obije matrice operatora projekcije imaju rang 1, matrica operatora rotacije je ranga 2, dok su obije matrice operatora diferenciranja ranga n. To nas navodi da formulišemo sljedeće tvrđenje.

Teorema 4.5.5. *Rang matrice $A(v,w)$ operatora $\mathscr{A}$ ne zavisi od izbora baza v i w i jednak je rangu operatora $\mathscr{A}$.*

Dokaz. Saglasno definiciji $\operatorname{rank}\mathscr{A} = \dim \operatorname{Im}\mathscr{A}$, a po Teoremi 4.2.6 je

$$\operatorname{Im}\mathscr{A} = \operatorname{Lin}\{\mathscr{A}v_1, \mathscr{A}v_2, \ldots, \mathscr{A}v_n\},$$

pa je dakle $\operatorname{rank}\mathscr{A} = \dim \operatorname{Lin}\{\mathscr{A}v_1, \mathscr{A}v_2, \ldots, \mathscr{A}v_n\}$. Po definiciji matrice linearnog operatora $A(v,w) = (\mathscr{A}v_1(w)\mathscr{A}v_2(w)\ldots\mathscr{A}v_n(w))$, gdje je $\mathscr{A}v_j(w)$, $j=\overline{1,n}$, vektor koordinata za $\mathscr{A}v_j$ u bazi w. Kako je $\operatorname{rank} A(v,w)$ broj linearno nezavisnih kolona, tj. broj linearno nezavisnih vektora u sistemu $\{\mathscr{A}v_1, \mathscr{A}v_2, \ldots, \mathscr{A}v_n\}$, imamo $\operatorname{rank} A(v,w) = \dim \operatorname{Lin}\{\mathscr{A}v_1, \mathscr{A}v_2, \ldots, \mathscr{A}v_n\} = \operatorname{rank}\mathscr{A}$. $\square$

Lema 4.5.6. *Neka su v i w baze u prostorima V i W, redom i $\mathscr{A},\mathscr{B} \in \mathcal{L}(V \to W)$. Matrica operatora $\mathscr{A}+\mathscr{B}$ je $A(v,w)+B(v,w)$, a matrica operatora $\alpha\mathscr{A}$ je $\alpha A(v,w)$.*

Dokaz. Neka je $v = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ baza u V, a $w = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ baza u W i

$$\mathscr{A}v_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} w_i, \quad \mathscr{B}v_j = \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij} w_i, \quad j=\overline{1,n}.$$

Tada je

$$(\mathscr{A}+\mathscr{B})v_j = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_{ij}+\beta_{ij}) w_i, \quad (\alpha\mathscr{A})v_j = \sum_{i=1}^{m} (\alpha\alpha_{ij}) w_i, \quad j=\overline{1,n}.$$

Kako je matrica operatora jedinstvena, možemo zaključiti da je matrica operatora $\mathscr{A}+\mathscr{B}$ u izabranim bazama jednaka zbiru matrica $A(v,w)+B(v,w)$, a da je matrica operatora $\alpha\mathscr{A}$ jednaka $\alpha A(v,w)$. $\square$

U prethodnoj Sekciji smo uveli skup $\mathcal{L}(V \to W)$ svih linearnih operatora iz vektorskog prostora V u prostor W. U Teoremi 4.3.1 smo istakli da je ovaj skup sa operacijama sabiranja operatora i množenja operatora skalarima vektorski prostor. Pošto smo sada utvrdili vezu između linearnih operatora i matrica, možemo vidjeti da je ovaj vektorski prostor konačnodimenzionalan.

Teorema 4.5.7. *Dimenzija vektorskog prostora $\mathcal{L}(V \to W)$ je $\dim W \cdot \dim V$.*

Dokaz. Odaberimo baze v i w u prostorima V i W, redom. Tada svakom operatoru $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ odgovara tačno jedna matrica $A(v,w)$ formata $\dim W \times \dim V$. Operacije sabiranja operatora i množenja operatora brojem odgovaraju operacijama sabiranja matrica i množenja matrica brojem. Dakle, vektorski prostor svih linearnih operatora $\mathcal{L}(V \to W)$ je izomorfan prostoru matrica formata $\dim W \times \dim V$. Kako izomorfni vektorski prostori imaju iste dimenzije, slijedi da je dimenzija vektorskog prostora $\mathcal{L}(V \to W)$ jednaka $\dim W \cdot \dim V$. $\square$

Teorema 4.5.8. *Neka su V, W i Z vektorski prostori nad poljem $\mathbb{P}$ i v, w i z baze u tim prostorima. Neka su $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ i $\mathscr{B} \in \mathcal{L}(W \to Z)$ i $A(v,w)$ i $B(w,z)$ matrice operatora u izabranim bazama. Matrica superpozicije operatora $\mathscr{B}\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to Z)$ je proizvod matrica $B(w,z)A(v,w)$.*

Dokaz. Neka je $v = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ baza u V, $w = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ baza u W i $z = \{z_1, z_2, \dots, z_l\}$ baza u prostoru Z. Neka su

$$A(v,w) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^{m\times n} \quad \text{i} \quad B(w,z) = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1l} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nl} \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^{n\times l}$$

matrice operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ i $\mathscr{B} \in \mathcal{L}(W \to Z)$ u izabranim bazama. Tada je

$$\mathscr{A} v_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} w_i, \quad j = \overline{1,n}, \quad \mathscr{B} w_i = \sum_{k=1}^{l} \beta_{ki} z_i, \quad i = \overline{1,m},$$

pa imamo

$$\begin{aligned} (\mathscr{B}\mathscr{A})v_j = \mathscr{B}(\mathscr{A} v_j) = \mathscr{B}\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} w_i\right) &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \mathscr{B} w_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \sum_{k=1}^{l} \beta_{ki} z_k = \sum_{k=1}^{l} \left(\sum_{i=1}^{m} \beta_{ki}\alpha_{ij}\right) z_k, \quad j = \overline{1,n}. \end{aligned}$$

Dakle, matrica linearnog operatora $\mathscr{B}\mathscr{A}$ je zaista proizvod matrica $B(w,z)A(v,w)$. $\square$

Primjedba 4.5.9. Na osnovu prethodne teoreme može se dati novi dokaz Teoreme 4.3.3 koji se oslanja na analogno tvrđenje o rangu proizvoda matrica.

4.6 Transformacija matrice linearnog operatora pri prelasku na nove baze

Pošto smo se u prethodnoj sekciji ubijedili da matrica operatora zavisi od izbora baze, vidjeli smo i to da ipak ne može bilo koja matrica biti matricom datog operatora. Matrice zadržavaju neka svojstva operatora, nezavisno od baze, recimo, jedna takva invarijana je rang.

U ovoj sekciji ćemo se baviti pitanjem kako se mijenja matrica operatora prilikom zamjene baze. Počnimo od slučaja kada se osnovni prostor i prostor slika razlikuju, tj. kada je $\dim V \neq \dim W$, a kasnije ćemo razmotriti slučaj kada je $V = W$.

Lema 4.6.1. *Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ i neka je $A(v,w)$ matrica operatora $\mathscr{A}$ u bazama $v = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ i $w = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ prostora V i W. Neka je $x \in V$ i neka je $x(v) \in \mathbb{P}^n$ koordinatna reprezentacija vektora x u bazi v. Tada za koordinatnu reprezentaciju vektora $y = \mathscr{A}x \in W$ u bazi w važi $y(w) = A(v,w)x(v) \in \mathbb{P}^m$.*

Dokaz. Ako je $x = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$ razlaganje vektora x po bazi v, tada je $x(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^n$.

Neka je $A(v,w) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^{m \times n}$ matrica linearnog operatora $\mathscr{A}$ u bazama v i w. Tada vektor $\mathscr{A}v_j \in W$ možemo razložiti po bazi prostora W:

$$\mathscr{A}v_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} w_i, \quad j = \overline{1,n}.$$

Sada imamo

$$y = \mathscr{A}x = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathscr{A}v_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} w_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \right) w_i.$$

Dakle,

$$y(w) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_{mj} x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A(v,w)x(v).$$

□

Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$, v i v' baze u V, w i w' baze u W, a $A(v,w)$ i $A(v',w')$ su matrice operatora $\mathscr{A}$ u izabranim bazama.

Teorema 4.6.2. *Neka je $S \in \mathbb{P}^{n\times n}$ matrica prelaska iz baze v u v' i $Q \in \mathbb{P}^{m\times m}$ matrica prelaska iz w u w'. Tada je*

$$A(v,w)S = QA(v',w').$$

Dokaz. Neka je $x \in V$ i $y = \mathscr{A}x \in W$. Označimo sa $x(v)$ i $y(w)$ koordinate vektora x i y u bazama v i w, redom. Tada je

$$y(w) = A(v,w)x(v), \quad y(w') = A(v',w')x(v'). \tag{4.1}$$

Kako su S i Q matrice prelaska, imamo

$$x(v) = Sx(v'), \quad y(w) = Qy(w'). \tag{4.2}$$

Kombinujući (4.1) i (4.2), dobijamo:

$$Qy(w') = A(v,w)Sx(v').$$

Ako u posljednju jednakost uvrstimo drugu jednakost iz (4.1), nalazimo

$$QA(v',w')x(v') = A(v,w)Sx(v').$$

Kako je vektor x proizvoljan, iz posljednje jednakosti imamo

$$QA(v',w') = A(v,w)S.$$

$\square$

Teorema 4.6.3. *Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ i $\operatorname{rank}\mathscr{A} = r$. Tada postoje baze v u V i w u W, tako da je*

$$A(v,w) = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = G.$$

Dokaz. Neka je $A(v',w')$ matrica linearnog operatora $\mathscr{A}$ u nekim bazama v' i w'. Znamo da je $rank A(v',w') = rank\, G = r$. Po Teoremi 2.9.2 matrice $A(v',w')$ i G su ekvivalentne, pa postoje regularne matrice P i Q takve da je:

$$A(v,w) = PGQ. \tag{4.3}$$

Izaberimo nove baze u i v na sljedeći način: $v = v'Q^{-1}$ i $w = w'P$. Tada je

$$A(v,w)Q = P^{-1}A(v',w').$$

Uvrstimo posljednju jednakost u (4.3):

$$A(v,w) = P^{-1}A(v',w')Q^{-1} = P^{-1}PGQQ^{-1} = G.$$

$\square$

Posljedica 4.6.4. *Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$. Tada su sve matrice operatora $\mathscr{A}$ međusobno ekvivalentne i njihov rang je jednak rangu operatora $\mathscr{A}$. Pri tome je svaka matrica formata $dimW \times dimV$ i ranga r matrica operatora $\mathscr{A}$ u nekoj bazi.*

Sada razmotrimo slučaj kada operator djeluje iz prostora V u V. U tom slučaju nemamo slobodu izbora dvije baze, već samo jedne baze u prostoru V.

Teorema 4.6.5. *Neka je* $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$*, neka su* v *i* v' *dvije baze u* V*. Neka je* S *matrica prelaska, tj.* $v' = v \cdot S$*. Tada je*

$$A(v') = S^{-1}A(v)S.$$

Dokaz. Neka je x proizvoljan vektor iz V i $y = \mathscr{A}x \in V$. Tada je

$$y(v) = A(v)x(v), \quad y(v') = A(v')x(v'),$$

a takođe je $x(v) = Sx(v')$ i $y(v) = Sy(v')$. Kombinujući prethodne jednakosti dobijamo:

$$S^{-1}A(v)Sx(v') = A(v')x(v').$$

Kako je $x \in V$ proizvoljan vektor, iz posljednje jednakosti slijedi $S^{-1}A(v)S = A(v')$. $\square$

Definicija 4.6.6. Kažemo da su matrice P i Q formata $n \times n$ slične, ako postoji regularna matrica $S \in \mathbb{P}^{n\times n}$, takva da je $P = S^{-1}QS$.

Posljedica 4.6.7. *Matrice operatora* $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ *u različitim bazama su međusobno slične.*

Teorema 4.6.8. *Ako su matrice* A *i* A' *slične, tada važi:*
(i) $\det A' = \det A$.
(ii) $\det(A - tI) = \det(A' - tI)$, $\forall t \in \mathbb{P}$ *(*I *je jedinična matrica).*

Proof. (i) Prvo tvrđenje slijedi iz činjenice da je determinanta proizvoda matrica jednaka proizvodu determinanti. Zaista, $\det A' = \det(S^{-1}AS) = \det S^{-1} \det A \det S = \det S^{-1} \det A \det S = \det A$.

(ii) Neka su matrice A i A' slične. Tada za sve skalare $t \in \mathbb{P}$ imamo

$$A' - tI = S^{-1}AS - tIS^{-1}S.$$

Jedinična matrica komutira sa svakom matricom, pa tako i sa matricom S^{-1}. Zato se prethodna jednakost može zapisati: $A' - tI = S^{-1}(A - tI)S$. Sada vidimo da tvrđenje (ii) slijedi iz (i). $\square$

Definicija 4.6.9. Determinantom linearnog operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ se naziva $\det A(e)$.
Oznaka: $\det \mathscr{A}$ označava determinantu operatora $\mathscr{A}$.

Imajući u vidu prethodno tvrđenje, definicija koju smo upravo naveli je korektna, jer, saglasno svojstvima sličnih matrica, determinanta matrice operatora ne zavisi od izbora baze. Dakle, nije važno koja konkretno baza je izabrana u prethodnoj definiciji.

Konačno, zaključujemo da je, i pored određenih nijansi, situacija sa operatorima iz V u V analogna situaciji sa kvadratnim matricama. Između ostalog, uz zaključak na kraju Sekcije 4.4 možemo dodati i sljedeće:

Napomena 4.6.10. Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$. Tada je $\det \mathscr{A} = 0$ ako i samo ako je operator $\mathscr{A}$ singularan.

Primjer 4.6.11. Operator $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} \in \mathcal{L}(V^2 \to V^2)$ je regularan ($\det \mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} = 1$), dok je operator $\mathscr{D} \in \mathcal{L}(M_n \to M_n)$ singularan.

Zadatak 4.6.12. Vratimo se na primjer operatora projekcije $\mathscr{P}$ iz prethodne sekcije koji je singularan. Provjeriti da za matrice

$$P(v) = \begin{pmatrix} 1/3 & -4/3 \\ -1/6 & 2/3 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad P(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

važi da je $P(v) = S^{-1}P(e)S$, gdje je S matrica prelaska iz baze v u standardnu bazu e u $\mathbb{R}^2$.

Glava 5

Spektralna teorija linearnih operatora u konačnodimenzionalnom prostoru

U ovoj glavi ćemo razmatrati linearne operatore koji djeluje iz V u V i za takve operatore ćemo definisati važne pojmove: svojstvena vrijednost operatora, svojstveni vektor operatora i karakteristični polinom.

5.1 Invarijantni potprostori

Definicija 5.1.1. Neka je V vektorski prostor i $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$. Kažemo da je potprostor $U \subseteq V$ invarijantan za operator $\mathscr{A}$, ako je $\mathscr{A}u \in U$, $\forall u \in U$, odnosno ako je $\mathscr{A}(U) \subseteq U$.

Primjer 5.1.2. (i) $\{\theta\}$ i V su invarijantni potrostori svakog operatora. Za ova dva potprostora kažemo da su trivijalni invarijantni potprostori;

(ii) $\operatorname{Ker}\mathscr{A}$ je invarijantan potprostor za $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$, jer za sve $u \in \operatorname{Ker}\mathscr{A}$ važi $\mathscr{A}u = \theta \in \operatorname{Ker}\mathscr{A}$;

(iii) $\operatorname{Im}\mathscr{A}$ je invarijantan potprostor, jer je za sve $u \in \operatorname{Im}(\mathscr{A})$ ispunjeno $\mathscr{A}u \in \operatorname{Im}(\mathscr{A})$.

Primjer 5.1.3. (i) Operator rotacije u geometrijskoj ravni $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} \in \mathcal{L}(V^2 \to V^2)$ ima samo dva trivijalna invarijantna potprostora.

(ii) Operator projekcije na x-osu $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(V^2 \to V^2)$ ima 4 invarijantna potprostora i to: dva trivijalna invarijantna potprostora: $\{\theta\}$ i V^2, $\{x - osa\} = \operatorname{Im}\mathscr{P}$ i $\{y - osa\} = \operatorname{Ker}\mathscr{P}$.

(iii) Za operator rotacije u geometrijskoj ravni $\mathscr{R}_{\pi} \in \mathcal{L}(V^2 \to V^2)$ svi potprostori su invarijantni.

(iv) Potprostori $M_k \subseteq M_n$, $k = \overline{0,n}$ su invarijantni potprostori za operator diferenciranja $\mathscr{D} \in \mathcal{L}(M_n \to M_n)$.

Primjer 5.1.4. Operator projekcije $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(V^2 \to V^2)$ na x-osu u geometrijskoj ravni V^2 ima dva netrivijalna invarijantna potprostora $\{x - \text{osa}\}$ i $\{y - \text{osa}\}$. Čitav prostor V^2 je direktna suma ova dva potprostora: $V^2 = \{x - \text{osa}\} \oplus \{y - \text{osa}\}$. Izaberimo baze u ova dva jednodimenzionalna potprostora: $\vec{e}_1 \in \{x - \text{osa}\}$ i $\vec{e}_2 \in \{y - \text{osa}\}$. Za bazu u V^2 uzmimo uniju ove dvije baze, tj. $e = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Tada je matrica operatora u izabranoj bazi $P(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ovo je bločni oblik matrice, sa dva bloka formata jedan: $A_1 = (1)$ i $A_2 = (0)$.

Primjedba 5.1.5. Pretpostavimo da operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ ima netrivijalni invarijantni potprostor $U \subseteq V$. Neka je $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ baza potprostora U i dopunimo je do baze $u = \{u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n\}$ prostora V. Razmotrićemo slike baznih vektora. Kako je $u_1 \in U$, a U invarijantni potprostor operatora $\mathscr{A}$, imamo $\mathscr{A}u_1 \in U$. Ovo znači da taj vektor može predstaviti kao linearna kombinacija sistema vektora $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$, tj. razlaganje vektora $\mathscr{A}u_1$ po bazi u izgleda ovako:

$$\mathscr{A}u_1 = \alpha_{11}u_1 + \cdots + \alpha_{k1}u_k + 0 \cdot u_{k+1} + \cdots + 0 \cdot u_n.$$

Kako i vektori $\mathscr{A}u_2, \ldots, \mathscr{A}u_k$ pripadaju potprostoru U, imamo

$$\begin{cases} \mathscr{A}u_2 = \alpha_{12}u_1 + \cdots + \alpha_{k2}u_k + 0 \cdot u_{k+1} + \cdots + 0 \cdot u_n \\ \vdots \\ \mathscr{A}u_k = \alpha_{1k}u_1 + \cdots + \alpha_{kk}u_k + 0 \cdot u_{k+1} + \cdots + 0 \cdot u_n \end{cases}$$

Za preostale vektore iz baze $u_{k+1}, u_{k+2}, \ldots, u_n$ ne možemo tvrditi isto, jer oni ne pripadaju invarijantnom potprostoru U.

Prema tome, matrica operatora $\mathscr{A}$ u bazi u je

$$A(u) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1k} & \alpha_{1,k+1} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2k} & \alpha_{2,k+1} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \ldots & \alpha_{kk} & \alpha_{k,k+1} & \ldots & \alpha_{kn} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{k+1,k+1} & \ldots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{n,k+1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dobijena matrica $A(u)$ sadrži blok-matricu formata $(n-k) \times (n-k)$ koja se sastoji od nula.

Dakle, ukoliko imamo netrivijalni invarijantni potprostor operatora, tada možemo izabrati bazu vektorskog prostora na način da matrica operatora u toj bazi ima jednostavniji oblik.

Primjedba 5.1.6. Sada pretpostavimo da prostor V možemo napisati kao direktnu sumu $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_s$, pri čemu su potprostori $U_1, U_2, \ldots, U_s$ invarijantni za operator $\mathscr{A}$. Tada postoji baza prostora V tako da matrica operatora $\mathscr{A}$ u toj bazi ima još jednostavniji oblik. Naime, izaberimo baze u invarijantnim potprostorima: neka je $\{u_1, u_2, \ldots u_{p_1}\}$ baza u U_1, neka je $\{u_{p_1+1}, u_{p_1+2}, \ldots, u_{p_2}\}$ baza u U_2, itd. Na kraju, neka je $\{u_{p_{s-1}+1}, u_{p_{s-1}+2}, \ldots, u_{p_s}\}$ baza u U_s. Kako je suma direktna, sistem vektora $u = \{u_1, \ldots, u_{p_1}, u_{p_1+1}, \ldots, u_{p_2}, \ldots, u_{p_{s-1}+1}, \ldots, u_{p_s}\}$ je baza prostora V $(p_s = n = \dim V)$.

Kako je U_1 invarijantan potprostor za $\mathscr{A}$, budući da $u_j \in U_1$, imamo $\mathscr{A}u_j \in U_1$, $j = \overline{1, p_1}$. Zato se ovi vektori razlažu po bazi u potprostora U_1, tj. imamo

$$\mathscr{A}u_j = \alpha_{j1}u_1 + \cdots + \alpha_{jp_1}u_{p_1} + 0 \cdot u_{p_1+1} + \cdots + \cdots + 0 \cdot u_{p_s}, \quad j = \overline{1, p_1}.$$

Dalje, kako se vektori $u_{p_1+1}, \ldots, u_{p_2} \in U_2$ preslikavaju u vektore iz potprostora U_2, njihove slike se razlažu po bazi tog potprostora. Dakle,

$$\mathscr{A}u_j = 0 \cdot u_1 + \cdots + 0 \cdot u_{p_1} + \alpha_{j,p_1+1}u_{p_1+1} + \cdots + \alpha_{j,p_2}u_{p_2} + 0 \cdot u_{p_2+1} + \cdots + \cdots + 0 \cdot u_{p_s},$$

za sve $j = p_1 + 1, \ldots, p_2$.

Isti proces možemo sprovesti i za preostale vektore u bazama potprostora $U_3, U_4, \ldots, U_s$.

Konačno, zaključujemo da u bazi u matrica operatora $\mathscr{A}$ ima "bločni" oblik:

$$A(u) = \begin{pmatrix} A_1 & O & \ldots & O \\ O & A_2 & \ldots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \ldots & A_s \end{pmatrix}.$$

Ovdje su sa O označene podmatrice koje se sastoje isključivo od nula (ali nijesu sve obavezno istog formata), dok je, recimo, $A_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1p_1} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2p_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{p_1 1} & \alpha_{p_1 2} & \ldots & \alpha_{p_1 p_1} \end{pmatrix}$.

5.2 Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori linearnog operatora

Definicija 5.2.1. Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{P}$. Vektor $x \neq \theta$ se naziva svojstvenim vektorom operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$, ako postoji $\lambda \in \mathbb{P}$ tako da je $\mathscr{A}x = \lambda x$. Skalar λ se naziva svojstvenom vrijednošću operatora $\mathscr{A}$.

Definicija 5.2.2. Skup svih svojstvenih vrijednosti operatora $\mathscr{A}$ se naziva spektrom tog operatora.

Napomena 5.2.3. Engleske riječi za svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore su *eigenvalues* i *eigenvectors*. (Koristi se njemačka riječ *eigen* = svoj, svojstveni.)

Primjer 5.2.4. (i) Operator $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} \in \mathcal{L}(V^2 \to V^2)$ rotacije za ugao $\frac{\pi}{2}$ u geometrijskoj ravni nema svojstvenih vrijednosti.

(ii) Operator $\mathscr{R}_\pi \in \mathcal{L}(V^2 \to V^2)$ rotacije za ugao π u V^2 ima svojstvenu vrijednost $\lambda = -1$. Svi vektori prostora V^2 su svojstveni vektori ovog operatora.

(iii) Operator $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(V^2 \to V^2)$ projekcije na x-osu u V^2 ima svojstvenu vrijednost $\lambda = 1$. Svojstveni vektori koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti $\lambda = 1$ su svi vektori na $x-$osi. Takođe, $\lambda = 0$ je svojstvena vrijednost ovog operatora, a svojstveni vektori koji joj odgovaraju su svi vektori na y-osi.

(iv) Operator $\mathscr{D} \in \mathcal{L}(M_n \to M_n)$ diferenciranja na prostoru M_n ima jedinstvenu svojstvenu vrijednost $\lambda = 0$. Svojstveni vektori koji odgovaraju ovoj svojstvenoj vrijednosti su konstantni polinomi. Da li ovaj operator ima još neku svojstvenu vrijednost?

Primjedba 5.2.5. (i) Svi vektori iz $\operatorname{Ker}\mathscr{A} \neq \{\theta\}$ (izuzev nula-vektora) su svojstveni vektori operatora $\mathscr{A}$ koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti $\lambda = 0$, budući da $x \in \operatorname{Ker}\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{A}x = 0 = 0 \cdot x$.

(ii) Ako je x svojstveni vektor operatora $\mathscr{A}$ za svojstvenu vrijednost λ i $\alpha \in \mathbb{P}$, $\alpha \neq 0$, tada je vektor αx takođe svojstveni vektor operatora $\mathscr{A}$ za svojstvenu vrijednost λ. Zaista, $\mathscr{A}(\alpha x) = \alpha\mathscr{A}x = \alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x)$.

(iii) Ako je x svojstveni vektor za $\mathscr{A}$, lako je pokazati da je $\mathrm{Lin}\{x\} = \{\alpha x : \alpha \in \mathbb{P}\}$ jednodimenzionalni invarijantni potprostor za $\mathscr{A}$.

(iv) Ako je x svojstveni vektor operatora $\mathscr{A}$ za svojstvenu vrijednost λ, tada je x svojstveni vektor operatora $\mathscr{A}^2$ za svojstvenu vrijednost λ^2.

Teorema 5.2.6. *Sistem svojstvenih vektora koji odgovaraju međusobno različitim svojstvenim vrijednostima operatora je linearno nezavisan.*

Dokaz. Dokaz ćemo izvesti indukcijom po broju svojstvenih vrijednosti operatora $\mathscr{A}$.

Najprije pretpostavimo da $\mathscr{A}$ ima jednu svojstvenu vrijednost:

$$\mathscr{A}x_1 = \lambda_1 x_1, \quad x_1 \neq \theta.$$

Jedan nenulti vektor čini linearno nezavisan sistem, pa teorema važi za slučaj kada $\mathscr{A}$ ima samo jednu svojstvenu vrijednost.

Ako je $\{x_1\}$ sistem od jednog svojstvenog vektora operatora $\mathscr{A}$, tada je prema definiciji $x_1 \neq \theta$, pa je riječ o linearno nezavisnom sistemu.

Pretpostavimo da je teorema tačna za operator koji ima p različitih svojstvenih vrijednosti $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.

Neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \lambda_{p+1}$ različite svojstvene vrijednosti operatora $\mathscr{A}$, a $x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}$ odgovarajući svojstveni vektori:

$$\mathscr{A}x_1 = \lambda_1 x_1, \ldots, \mathscr{A}x_p = \lambda_p x_p,\ \mathscr{A}x_{p+1} = \lambda_{p+1}x_{p+1}. \tag{5.1}$$

Kako bismo dokazali da je sistem vektora $\{x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}\}$ linearno nezavisan, sastavimo njihovu linearnu kombinaciju i izjednačimo je sa nula vektorom:

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p + \alpha_{p+1}x_{p+1} = \theta. \tag{5.2}$$

Djelujemo operatorom $\mathscr{A}$ na prethodnu jednakost:

$$\mathscr{A}(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p + \alpha_{p+1}x_{p+1}) = \alpha_1\mathscr{A}x_1 + \cdots + \alpha_p\mathscr{A}x_p + \alpha_{p+1}\mathscr{A}x_{p+1} = \theta. \tag{5.3}$$

Koristeći (5.1):

$$\alpha_1\lambda_1 x_1 + \cdots + \alpha_p\lambda_p x_p + \alpha_{p+1}\lambda_{p+1}x_{p+1} = \theta. \tag{5.4}$$

S druge strane, pomnožimo jednakost (5.3) sa λ_{p+1}:

$$\alpha_1\lambda_{p+1}x_1 + \cdots + \alpha_p\lambda_{p+1}x_p + \alpha_{p+1}\lambda_{p+1}x_{p+1} = \theta. \tag{5.5}$$

Oduzmimo (5.5) od (5.4):

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{p+1})x_1 + \cdots + \alpha_p(\lambda_p - \lambda_{p+1})x_p = \theta. \tag{5.6}$$

Sistem vektora $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ je linearno nezavisan prema pretpostavci indukcije. Pošto su sve svojstvene vrijednosti različite, to imamo da $\lambda_1 - \lambda_{p+1} \neq 0, \ldots, \lambda_p - \lambda_{p+1} \neq 0$, pa iz (5.6) slijedi $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_p = 0$.

Sada iz jednakosti (5.2) slijedi $\alpha_{p+1}x_{p+1} = \theta$. Budući da je $x_{p+1} \neq \theta$, imamo $\alpha_{p+1} = 0$. Dakle, dobili smo $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = \alpha_{p+1} = 0$, što dokazuje da je sistem vektora $\{x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}\}$ linearno nezavisan. □

Posljedica 5.2.7. *Linearni operator* $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ *može imati najviše* $n = \dim V$ *različitih svojstvenih vrijednosti.*

Primjedba 5.2.8. Pretpostavimo da $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ ima $n = \dim V$ linearno nezavisnih svojstvenih vektora $x_1, x_2, \dots, x_n$ i neka je $\mathscr{A}x_1 = \lambda_1 x_1, \mathscr{A}x_2 = \lambda_2 x_2, \dots, \mathscr{A}x_n = \lambda_n x_n$. Tada je

$$\begin{cases} \mathscr{A}x_1 = \lambda_1 x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \dots + 0 \cdot x_n; \\ \mathscr{A}x_2 = 0 \cdot x_1 + \lambda_2 x_2 + 0 \cdot x_3 + \dots + 0 \cdot x_n; \\ \vdots \\ \mathscr{A}x_n = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \dots + \lambda_n x_n. \end{cases} \tag{5.7}$$

Vidimo da je matrica operatora $\mathscr{A}$ u bazi $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dijagonalna, tj.

$$A(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Definicija 5.2.9. Govorićemo da je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ operator proste strukture, ako u prostoru V postoji baza od svojstvenih vektora operatora $\mathscr{A}$.

Iz Teoreme 5.2.6 slijedi

Posljedica 5.2.10. *Ako operator* $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ *ima* $n = \dim V$ *različitih svojstvenih vrijednosti, tada je* $\mathscr{A}$ *proste strukture.*

Primjer 5.2.11. (i) Operator $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(V^2 \to V^2)$ je proste strukture, jer ima dvije različite svojstvene vrijednosti ($2 = \dim V^2$).

(ii) Operator $\mathscr{R}_\pi \in \mathcal{L}(V^2 \to V^2)$ je takođe proste strukture, iako ima samo jednu svojstvenu vrijednost.

(iii) Operator $\mathscr{D} \in \mathcal{L}(M_n \to M_n)$ za $n \geq 1$ nije proste strukture (ima samo jedan linearno nezavisni svojstveni vektor).

(iv) Operator $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} \in \mathcal{L}(V^2 \to V^2)$ nije proste strukture (jer uopšte nema svojstvenih vektora).

5.3 Karakteristični polinom operatora

U prethodnoj sekciji smo uveli veoma važne pojmove svojstvene vrijednosti i svojstvenog vektora linearnog operatora. Međutim, nismo ukazali način na koji se u opštem slučaju mogu naći svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori. Ova sekcija je posvećena tom važnom pitanju.

Ipak, da bi se materijal koji slijedi bolje razumio, potrebno je znati neke činjenice iz Opšte algebre o polinomima, njihovim korijenima i slično. Stoga ćemo se najprije kratko upoznati sa ovim činjenicama.

Definicija 5.3.1. Neka je $p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ polinom sa koeficijentima $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ iz polja $\mathbb{P}$, $a_n \neq 0$. Korijenom (ili nulom) polinoma $p(t)$ se naziva svako rješenje jednačine $p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 = 0$.

Definicija 5.3.2. Polje $\mathbb{P}$ se naziva kompletnim, ako svaki polinom stepena ≥ 1 sa koeficijentima iz $\mathbb{P}$ ima bar jedan korijen u polju $\mathbb{P}$.

Primjer 5.3.3. Polje $\mathbb{R}$ nije kompletno. Zaista, veoma dobro nam je poznato da, recimo, polinom $p(t) = t^2 + 1$ nema korijen u $\mathbb{R}$.

Činjenica da polje $\mathbb{R}$ nije kompletno, je jedan od razloga zašto je potrebno uvesti kompleksne brojeve. Za nas je važna teorema koja tvrdi da je polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ kompletno. Ova teorema se obično naziva *Osnovna teorema algebre.* Ona se može dokazati na različite načine, ali nijedan od tih dokaza nije beš jednostavan. Budući da ova teorema ne spada u predmet proučavanja Linearne algebre, mi ćemo je ovdje formulisati bez dokaza.

Teorema 5.3.4 (Osnovna teorema algebre)**.** *Svaki polinom stepena ≥ 1 sa koeficijentima u $\mathbb{C}$ ima korijen u $\mathbb{C}$. Drugim riječima, polje $\mathbb{C}$ je kompletno.*

Primjedba 5.3.5. Ako je $\lambda \in \mathbb{P}$ korijen polinoma $p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ stepena n (tj. $a_n \neq 0$), tada je polinom $p(t)$ dijeliv sa $t - \lambda$ i količnik ova dva polinoma $(a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0) : (t - \lambda)$ je polinom stepena $n - 1$.

Definicija 5.3.6. Neka je λ korijen polinoma $p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$, $a_n \neq 0$. Tada je kratnost korijena λ najveći cijeli broj k takav da je $(t - \lambda)^k$ djelilac polinoma $p(t)$.

Primjer 5.3.7. (i) Polinom $t^2 - 2t + 1$ ima korijen 1 kratnosti 2.

(ii) Polinom t^5 ima korijen 0 kratnosti 5.

Lema 5.3.8. *Svaki polinom stepena n sa koeficijentima iz $\mathbb{C}$ ima n korijena, računajući njihovu kratnost.*

Dokaz. Dovoljno je dokazati ovo tvrđenje za polinome oblika $p(t) = t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ sa koeficijentima $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$. Na osnovu Osnovne teoreme algebre, postoji korijen $\lambda \in \mathbb{C}$. Ako polinom $p(t)$ podijelimo sa $t - \lambda$, dobijamo polinom $g(t)$ stepena $n - 1$. Po Osnovnoj teoremi algebre polinom $g(t)$ takođe ima korijen u $\mathbb{C}$. Produžavajući ovaj postupak, dobijamo n korijena u $\mathbb{C}$, računajući njihovu kratnost. $\square$

Pošto smo se upoznali sa nekim pojmovima i teoremama iz Opšte algebre, vratimo se pitanju nalaženja svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora linearnog operatora.

Definicija 5.3.9. Karakterističnim polinomom operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ nazivamo polinom

$$\chi_{\mathscr{A}}(t) = \det(\mathscr{A} - t\mathscr{I})$$

čiji je stepen $n = \dim V$.

Teorema 5.3.10. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{P}$. Skalar $\lambda \in \mathbb{P}$ je svojstvena vrijednost operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$, ako i samo ako je λ korijen karakterističnog polinoma $\chi_{\mathscr{A}}(t)$ operatora $\mathscr{A}$, tj. ako je λ rješenje jednačine $\chi_{\mathscr{A}}(\lambda) = 0$.*

Dokaz. $\lambda \in \mathbb{P}$ je svojstvena vrijednost operatora $\mathscr{A}$. $\Leftrightarrow$ postoji $x \in V$, $x \neq \theta$ tako da je $\mathscr{A}x = \lambda x \Leftrightarrow \mathscr{A}x - \lambda x = \theta \Leftrightarrow (\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I})x = \theta \Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker}(\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I}) \Leftrightarrow \operatorname{defect}(\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I}) > 0 \Leftrightarrow$ operator $\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I}$ je singularan $\Leftrightarrow \chi_{\mathscr{A}}(\lambda) = \det(\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I}) = 0 \Leftrightarrow \lambda$ je korijen karakterističnog polinoma operatora $\mathscr{A}$. □

Primjedba 5.3.11. Izaberimo bazu v u V. Neka su $A(v)$ i I matrice operatora $\mathscr{A}$ i $\mathscr{I}$ u bazi v. Tada je $\det(\mathscr{A} - t\mathscr{I}) = \det(A(v) - tI)$. Iz svojstava sličnih matrica znamo da ova determinanta ne zavisi od izbora baze v. Dakle, da bismo našli karakteristični polinom operatora $\mathscr{A}$, potrebno je zapisati njegovu matricu u bilo kojoj bazi, oduzeti t od elemenata na dijagonali i izračunati determinantu dobijene matrice.

Primjer 5.3.12. (i) Razmotrimo operator projekcije $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$. Matrica operatora $\mathscr{P}$ u standardnoj bazi e je $P = P(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, pa je $P - tI = \begin{pmatrix} 1-t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}$. Dakle, karakteristični polinom operatora $\mathscr{P}$ je $\chi_{\mathscr{P}}(t) = \det(P - tI) = t^2 - t$. Svojstvene vrijednosti operatora $\mathscr{P}$ su korijeni njegovog karakterističnog polinoma, tj. rješenja jednačine $t^2 - t = 0$. Odavde nalazimo da $\mathscr{P}$ ima dvije svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = 1$.

(ii) Matrica operatora rotacije $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$ u standardnoj bazi je $R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, pa je $R_{\frac{\pi}{2}} - tI = \begin{pmatrix} -t & -1 \\ 1 & -t \end{pmatrix}$. Slijedi $\det(R_{\frac{\pi}{2}} - tI) = t^2 + 1$. Dakle, $\chi_{\mathscr{R}}(t) = t^2 + 1$ je karakteristični polinom operatora $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}}$. Kako jednačina $t^2 + 1 = 0$ nema rješenja u polju $\mathbb{R}$, operator $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}}$ nema svojstvenih vrijednosti.

(iii) Za operator diferenciranja $\mathscr{D} \in \mathcal{L}(M_n \to M_n)$ imamo

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad D - tI = \begin{pmatrix} -t & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -t & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -t \end{pmatrix}.$$

Odavde, $\chi_{\mathscr{D}}(t) = (-t)^{n+1} = 0$. Dakle, $\mathscr{D}$ ima jedinstvenu svojstvenu vrijednost $\lambda = 0$.

Koristeći teoremu 5.3.10, možemo naći svojstvene vrijednosti bilo kojeg linearnog operatora (pod uslovom da umijemo računati korijene polinoma). U višim dimenzijama korijene polinoma možemo lako naći uz pomoć računara. Sada ostaje drugi dio pitanja s početka sekcije: kako naći svojstvene vektore linearnog operatora? Pokazuje se da se ovaj zadatak, nakon nalaženja svojstvenih vrijednosti, svodi na zadatak koji nam je veoma dobro poznat: homogeni sistem linearnih jednačina.

Pretpostavimo da smo za linearni operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ našli njegovu svojstvenu vrijednost λ. Pogledajmo na koji način možemo naći svojstveni vektor x operatora $\mathscr{A}$, koji odgovara sopstvenoj vrijednosti λ. Iz jednakosti $\mathscr{A}x = \lambda x$ slijedi $(\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I})x = \theta$. Izaberimo neku bazu v u V, tada prethodnu jednakost možemo zapisati u koordinatnom obliku

$$(A(v) - \lambda I)x = \theta, \tag{5.8}$$

gdje je I jedinična matrica, $A(v)$ poznata matrica, a λ poznat broj. Dakle, pitanje nalaženja svojstvenog vektora x smo sveli na rješavanje homogenog sistema linearnih jednačina (5.8). Naravno, ovaj zadatak uvijek ima trivijalno rješenje $x = \theta$, ali je nama potrebno netrivijalno rješenje, jer je svojstveni vektor (po definiciji) različit od nule.

Sada se postavlja važno pitanje da li sistem (5.8) uvijek ima netrivijalno rješenje. Kako bismo odgovorili na to pitanje, podsjetimo se da smo svojstvenu vrijednost λ našli iz uslova $\det(A(v) - \lambda I) = 0$, tj. tako da matrica $A(v) - \lambda I$ bude singularna. Sada iz Teoreme 3.1.4 slijedi da sistem (5.8) uvijek ima netrivijalno rješenje. To rješenje i jeste svojstveni vektor x operatora $\mathscr{A}$. Dakle, sistem (5.8) ima netrivijalno rješenje samim tim što je λ svojstvena vrijednost za $\mathscr{A}$, ili, obratno, ako sistem (5.8) nema netrivijalno rješenje, to λ nije svojstvena vrijednost operatora $\mathscr{A}$.

Primjer 5.3.13. (i) Za $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$ smo odredili njegovu matricu u standarnoj bazi $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ i karakteristični polinom $\chi_{\mathscr{P}}(t) = t^2 - t$. Kako bismo našli svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = 1$, riješimo sistem $(P - 1 \cdot I)x = \theta$, tj. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dobijamo da su svojstveni vektori koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = 1$ svi vektori oblika $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, tj. vektori sa x-ose. Za drugu svojstvenu vrijednost, $\lambda = 0$ potrebno je riješiti sistem $(P - 0 \cdot I)x = Px = \theta$, tj. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Svojstveni vektori koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2 = 0$ su oblika $x = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$, tj. vektori sa y-ose.

(ii) Za operator $D \in \mathcal{L}(M_n \to M_n)$ imamo jedinstvenu svojstvenu vrijednost $\lambda = 0$, pa je za nalaženje svojstvenog vektora potrebno riješiti sistem linearnih jednačina:

$$(D - 0 \cdot I)a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rješenje ovog sistema su vektori sa koordinatama $a = \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, tj. polinomi oblika $p(t) = a_0 =$ const.

Napomena 5.3.14. Još jednom naglasimo da smo u svim primjerima u ovoj sekciji mogli izabrati bilo koje druge baze i raditi sa matricama operatora u tim bazama, to ne bi uticalo na svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore, zahvaljujući svojstvima sličnih matrica. Mi smo birali standardne baze isključivo iz razloga što je računanje u tim bazama lakše.

5.4 Svojstveni potprostor linearnog operatora

Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ i neka je λ svojstvena vrijednost operatora $\mathscr{A}$. Označimo sa

$$W_\lambda = \{v \in V : \mathscr{A}v = \lambda v\}$$

skup svih svojstvenih vektora operatora $\mathscr{A}$, koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti λ, pri čemu smo ovom skupu svojstvenih vektora pridružili i nula-vektor.

Teorema 5.4.1. *Skup W_λ je vektorski potprostor u V, invarijantan za operator $\mathscr{A}$.*

Dokaz. Neka su $v \in W_\lambda$ i $w \in W_\lambda$ proizvoljni vektori i neka je $\alpha \in \mathbb{P}$ proizvoljan skalar. Tada je $\mathscr{A}v = \lambda v$ i $\mathscr{A}w = \lambda w$. Slijedi $\mathscr{A}(v+w) = \mathscr{A}v + \mathscr{A}w = \lambda v + \lambda w = \lambda(v+w)$. Dakle, $v + w \in W_\lambda$. Sa druge strane je $\mathscr{A}(\alpha v) = \alpha\mathscr{A}v = \alpha(\lambda v) = \lambda(\alpha v)$, pa imamo i $\alpha v \in W_\lambda$. Ovim smo pokazali da je W_λ zaista vektorski potprostor u V.

Kako je $\mathscr{A}v = \lambda v \in W_\lambda$, $\forall v \in W_\lambda$, imamo da je potprostor W_λ invarijantan za $\mathscr{A}$. □

Definicija 5.4.2. W_λ se naziva svojstvenim potprostorom operatora $\mathscr{A}$ koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ.

Teorema 5.4.3. *Ako je λ korijen karakterističnog polinoma operatora $\mathscr{A}$ kratnosti k, tada je $\dim W_\lambda \leq k$.*

Dokaz. Neka je $\dim W_\lambda = l$. Izaberimo bazu $\{w_1, w_2, \ldots, w_l\}$ potprostora W_λ i dopunimo je do baze $w = \{w_1, \ldots, w_l, w_{l+1}, \ldots, w_n\}$ prostora V. Matrica operatora $\mathscr{A}$ u bazi w ima oblik (vidjeti Primjedbu iz Sekcije 5.1)

$$A(w) = \begin{pmatrix} P & Q \\ O & R \end{pmatrix},$$

gdje je matrica P formata $l \times l$ i dijagonalna:

$$P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Odavde imamo da je karakteristični polinom operatora $\mathscr{A}$ zadat sa:

$$\chi_{\mathscr{A}}(t) = \det(A(w) - tI) = (\lambda - t)^l \det(R - tI) = (\lambda - t)^l \phi(t),$$

gdje je $\phi(t) = \det(R - tI)$ polinom stepena $n - l$.

S druge strane, λ je korijen kratnosti k, pa je $\chi_{\mathscr{A}}(t) = (\lambda - t)^k \psi(t)$, pri čemu je $\psi(\lambda) \neq 0$. Dakle, $(\lambda - t)^l \phi(t) = (\lambda - t)^k \psi(t)$. Kako je $\psi(\lambda) \neq 0$ (dok $\phi(\lambda)$ može biti nula), zaključujemo da mora biti $l \leq k$. □

Definicija 5.4.4. Kratnost korijena λ polinoma $\chi_{\mathscr{A}}(t)$ se naziva algebarskom kratnošću svojstvene vrijednosti λ. Dimenzija svojstvenog potprostora W_λ koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ se naziva geometrijskom kratnošću svojstvene vrijednosti λ.

Prema terminologiji iz prethodne definicije, Teorema 5.4.3 tvrdi da je geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti manja ili jednaka od algebarske. U narednim primjerima ćemo vidjeti da je u nekim slučajevima geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti jednaka algebarskoj, dok je u drugim strogo manja.

Primjer 5.4.5. (i) Svojstvene vrijednosti operatora projekcije $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$ su $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = 1$. Obije svojstvene vrijednosti su algebarske kratnosti 1. Svi svojstveni vektori koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = 0$ su: $\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$, pa je $\dim W_{\lambda_1} = 1$. Svi svojstveni vektori koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2 = 0$ su: $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, pa je $\dim W_{\lambda_2} = 1$. Dakle, u ovom slučaju geometrijske i algebarske kratnosti svojstvenih vrijednosti su jednake.

(ii) Razmotrimo operator rotacije $\mathscr{R}_\pi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$ za ugao π. Matrica ovog operatora u standardnoj bazi e prostora $\mathbb{R}^2$ je $R_\pi(e) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, a njegov karakteristični polinom je $\chi_{\mathscr{R}}(t) = (t+1)^2$, pa je $\lambda_0 = -1$ svojstvena vrijednost kratnosti 2. Svojstveni vektori koji odgovaraju ovoj svojstvenoj vrijednosti su svi vektori u $\mathbb{R}^2$, pa je $\dim W_{\lambda_0} = 2$. Dakle, algebarska i geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti -1 su jednake 2.

(iii) Za operator diferenciranja $\mathscr{D} \in \mathcal{L}(M_n \to M_n)$ karakteristični polinom je $\chi_{\mathscr{D}}(t) = (-1)^{n+1}t^{n+1}$, pa on ima jedinstvenu svojstvenu vrijednost $\lambda_0 = 0$. Algebarska kratnost ove svojstvene vrijednosti je $n+1$, a njoj odgovaraju svojstveni vektori (polinomi) oblika $p(t) = \text{const}$, pa je $\dim W_{\lambda_0} = 1$. Dakle, geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti je 1. Ovaj primjer pokazuje da geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti može biti strogo manja od algebarske.

Teorema 5.4.6. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ i $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$. Tada u prostoru V postoji invarijantan potprostor za operator $\mathscr{A}$ dimenzije 1 ili 2.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da karakteristični polinom za $\mathscr{A}$ ima bar jedan korjen $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada je λ svojstvena vrijednost za operator $\mathscr{A}$ i operator $\mathscr{A}$ ima invarijantan potprostor dimenizije 1; ako je x svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ, tada je $W = \{\alpha x : \alpha \in \mathbb{R}\}$ invarijantan potprostor operatora $\mathscr{A}$ čija je dimenzija 1.

Pretpostavimo sada da karakteristični polinom za operator $\mathscr{A}$ nema nulu u polju $\mathbb{R}$. Pokazaćemo da tada postoji invarijantni potprostor za $\mathscr{A}$ dimenzije 2.

Definisaćemo vektorski prostor V' nad poljem $\mathbb{C}$: vektori prostora V' su parovi vektora iz V, tj. $V' = \{(x,y) : x \in V, y \in V\}$. Sabiranje vektora u V' i množenje skalarom su određeni na sljedeći način $(x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$ i $(a+ib)(x,y) = (ax-by, ay+bx)$. Neposredno se može provjeriti da je V' vektorski prostor nad poljem $\mathbb{C}$.

Uzmimo sada u obzir operator $\mathscr{A}' : V' \to V'$; $\mathscr{A}'(x,y) = (\mathscr{A}x, \mathscr{A}y)$, $\forall (x,y) \in V'$. Lako je pokazati da je $\mathscr{A}'$ linearan operator, tj. $\mathscr{A}' \in \mathcal{L}(V' \to V')$. Kako je polje kompleksih brojeva algebarski zatvoreno, karakteristični polinom za operator $\mathscr{A}'$ ima bar jednu nulu, a to znači da postoji bar jedna svojstvena vrijednost $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ za $\mathscr{A}'$. Neka je (x,y) odgovarajući svojstveni vektor. Tada je $\mathscr{A}'(x,y) = (\alpha+i\beta)(x,y)$, tj. $(\mathscr{A}x, \mathscr{A}y) = (\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x)$. Iz ove jednakosti imamo $\mathscr{A}x = \alpha x - \beta y$ i $\mathscr{A}y = \alpha y + \beta x$. Primjetimo sada da su oba vektora x i y različita od nula-vektora. Naime, ako bi neki od njih bio jednak nula-vektoru, imali bi da je $\alpha \in \mathbb{R}$ svojstvena vrijednost za operatora $\mathscr{A}$, a to smo pretpostavkom isključili.

Neka je W potprostor u V generisan vektorima x i y, tj. neka je $W = \mathrm{Lin}\{x, y\}$. Tada je W invarijantan potprostor za $\mathscr{A}$ (njegova dimenzija naravno nije veća od 2). Naime, ako su μ i ν proizvoljni skalari, tada imamo

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\mu x + \nu y) &= \mu\mathscr{A}x + \nu\mathscr{A}y\\ &= \mu(\alpha x - \beta y) + \nu(\alpha y + \beta x)\\ &= (\alpha\mu + \beta\nu)x + (\alpha\nu - \beta\mu)y \in \mathrm{Lin}\{x, y\}.\end{aligned}$$

Pokazaćemo još da je sistem $\{x, y\}$ linearno nezavisan i da je prema tome $\dim W = 2$. Primjetimo da mora biti $\beta \neq 0$, jer bi u suprotonom imali $\mathscr{A}x = \alpha x$, a kako je $x \neq \theta$ ponovo bi imali bi da je $\alpha \in \mathbb{R}$ svojstvene vrijednost operatora $\mathscr{A}$. Izjednačimo linearnu kombinaciju vektora x i y sa nula-vektorom, tj. neka je $\mu x + \nu y = \theta$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$. Ako djelujemo operatorom $\mathscr{A}$ na ovu jednakost, nalazimo $\mathscr{A}(\mu x + \nu y) = \mu\mathscr{A}x + \nu\mathscr{A}y = (\alpha\mu + \beta\nu)x + (\alpha\nu - \beta\mu)y = \theta$. Dakle, imamo $\mu x + \nu y = \theta$ i $(\alpha\mu + \beta\nu)x + (\alpha\nu - \beta\mu)y = \theta$. Prvu jednakost pomonožimo sa $-(\alpha\nu - \beta\mu)$, a drugu sa ν i potom ih saberimo. Lako dobijamo $\beta(\mu^2 + \nu^2)x = 0$. Kako je $\beta \neq 0$ i $x \neq 0$, imamo $\mu^2 + \nu^2 = 0$, pa je $\mu = \nu = 0$. Prema tome, sistem $\{x, y\}$ je zaista linearno nezavisan.

Ovim je teorema dokazana. Vidimo da u slučaju kada operator $\mathscr{A}$ ima svojstvenu vrijednost tada postoji invarijantni potprostor dimenzije 1, a ukoliko nema svojstvenih vrijednost, tada smo pokazali da postoji invarijantni potprostor dimenzije 2. □

5.5 Polinom od linearnog operatora. Teorema Hamiltona-Kejli

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{P}$ i neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$.

Definicija 5.5.1. Izraz

$$p(\mathscr{A}) = a_n\mathscr{A}^n + \alpha_{n-1}\mathscr{A}^{n-1} + \cdots + \alpha_2\mathscr{A}^2 + \alpha_1\mathscr{A} + \alpha_0\mathscr{I},$$

gdje je $a_j \in \mathbb{P}$, $j = \overline{0, n}$, $a_n \neq 0$, se naziva polinomom stepena n od linearnog operatora $\mathscr{A}$.

Primijetimo da je polinom od operatora takođe linearni operator, tj. $p(\mathscr{A}) \in \mathcal{L}(V \to V)$.

Teorema 5.5.2 (Hamilton-Kejli)**.** *Ako je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$, tada je $\chi_{\mathscr{A}}(\mathscr{A}) \equiv \mathscr{O}$, tj. svaki linearni operator je korijen svog karakterističnog polinoma.*

Dokaz. Neka je

$$\chi_{\mathscr{A}}(t) = \det(\mathscr{A} - t\mathscr{I}) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_{n-1}t^{n-1} + (-1)^n t^n$$

karakteristični polinom opertora $\mathscr{A}$. Treba pokazati da $\chi(\mathscr{A}) = \mathscr{O}$ (gdje je $\mathscr{O}$ je nula-operator).

Izaberimo bazu v u V i formirajmo matricu $A = A(v)$ operatora $\mathscr{A}$ u izabranoj bazi. Razmotrimo

$$A(t) = A - tI = \begin{pmatrix} \alpha_{11} - t & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - t & \dots & \alpha_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - t \end{pmatrix}$$

i formirajmo pridruženu (adjugovanu) matricu matrici $A(t)$:

$$B(t) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{21}(t) & \dots & A_{n1}(t) \\ A_{12}(t) & A_{22}(t) & \dots & A_{n2}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n}(t) & A_{2n}(t) & \dots & A_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Napomenimo da je $A_{ij}(t)$ algebarska dopuna elementa sa indeksima (j,i) matrice $A(t)$. Lako je zaključiti da su $A_{ij}(t)$ polinomi od t i to stepena $n-1$. Dakle, svi elementi matrice $B(t)$ su polinomi stepena $n-1$, pa se matrica $B(t)$ može zapisati na sljedeći način $B(t) = C_0 + C_1 t + \dots + C_{n-1}t^{n-1}$, gdje su $C_k \in \mathbb{P}^{n\times n}$, $k = \overline{0, n-1}$ matrice sastavljene od koeficijenata pored t^k u polinomima $A_{ij}(t)$. Iz svojstava pridruženih matrica imamo $A(t)B(t) = \det A(t) I$, tj.

$$(A - tI)(C_0 + C_1 t + \dots + C_{n-1}t^{n-1}) = (\alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_{n-1}t^{n-1} + (-1)^n t^n)I.$$

Posljednja jednakost dva polinoma stepena n se može zapisati kao $n+1$ jednakosti koeficijenata pored svih stepena t^k, $k = 0, 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} AC_0 &= \alpha_0 I && (5.0) \\ AC_1 - C_0 &= \alpha_1 I && (5.1) \\ AC_2 - C_1 &= \alpha_2 I && (5.2) \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ AC_{n-1} - C_{n-2} &= \alpha_{n-1} I && (5.n-1) \\ -C_{n-1} &= (-1)^n I && (5.n) \end{aligned}$$

Ako jednakost u $(5.k)$ pomnožimo s lijeve strane sa matricom A^k, $k = \overline{0, n}$ i ako sve saberemo dobijamo

$$\begin{aligned} O &= AC_0 + A^2C_1 - AC_0 + A^3C_2 - A^2C_1 + \dots + A^nC_{n-1} - A^nC_{n-1} \\ &= \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_{n-1}A^{n-1} + (-1)^n A^n = \chi_{\mathscr{A}}(A). \end{aligned}$$

Dakle, pokazali smo da je $\chi_{\mathscr{A}}(A)$ nula-matrica. Jednakost $\chi_{\mathscr{A}}(\mathscr{A}) = \mathscr{O}$ slijedi iz činjenice da je $\operatorname{rank}\chi_{\mathscr{A}}(\mathscr{A}) = \operatorname{rank}\chi_{\mathscr{A}}(A)$. $\square$

Primjer 5.5.3. Za operator projekcije $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$ karakteristični polinom je $\chi_{\mathscr{P}}(t) = t^2 - t$. Prema teorema Hamiltona-Kejli imamo da važi $\mathscr{P}^2 - \mathscr{P} = \mathscr{O}$, tj. $\mathscr{P}^2 = \mathscr{P}$. Nije teško vidjeti da operator projekcije zaista zadovoljava ovu jednakost. Takođe, možemo zapisati matricu P operatora $\mathscr{P}$ u nekoj bazi i uvjeriti se da važi matrična jednakost $P^2 - P = O$.

Glava 6

Žordanova forma linearnog operatora

U ovoj glavi podrazumjevamo da je V vektorski prostor nad poljem kompleksnih brojeva (skraćeno: kompleksan vektorski prostor).

6.1 Žordanova forma nilpotentnog operatora

Definicija 6.1.1. Linearni operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ se naziva nilpotentnim, ako postoji prirodan broj m tako da je $\mathscr{A}^m = \mathcal{O}$ (Oznaka $\mathcal{O}$ stoji za nula-operator).

Recimo, operator diferenciranja $\mathscr{D} \in \mathcal{L}(M_n \to M_n)$ je nilpotentan jer važi $\mathscr{D}^{n+1} = \mathcal{O}$.

Definicija 6.1.2. Kvadratna matrica oblika

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{k \times k}.$$

se naziva Žordanovom ćelijom formata k.

Primjetimo da je $J_k(0)$ nilpotentna matrica, jer je $J_k(0)^k = O$.

Teorema 6.1.3. *Operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ je nilpotentan ako i samo ako ima jedinstvenu svojstvenu vrijednost $\lambda = 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ nilpotentni operator i neka je $\mathscr{A}^m \equiv \mathcal{O}$. Pokazaćemo da $\mathscr{A}$ ne može imati svojstvenih vrijednosti različitih od nule. Zaista, neka je λ svojstvena vrijednost za $\mathscr{A}$ i neka je x odgovarajući svojstveni vektor. Tada je $\mathscr{A}^m x = \lambda^m x$. Međutim, $\mathscr{A}^m = \mathcal{O}$, pa mora biti $\lambda = 0$ (jer je $x \neq \theta$).

Obrnuto, ako je 0 jedina svojstena vrijednost operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$, tada je karakteristični polinom operatora za $\mathscr{A}$ jednak $\chi_{\mathscr{A}}(t) = (-1)^n t^n$, $n = \dim V$. Prema Hamilton-Kejijevoj teoremi imamo $(-1)^n \mathscr{A}^n \equiv \mathcal{O}$, tj. operator $\mathscr{A}$ je nilpotentan. $\square$

Teorema 6.1.4. *Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ nilpotentan operator. Tada postoji baza h u prostoru V takva da matrica operatora $\mathscr{A}$ ima sljedeći oblik:*

$$A(h) = \begin{pmatrix} J_{k_1}(0) & O & \dots & O \\ O & J_{k_2}(0) & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & J_{k_p}(0) \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

gdje su $J_{k_1}(0), J_{k_2}(0), \dots, J_{k_p}(0)$ Žordanove ćelije formata $k_1, k_2, \dots, k_p$ respektivno, pri čemu je $k_1 + k_2 + \dots + k_p = n = \dim V$.

Dokaz. Postoji prirodan broj m, tako da $\mathscr{A}^m = \mathcal{O}$ i $\mathscr{A}^{m'} \neq \mathcal{O}$ ako je $m' < m$. Razmotrićemo niz operatora:

$$\mathscr{I} = \mathscr{A}^0, \mathscr{A} = \mathscr{A}^1, \mathscr{A}^2, \dots, \mathscr{A}^{m-1}, \mathscr{A}^m = \mathcal{O}.$$

Tada za potprostore $V_j = \operatorname{Ker} \mathscr{A}^j$, $j = \overline{0, m}$ važi:

(i) $V_{j-1} \subseteq V_j$, $j = \overline{1, m}$;

(ii) V_j je invarijantan za $\mathscr{A}$.

Naime, $x \in V_{j-1} \Rightarrow \mathscr{A}^{j-1}x = \theta \to \mathscr{A}^j = \mathscr{A}(\mathscr{A}^{j-1}x) = \mathscr{A}\theta = \theta \Rightarrow x \in \operatorname{Ker} \mathscr{A}^j = V_j$.

Pokažimo sada da je V_j invarijantan potprostor za $\mathscr{A}$: $x \in V_j \Rightarrow \mathscr{A}^j x = \theta \Rightarrow \mathscr{A}^{j-1}(\mathscr{A}x) = \theta \Rightarrow \mathscr{A}x \in \operatorname{Ker} \mathscr{A}^{j-1} = V_{j-1} \subseteq V_j$.

Prema (i) imamo: $\{\theta\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots \subseteq V_{m-2} \subseteq V_{m-1} \subseteq V_m = V$.

Korak I. Ako je $m \geq 2$ (tj. ako operator A nije nula-operator) uočimo tri posljednja potprostora $V_{m-2} \subseteq V_{m-1} \subseteq V_m = V$ i neka je

$$V_m = V_{m-1} \oplus V'_{m-1},$$

tj. neka je V'_{m-1} direktna dopuna potprostora V_{m-1} do prostora V_m. Kako je $\mathscr{A}^m = \mathcal{O}$ i $\mathscr{A}^{m-1} \neq \mathcal{O}$, imamo $V_{m-1} \neq V_m$ i, dakle, $V'_{m-1} \neq \{\theta\}$.

Izaberimo bazu $\{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ u V'_{m-1}. Sistem vektora $\{\mathscr{A}v_1, \mathscr{A}v_2, \dots, \mathscr{A}v_s\} \subseteq V_{m-1}$ je linearno nezavisani i važi

$$\operatorname{Lin}\{\mathscr{A}v_1, \mathscr{A}v_2, \dots, \mathscr{A}v_s\} \cap V_{m-2} = \{\theta\}.$$

Naime, neka je $\alpha_1\mathscr{A}v_1 + \alpha_2\mathscr{A}v_2 + \dots + \alpha_s\mathscr{A}v_s = v \in V_{m-2}$. Pokazaćemo da je tada $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_s = 0$ i prema tome je $v = \theta$.

Kako je $V_{m-2} = \operatorname{Ker} \mathscr{A}^{m-2}$, imamo $\mathscr{A}^{m-2}v = \theta$, tj. $\mathscr{A}^{m-2}(\alpha_1\mathscr{A}v_1 + \alpha_2\mathscr{A}v_2 + \dots + \alpha_s\mathscr{A}v_s) = \mathscr{A}^{m-2}v = \theta$. Odavde je $\alpha_1\mathscr{A}^{m-1}v_1 + \alpha_2\mathscr{A}^{m-1}v_2 + \dots + \alpha_s\mathscr{A}^{m-1}v_s = \theta$, tj. $\mathscr{A}^{m-1}(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_s v_s) = \theta$, odnosno $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_s v_s \in V_{m-1}$. Kako vektori $v_1, v_2, \dots, v_s$ leže u V'_{m-1}, to je $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_s v_s \in V'_{m-1}$. No, $V_{m-1} \cap V'_{m-1} = \{\theta\}$, pa mora biti $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_s v_s = \theta$. Sada iz linearne nezavisnosti sistema vektora $\{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ slijedi $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_s = 0$, pa i $v = \theta$.

Primijetimo da je sistem vektora:

$$\begin{array}{r|l} V'_{m-1} \supseteq & \{v_1, v_2, \dots, v_s\} \cup \\ V_{m-1} \supseteq & \{\mathscr{A}v_1, \mathscr{A}v_2, \dots, \mathscr{A}v_s\} \end{array}$$

linearno nezavisan, budući da su podsistemi $\{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ i $\{\mathscr{A}v_1, \mathscr{A}v_2, \ldots, \mathscr{A}v_s\}$ linearno nezavisni i leže respektivno u prostorima V'_{m-1} i V_{m-1} u čijem je presjeku samo nula-vektor.

Korak II. Ako je $m \geq 3$, razmotrimo potprostore $V_{m-3} \subseteq V_{m-2} \subseteq V_{m-1}$.

Vektori $\mathscr{A}v_1, \mathscr{A}v_2, \ldots, \mathscr{A}v_s$ leže u V_{m-1} i kako smo pokazali ne leže u V_{m-2}, pa je $V_{m-1} \neq V_{m-2}$ i znači $V_{m-1} = V_{m-2} \oplus V'_{m-2}$, gdje je $V'_{m-2} \neq \{\theta\}$ dopuna potprostora V_{m-2} do prostora V_{m-1}. Pri tome V'_{m-2} možemo izabrati tako da sadrži linearno nezavisan sistem vektora $\{\mathscr{A}v_1, \mathscr{A}v_2, \ldots, \mathscr{A}v_s\}$. Dopunimo (ako je potrebno) ovaj linearno nezavisan sistem vektora do baze $\{\mathscr{A}v_1, \ldots, \mathscr{A}v_s, v_{s+1}, \ldots, v_r\}$ u V'_{m-2}. Vektori $\mathscr{A}^2v_1, \ldots, \mathscr{A}^2v_s, \mathscr{A}v_{s+1}, \ldots, \mathscr{A}v_r$ prema svojstvu (i) leže u potprostoru V_{m-2}. Pokažimo da su oni linearno nezavisni i da je

$$\mathrm{Lin}\{\mathscr{A}^2v_1, \ldots, \mathscr{A}^2v_s, \mathscr{A}v_{s+1}, \ldots, \mathscr{A}v_r\} \cap V_{m-3} = \{\theta\}.$$

Neka je $\beta_1\mathscr{A}^2v_1 + \cdots + \beta_s\mathscr{A}^2v_s + \beta_{s+1}\mathscr{A}v_{s+1} + \cdots + \beta_r\mathscr{A}v_r = w \in V_{m-3}$. Kako je $V_{m-3} = \operatorname{Ker}\mathscr{A}^{m-3}$, imamo $\mathscr{A}^{m-3}w = \theta$. Odavde je

$$\mathscr{A}^{m-2}(\beta_1\mathscr{A}e_1 + \cdots + \beta_s\mathscr{A}e_s + \beta_{s+1}e_{s+1} + \cdots + \beta_re_r) = \mathscr{A}^{m-3}w = \theta.$$

Dakle, $\beta_1\mathscr{A}v_1 + \cdots + \beta_s\mathscr{A}v_s + \beta_{s+1}v_{s+1} + \cdots + \beta_rv_r \in V_{m-2}$. S druge strane, ovaj vektor leži u V'_{m-2}, jer vektori $\mathscr{A}e_1, \ldots, \mathscr{A}e_s, e_{s+1}, \ldots, e_r$ leže u V'_{m-2}. Kako je $V_{m-2} \cap V'_{m-2} = \{\theta\}$, imamo $\beta_1\mathscr{A}e_1 + \cdots + \beta_s\mathscr{A}e_s + \beta_{s+1}e_{s+1} + \cdots + \beta_re_r = \theta$. Pošto su vektori $\mathscr{A}e_1, \ldots, \mathscr{A}e_s, e_{s+1}, \ldots, e_r$ linearno nezavisni, mora biti $\beta_1 = \cdots = \beta_s = \beta_{s+1} = \cdots = \beta_r = 0$ i $w = \theta$.

Primijetimo da je sistem vektora:

$$\begin{array}{r|l} V'_{m-1} \supseteq & \{v_1, \ldots, v_s\} \cup \\ V'_{m-2} \supseteq & \{\mathscr{A}v_1, \ldots, \mathscr{A}v_s, v_{s+1}, \ldots, v_r\} \cup \\ V_{m-2} \supseteq & \{\mathscr{A}^2v_1, \ldots, \mathscr{A}^2v_s, \mathscr{A}v_{s+1}, \ldots, \mathscr{A}v_r\} \end{array}$$

linearno nezavisan, budući da sistemi vektora $\{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$, $\{\mathscr{A}v_1, \mathscr{A}v_2, \ldots, \mathscr{A}v_s, v_{s+1}, \ldots, v_r\}$ i $\{\mathscr{A}^2v_1, \mathscr{A}^2v_2, \ldots, \mathscr{A}^2v_s, \mathscr{A}v_{s+1}, \ldots, \mathscr{A}v_r\}$ jesu linearno nezavisni i leže respektivno u potprostorima V'_{m-1}, V'_{m-2} i V_{m-2}, čija je direktna suma V, tj. $V = V_{m-2} \oplus V'_{m-2} \oplus V'_{m-1}$. Kako je suma direkta presjek svaka dva različita potprostora je samo nula-vektor.

Ako je $m \geq 4$ razmotrimo trojku potprostora $V_{m-4} \subseteq V_{m-3} \subseteq V_{m-2}$ i nastavimo isti algoritam kao u prethodnom koraku. Broj ovakvih koraka je konačan, jer je prostor V konačnodimenzionalan.

Dakle, nakon konačnog broja koraka doći ćemo sljedećih direktnih dekompozicija:
$V = V_m$;
$V_m = V_{m-1} \oplus V'_{m-1}$;
$V_{m-1} = V_{m-2} \oplus V'_{m-2}$;
$V_{m-2} = V_{m-3} \oplus V'_{m-3}$;
$\ldots$
$V_1 = V_0 \oplus V'_0$;
$V_0 = \{\theta\}$,
i do baze u prostoru V, koja ćemo podjeliti po kolonomu u sljedećoj tablici:

V'_{m-1}	v_1	$\ldots$	v_s							
V'_{m-2}	$\mathscr{A}v_1$	$\ldots$	$\mathscr{A}v_s$	v_{s+1}	$\ldots$	v_r				
V'_{m-3}	$\mathscr{A}^2v_1$	$\ldots$	$\mathscr{A}^2v_s$	$\mathscr{A}v_{s+1}$	$\ldots$	$\mathscr{A}v_r$	v_{r+1}	$\ldots$	v_t	
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	
V'_0	$\mathscr{A}^{m-1}v_1$	$\ldots$	$\mathscr{A}^{m-1}v_s$	$\mathscr{A}^{m-2}v_{s+1}$	$\ldots$	$\mathscr{A}^{m-2}v_r$	$\mathscr{A}^{m-3}v_{r+1}$	$\ldots$	$\mathscr{A}^{m-3}v_t$	$\ldots$

Razmotrimo sada svojstva sistema vektora iz posljednje tablice:

(1) Svaki vektor iz posljednje vrste tablice se pod dejstvom operatora $\mathscr{A}$ slika u nula-vektor. Drugim riječima, u posljednjoj vrsti se nalaze svojstveni vektori operatora $\mathscr{A}$ (podsjetimo da je jedina svojstvena vrijednost operatora $\mathscr{A}$ nula).

(2) Izaberimo proizvoljnu kolonu tablice. Neka je indeks izabrane kolone i i neka ona sadrži k vektora. Numerišimo vektore iz ove kolone redom odozdo prema gore:

$$h_1 = \mathscr{A}^{k-1}v_i,\ h_2 = \mathscr{A}^{k-2}v_i, \dots h_{k-1} = \mathscr{A}v_i,\ h_k = v_i.$$

Sada se lako provjerava da važi:

(a) Sistem vektora $\{h_1, h_2, \dots, h_k\}$ je linearno nezavisan;

(b) $\mathscr{A}h_1 = \theta, \mathscr{A}h_2 = h_1, \dots, \mathscr{A}h_k = h_{k-1}$;

(c) Potprostor $W = \mathrm{Lin}\{h_1, h_2, \dots, h_k\}$ je invarijantan za operator $\mathscr{A}$;

(d) Matrica suženog operatora $\mathscr{A}|_W$ u bazi $\{h_1, h_2, \dots, h_k\}$ je Žordanova ćelija $J_k(0)$.

Na kraju numerišimo vektore tablice počevši od prve kolone redom, odozdo prema gore. Nao ovaj način dobijen sistem h je baza u kojoj matrica nilpotentnog operatora $\mathscr{A}$ ima oblik (6.1). □

Primjedba 6.1.5. (i) Iz prethodnog dokaza, prema konstrukciji baze h, slijedi da svakoj koloni u tablici odgovara jedna Žordanova ćelija $J_k(0)$.

(ii) Prilikom konstrukcije baze h moguće su različite numeracije kolona, tj. različite numeracije svojstvenih vektora u posljednjoj vrsti. Iz dokaza je jasno da različite numeracije kolona dovode do zamjene Žordanovih ćelija mjestima.

Prethodna primjedba nam dozvoljava da izvučemo sljedeće zaključke:

(i) Žordanova forma operatora je jedinstvena do na zamjenu mjesta Žordanovih ćelija;

(ii) Matrice su slične ako i samo ako imaju istu Žordanovu formu (do na zamjenu mjesta Žordanovim ćelijama).

6.2 Žordanova forma opšteg linearnog operatora

Sada se osvrnimo na opšti slučaj, tj. kada operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ nije obavezno nilpotentan. Najprije razmotrimo slučaj kada operator ima jedinstvenu svojstvenu vrijednost.

Lema 6.2.1. *Neka je V kompleksan vektorski prostor i λ jedinstvena svojstvena vrijednost operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$. Tada u prostoru V postoji baza h u kojoj matrica operatora $\mathscr{A}$ ima oblik:*

$$A(h) = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda) & O & \dots & O \\ O & J_{k_2}(\lambda) & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & J_{k_p}(\lambda) \end{pmatrix},$$

Dokaz. Primijetimo da je operator $\mathscr{B} = \mathscr{A} - \lambda\mathscr{I}$ nilpotentan. Prema prethodnoj teoremi postoji baza h u kojoj matrica operatora $\mathscr{B}$ ima oblik (6.1). Kako je $A(h) = B(h) + \lambda I$ slijedi tvrđenje Leme. □

Teorema 6.2.2. *Neka je V kompleksan vektorski prostor i $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ operator čiji je karakteristični polinom:*

$$\chi_{\mathscr{A}}(t) = (-1)^n (t - \lambda_1)^{l_1} (t - \lambda_2)^{l_2} \cdots (t - \lambda_k)^{l_k},$$

gdje su $l_1, l_2, \dots, l_k$ algebarske kratnosti svojstvenih vrijednosti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, redom; $l_1 + l_2 + \cdots + l_k = n = \dim V$. Tada postoji baza h u V takva da je

$$A(h) = \begin{pmatrix} A_1 & O & \dots & O \\ O & A_2 & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & A_k \end{pmatrix},$$

gdje kvadratne matrice $A_1, A_2, \dots, A_k$ imaju sljedeći oblik:

$$A_i = \begin{pmatrix} J_{i_1}(\lambda_i) & O & \dots & O \\ O & J_{i_2}(\lambda_i) & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & J_{i_p}(\lambda_i) \end{pmatrix},$$

$i_1 + i_2 + \cdots + i_m = l_i$, $i = 1, \dots, k$.

Dokaz. Neka je $\mathscr{B} \in \mathcal{L}(V \to V)$ i označimo $K_j = \operatorname{Ker} \mathscr{B}^j$ i $L_j = \operatorname{Im} \mathscr{B}^j$ za cijele brojeve $j \geq 0$. Jasno je da je K_j, $j \geq 0$, rastući niz potprostora, a da je L_j, $j \geq 0$ opadajući niz potprostora. Budući da je V konačne dimenzije, to postoji cio broj $j_0 \geq 0$ takav da je $K_j = K_{j_0}$ i takođe $L_j = L_{j_0}$, $j \geq j_0$.

Neka je $N = K_{j_0}$ i $M = L_{j_0}$. Tada su N i M invarijantni potprostori za operator $\mathscr{B}$. Pokazaćemo da je $M \oplus N = V$. Naime, kako je $\mathscr{B}(M) = M$, suženi operator $\mathscr{B}|_M : M \to M$ jeste invertibilan. Takođe imamo $\mathscr{B}^{j_0} x \neq \theta$, ako je $x \in M$ i $x \neq \theta$. Kako je suženi operaor $\mathscr{B}|_N : N \to N$ jednak nula-operatoru, slijedi da je presjek N i M samo nula-vektor. Neka je $x \in V$ proizvoljan vektor i $\mathscr{B}^{j_0} x = y \in M$. Kako je $\mathscr{B}^{j_0}|_M$ invertibilan, postoji $z \in M$ tako da je $\mathscr{B}^{j_0} x = \mathscr{B}^{j_0} z$. Sada imamo $x = (x - z) + z$, pri čemu je $x - z \in N$ i $z \in M$. Ovim smo pokazali da je suma potprostora N i M jedanka V.

Prethodno možemo primjeniti prvo za operator $\mathscr{B} = \mathscr{A} - \lambda_1 \mathscr{I}$. Dobijamo razlganje prostora V na deirektnu sumu $N_1 \oplus M_1$, pri čemu su N_1 i M_1 invarijantni potprostori za operator $\mathscr{A} - \lambda_1 \mathscr{I}$, a to znači i za sam operator $\mathscr{A}$. Razmotrimo sada operator $\mathscr{A} - \lambda_2 \mathscr{I} : M_1 \to M_1$. Tada dolazimo do razlaganja prostora $M - 1$ na direktnu sumu $M_1 = N_2 + M_2$ na početku opisan način. Pri tome su N_2 i M_2 takođe invarijanti potprostori za operator $\mathscr{A}$. Potom nastavimo sa direktim razlaganjem prostora M_2 posmatrajući $\mathscr{A} - \lambda_3 \mathscr{I}$ na M_2. Na kraju postupka ponovimo isto za $\mathscr{A} - \lambda_k \mathscr{I}$ na potprostor M_{k-1}. Taj prostor se razlaže na direktnu sumu $M_{k-1} = N_k \oplus M_k$. Pokazaćemo da je M_k trivijalan potprostor.

Na opisan način dobijamo direktnu dekompoziciju $V = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_k \oplus M_k$ na invarijantne potprostore operatora $\mathscr{A}$. Primijetimo da suženi operator $\mathscr{A}|_{N_j}$ ima jedinu svojstvenu vrijednost λ_j i prostor N_j sadrži sve svojstvene vektore koji odgovaraju λ_j. Dakle, M_k mora biti trivijalan potprostor, jer bi se u protivnom za operator $\mathscr{A}$ pojavila nova svojstvena vrijednost ili svojstveni vektor koji odgovara nekoj od svojstvenih vrijednosti λ_j. Karakteristični poilonom za suženi operator $\mathscr{A}|_{N_j}$ je jednak $\pm(x-\lambda_j)^{l'_j}$, gdje je $l'_j = \dim N_j$. Kako mora biti $l'_j \leq l_j$ imamo $\sum_{j=1}^{k} l'_j \leq n$. ako bi važila stroga nejednakost $l'_j < l_j$ za neko j, tada bi bilo $\sum_{j=1}^{k} l'_j < n$. A to pritvrječi tome da je $\sum_{j=1}^{k} l'_j = n$.

Sada preostaje da se primjeni prethodna lema na svaki suženi operator $\mathscr{A}|_{N_j}$, $j = \overline{1,k}$. □

Definicija 6.2.3. Bazu u kojoj matrica operatora ima oblik Žordanove forme ćemo nazivati kanonskom bazom.

Primjer 6.2.4. Naći kanonsku bazu i Žordanovu formu matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Karakteristični polinom je zadat sa $\chi_A(t) = \det(A - tI) = -(t-3)(t-2)^2$, pa su svojstvene vrijednosti matrice $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$. Prva svojstvena vrijednost ima algebarsku kratnost 1, a druga kratnost 2.

Pošto je svojstvena vrijednost $\lambda_1 = 3$ algebarske kratnosti 1, to možemo tvrditi da njoj odgovara tačno jedan linearno nezavisni svojstveni vektor zadat jednakošću $Ah_1 = 3h_1$. Ovom svojstvenom vektoru će odgovarati jedna (jednodimenzionalna) Žordanova ćelija.

S druge strane, svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2 = 2$ može odgovarati jedan ili dva linearno nezavisna svojstvena vektora. Ove dvije moguće situacije možemo prikazati u obliku sljedećih dijagrama:

$$\begin{array}{cc} & \cdot h_3 \\ h_1\cdot & \cdot h_2 \end{array} \qquad ili \qquad \begin{array}{ccc} h_1 & h_2 & h_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Tačkice u donjim vrstama stoje umjesto svojstvenih vektora.

U drugom slučaju, matrica A ima tri linearno nezavisna svojstvena vektora, pa je to matrica proste strukture (baza od svojstvenih vektora) i njena Žordanova forma će biti dijagonalnog oblika (imaće tri jednodimenzionalne Žordanove ćelije). Pri tome će kanonsku bazu činiti svojstveni vektori h_1, h_2, h_3.

U prvom slučaju, matrica će imati dva svojstvena vektora h_1, h_2, a treći vektor iz kanonske baze ćemo tražiti iz jednakosti $(A - \lambda_2 I)h_3 = h_2$.

Kako bismo razjasnili koji od ova dva slučaja ima mjesto, dovoljno je provjeriti rang matrice $A - \lambda_2 I$. Ukoliko je rang ove matrice 1, to bi značilo da svojstvenoj vrijednosti λ_2 odgovaraju $3-1=2$ linearno nezavisna svojstvena vektora h_2 i h_3, pa bi imao mjesto drugi slučaj. Ukoliko, naprotiv, $rank(A - \lambda_2 I) = 2$, to ima mjesto prvi slučaj.

Lako je provjeriti da $rank(A-2I) = 2$, što znači da ima mjesto lijevi dijagram i Žordanova forma sadrži dvije ćelije:

$$A\,(h) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Prva dva vektora u kanonskoj bazi su svojstveni vektori matrice A: $(A-3I)h_1 = 0$, $(A-2I)h_2 = 0$. Vektor h_3 ćemo dobiti iz jednakosti $(A - 3I)h_3 = h_2$.

Iz jednakosti $(A - 3I)h_1 = 0$ nalazimo $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dalje, iz $(A-2I)h_2 = 0$ imamo $h_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Konačno jednakost $(A-2I)h_3 = h_2$ vodi nehomogenom sistemu linearnih jednačina

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {h_3}^1 \\ {h_3}^2 \\ {h_3}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rješavanjem ovog sistema dobijamo $h_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Primijetimo da je moguća i drugačija numeracija vektora baze, u kojoj bi ćelije u Žordanovoj formi matrice zamijenile mjesta:

$$A(h) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Primjer 6.2.5. Neka je $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(M_2 \to M_2)$ zadat sa $\mathcal{T}f = -f - f'$. Naći Žordanovu formu $T(h)$ matrice operatora $\mathcal{T}$.

Najprije zapišimo matricu operatora u odnosu na bazu $g = \{1, t, t^2\}$. Imamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}1 &= -1; \\ \mathcal{T}t &= -t - 1; \\ \mathcal{T}t^2 &= -t^2 - 2t, \end{aligned}$$

pa je matrica operatora

$$T = T(g) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Karakteristični polinom operatora je $\chi_{\mathcal{T}}(t) = (-1-t)^3$, pa je $\lambda_1 = -1$ svojstvena vrijednost algebarske kratnosti 3. Dakle, operator $\mathcal{T}$ može imati 1, 2 ili 3 linearno nezavisna svojstvena vektora. Ovim trima situacijama odgovaraju sljedeći dijagrami:

$$\begin{array}{lclcl} \cdot h_3 & & & & \\ \cdot h_2 & & \quad\ \ \cdot h_3 & & h_1 \quad h_2 \quad h_3 \\ \cdot h_1 & \textit{ili} & h_1 \cdot \ \ \cdot h_2 & \textit{ili} & \ \cdot \quad\ \ \cdot \quad\ \ \cdot \end{array}$$

U zavisnosti od toga koja od ovih situacija ima mjesto, Žordanova forma se može sadržati 1, 2 ili 3 ćelije:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lako je izračunati da $\operatorname{rank}(A - (-1)I) = 2$ odakle slijedi da ima mjesto prva situacija.

Glava 7

Euklidski prostori

U prethodnom izlaganju koristili smo isključivo one operacije nad vektorima koje su prisutne u definiciji vektorskog prostora. Na ovaj način smo razvili sadržajnu teoriju, ali nismo dotakli neke važne pojmove. Na primjer, do sada ne raspolažemo pojmom dužine vektora ili pojmom ugla između dva vektora. U ovom poglavlju ćemo uvesti skalarno množenja dva vektora i time obogatiti strukturu vektorskog prostora. Koristeći tu bogatiju strukturu, uvešćemo nove pojmove i razviti još sadržajniju teoriju u narednim poglavljima.

7.1 Skalarni proizvod

Definicija 7.1.1. Neka je V vektorski prostor nad poljem relanih brojeva. Preslikavanje $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ nazivamo skalarnim proizvodom ako važe sljedeće aksiome:
(i) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, $\forall x, y \in V$;
(ii) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$, $\forall x, y \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$;
(iii) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$, $\forall x, y, z \in V$;
(iv) $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\forall x \in V$; $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

Neposredno se provjerava da pored osnovnih svojstava navedenih u samoj definiciji, skalarni proizvod ima i ove osobine:
(v) $\langle \theta, x \rangle = 0$, $\forall x \in V$;
(vi) $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$, $\forall x, y \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$;
(vii) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$, $\forall x, y, z \in V$.

Definicija 7.1.2. Vektorski prostor E nad poljem relanih brojeva nazivamo euklidskim ako je u E definisan skalarni proizvod.

Primjer 7.1.3. U svakom vektorskom prostoru V nad poljem $\mathbb{R}$ može se uvesti skalarni proizvod. Naime, neka je $\dim V = n$ i neka je $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ baza u V. Za $x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \in V$ i $y = \sum_{i=1}^{n} y_i v_i \in V$ definišimo

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Provjerićemo sve osobine o kojima je riječ u definiciji skalarnog proizvoda.

(i) $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \langle y, x\rangle$;

(ii) $\langle \alpha x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i) y_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \alpha\langle x, y\rangle$;

(iii) $\langle x+y, z\rangle = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) z_i = \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i z_i = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$;

(iv) $\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$, $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = \theta$.

Posebno, ako u prostoru $\mathbb{R}^n$ uzmemo u obzir standardnu bazu $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, gdje je $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\ldots$, $e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, tada u prostoru $\mathbb{R}^n$ imamo skalarni proizvod:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Recimo, skalarni proizvod vektora $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ i $y = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ je

$$\langle x, y\rangle = 1 \cdot 7 + 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 4 = 3.$$

Primjer 7.1.4. Razmotrimo trodimenzionalni prostor geometrijskih vektora V^3. Za $\vec{a}$, $\vec{b} \in V^3$ uvedimo skalarno množenje na sljedeći način:

$$\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Može se provjeriti da su zadovoljene sve četiri aksiome skalarnog proizvoda. Uvodeći skalarni proizvod na ovaj način, vektorski prostor V^3 postaje euklidski prostor.

Teorema 7.1.5. *Za vektore $x, y \in E$ euklidskog prostora važi nejednakost Koši-Švarca-Bunjakovskog*

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle, \tag{7.1}$$

pri čemu jendakost ima mjesta ako i samo ako su vektori linearno zavisni.

Dokaz. Ako su vektori x i y linearno zavisni, tada je lako provjeriti da vrijedi jednakost.

Pretpostavimo sada da su vektori x i y linearno nezavisni. Kako je tada $tx - y \neq 0$ za sve $t \in \mathbb{R}$, imamo $\langle tx - y, tx - y\rangle > 0$. Ova nejednakost može se napisati u formi

$$t^2\langle x, x\rangle - 2t\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle > 0.$$

Dakle, nalazimo da je $t^2 \langle x, x\rangle - 2t \langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle$ pozitivna kvadratna funkcija (po promjenljivoj t). Da bi to bilo ispunjeno, diskriminanta mora da bude negativna, tj. $4\langle x, y\rangle^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle < 0$, odnosno mora biti $\langle x, y\rangle^2 < \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle$. □

Primjetimo da se nejednakost (7.1) može zapisati u formi $\det \begin{pmatrix} \langle x,x\rangle & \langle x,y\rangle \\ \langle y,x\rangle & \langle y,y\rangle \end{pmatrix} \geq 0.$

Definicija 7.1.6. Dužinom vektora $x \in E$ u euklidskom prostoru E nazivamo broj

$$|x| = \sqrt{\langle x,x\rangle}.$$

Teorema 7.1.7. *Dužina vektora ima naredne osobine:*
(i) $|x| \geq 0,\ x \in E;$
(ii) $|x| = 0 \iff x = 0;$
(iii) $|\lambda x| = |\lambda||x|,\ x \in E,\ \lambda \in \mathbb{R};$
(iv) $|x+y| \leq |x| + |y|,\ x, y \in E,$ *pri čemu jednakost važi ako i samo ako je* $x = \theta$ *ili je* $x \neq \theta$ *i* $y = tx,\ t \geq 0.$

Dokaz. (i) i (ii) slijede nepsredno iz same definicije skalarnog proizvoda.
(iii)

$$|\lambda x| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x,x\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle x,x\rangle} = |\lambda||x|.$$

(iv) Kako je

$$|x+y|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle = |x|^2 + 2\langle x,y\rangle + |y|^2,$$

primjenom nejednakosti Koši-Švarc-Bunjakovski nalazimo

$$|x+y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2.$$

Pretpostavimo da je $|x+y| = |x| + |y|$. Tada x i y moraju biti linearno zavisni vektori, odnosno mora biti $x = \theta$ ili $x \neq \theta$ i $y = tx,\ t \in \mathbb{R}$. Razmotrimo drugi slučaj. Tada je $x + y = (t+1)x$, pa jednakost $|x+y| = |x| + |y|$ postaje $|t+1||x| = (1+|t|)|x|$. Prema tome je $|t+1| = 1 + |t|$, a to je moguće samo ako je $t \geq 0$. □

Definicija 7.1.8. Uglom između vektora x i y euklidskog prostora E nazivamo broj $\phi \in [0, \pi]$ takav da je

$$\cos\phi = \frac{\langle x,y\rangle}{|x|\,|y|}.$$

Definicija 7.1.9. Kažemo da su vektori x i y u euklidskom prostoru E ortogonalni, ako važi $\langle x,y\rangle = 0$, tj. ako je ugao između njih jedank $\frac{\pi}{2}$.
Oznaka: $x \perp y$.

Na kraju ove sekcije primjetimo da iz četvrte aksiome skalarnog proizvoda slijedi da je samo vektor $x = \theta$ ortogonalan na sve vektore euklidskog prostora E. Naime, ako je $\langle x,y\rangle = 0$, $\forall y \in E$, tada prethodna jednakost važi i za $y = x$. Dakle, imamo $\langle x,x\rangle = 0$, a to znači da mora biti $x = \theta$.

7.2 Ortonormirani sistemi

Definicija 7.2.1. Sistem vektora $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ euklidskog prostora E nazivamo ortogonalnim sistemom ako važi $f_i \perp f_j$, $\forall i, j = \overline{1, m}$, $i \neq j$.

Definicija 7.2.2. Ortogonalni sistem vektora $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ euklidskog prostora E nazivamo ortonormiranim sistemom ako važi $|e_i| = 1$, $\forall i = \overline{1, m}$.

Dakle, sistem vektora $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ u euklidskom prostoru E je ortonormirani sistem ako važi

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j, \end{cases} \quad \forall i, j = \overline{1, m}$$

(δ_{ij} se naziva simbolom Kronekera).

Lema 7.2.3. *Ako je $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ ortonormirani sistem vektora u euklidskom prostoru E i $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i$, tada je*

$$\alpha_i = \langle x, e_i \rangle, \quad \forall i = \overline{1, m}.$$

Dokaz. Zaista, imamo

$$\alpha_i = \alpha_i \langle e_i, e_i \rangle = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \langle e_j, e_i \rangle = \langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j, e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle.$$

□

Teorema 7.2.4. *Svaki ortonormirani sistem vektora je linearno nezavisan.*

Dokaz. Neka je $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ ortonormirani sistem i $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_m e_m = \theta$. Na osnovu prethode leme je $\alpha_i = \langle \theta, e_i \rangle = 0$, $\forall i = \overline{1, m}$, pa možemo zaključiti da je naš sistem zaista linearno nezavisan. □

Napomenimo da za ortonormirani sistem vektora $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ kažemo da je ortonormirana baza euklidskog prostora E ako je $\mathrm{Lin}\{e_1, e_2, \dots, e_n\} = E$.

Teorema 7.2.5. *U svakom euklidskom prostoru postoji ortonormirana baza.*

Dokaz. Dokaz ćemo izvesti indukcijom po dimenziji n euklidskog prostora E.

Ako je $n = 1$ i ako je $x \neq 0$ proizvoljan vektor, tada je $\{e\}$, gdje je $e = |x|^{-1} x$, ortonormirana baza za E.

Pretpostavimo sada da tvrđenje važi za euklidske prostore čija je dimanzija $< n$. Pokazaćemo da tada euklidski prostor E čija je dimezija n takođe ima ortonormiranu bazu.

Neka je E' proizvoljan potprostor u E tako da je $\dim E' = n - 1$. Prema induktivnoj pretpostavci, prostor E' ima ortonormiranu bazu $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$, tj. postoji ortonormiran sistem $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$ takav da je $E' = \mathrm{Lin}\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$. Neka je $f \notin E' = \mathrm{Lin}\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$ proizvoljan vektor i $g = f - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j e_j$, pri čemu ćemo koeficijente α_j, $j = \overline{1, n-1}$ odabrati tako da vektor g bude ortogonalan na sve vektore koji generišu E', tj. tako da je $\langle g, e_k \rangle = 0$, $k = \overline{1, n-1}$.

Kako je $\{e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$ ortonormirani sistem vekotra, imamo

$$\langle g, e_k \rangle = \langle f - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j e_j, e_k \rangle = \langle f, e_k \rangle - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \langle e_j, e_k \rangle = \langle f, e_k \rangle - \alpha_k.$$

Dakle, ako odaberemo $\alpha_k = \langle f, e_k \rangle$, imaćemo traženu ortogonalnost.

Primjetimo da je $g \neq 0$, jer bi u protivnom imali $f \in E'$. Konačno, definišimo $e_n = |g|^{-1} g$. Tada je $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ortonormirana baza euklidskog prostora E. □

7.3 Ortogonalna dopuna

Definicija 7.3.1. Ortogonalnom dopunom skupa X u euklidskom prostoru E nazivamo

$$X^\perp = \{y \in E | \langle x, y \rangle = 0, \forall x \in X\}.$$

Navedimo nekoliko osobina koje se jednostavno pokazuju:

(i) $X^\perp$ je potprostor euklidskog prostora E. Naime, ako je $y_1, y_2 \in X^\perp$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, tada za proizvoljan vektor $x \in X$ imamo $\langle x, \lambda y_1 + \mu y_2 \rangle = \lambda \langle x, y_1 \rangle + \mu \langle x, y_2 \rangle = 0$. Dakle, zaista je $\lambda y_1 + \mu y_2 \in X^\perp$.

(ii) Ako je $W \subset E$ potprostor, tada je $W + W^\perp = E$, pri čemu je riječ o direktnoj sumi. Ovdje ćemo koristiti oznaku $W \oplus W^\perp = E$. Da je zaista riječ je o direktnoj sumi, slijedi iz činjenice da u presjeku potprostora W i $W^\perp$ može biti samo nula-vektor. Naime, ako je $x \in W \cap W^\perp$ tada je $\langle x, x \rangle = 0$, pa zaista imamo $x = \theta$.

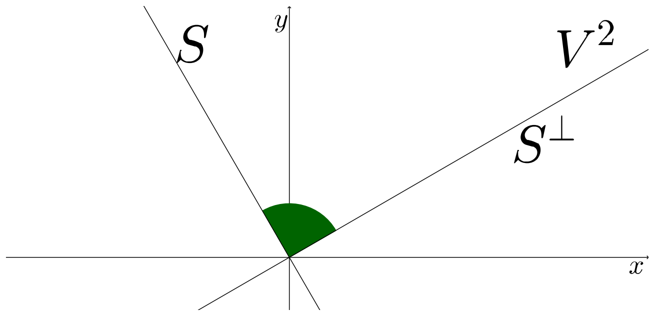
(iii) Svaki ortonormirani sistem se može proširiti do ortonormirne baze. Recimo, neka je $\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ ortonormirani sistem i $W = \text{Lin}\{e_1, e_2, \dots, e_k\}$. U potprostoru $W^\perp$ postoji ortonormirana baza $\{e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_n\}$. Jasno je da je $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ ortonormirana baza za E.

(iv) Za razliku od direktne dopune, napomenimo da postoji jedinstvena ortogonalna dopuna potprostora u euklidskom prostoru. Pri tome, ako je W potprostor, tada je $(W^\perp)^\perp = W$. Naime, imamo $W \oplus W^\perp = E$, a to znači da je W ortogonalna dopuna prostora $W^\perp$. Kako je ortogonalna dopuna jedinstvena, mora biti $(W^\perp)^\perp = W$.

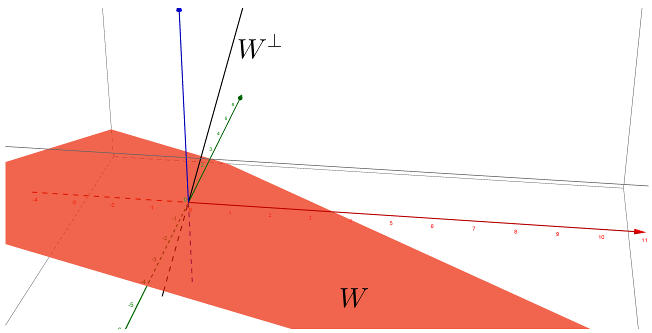
(v) Oznaka $E = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_k$ znači da je $W_i \perp W_j$, $i, j = \overline{1, k}$, $i \neq j$, tj. za sve $x \in W_i$ i $y \in W_j$ imamo $\langle x, y \rangle = 0$.

Primjer 7.3.2. Posmatrajmo potprostor S - pravu koja prolazi kroz koordinatni početak) prostora V^2. Ortogonalna dopuna ovog potprostora je prava $S^\perp$, koja sadrži koordinatni početak i koja sa pravom S zaklapa ugao od 90° (Slika 7.1)

Primjer 7.3.3. Posmatrajmo potprostor W - ravan koja prolazi kroz koordinatni početak prostora V^3. Ortogonalna dopuna ovog potprostora je prava $W^\perp$, koja sadrži koordinatni početak i koja sa svakom pravom $S \subset W, O(0,0,0) \in S$ zaklapa ugao od 90° (Slika 7.2)



Slika 7.1



Slika 7.2

7.4 Matrica Grama

Definicija 7.4.1. Matricom Grama sistema vektora $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ u euklidskom prostoru E nazivamo sljedeću matricu:

$$\Gamma(f) = \begin{pmatrix} \langle f_1, f_1\rangle & \langle f_1, f_2\rangle & \ldots & \langle f_1, f_m\rangle \\ \langle f_2, f_1\rangle & \langle f_2, f_2\rangle & \ldots & \langle f_2, f_m\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle f_m, f_1\rangle & \langle f_m, f_2\rangle & \ldots & \langle f_m, f_m\rangle \end{pmatrix}.$$

Lako je pokazati sljedeće osobine:

(i) Matrica Grama je simetrična, tj. $\Gamma(f)^T = \Gamma(f)$.

(ii) Matrica Grama ortogonalnog sistema je dijagonala; matrica Grama ortonormiranog sistema je jedinična.

(iii) Razmotrimo matricu f, čije su kolone vektori $f_1, f_2, \ldots, f_m$ redom, tj. $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$. Tada je transponovana matrica zadata sa $f^T = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$. Matrica Grama sistema f se može zapisati u formi $\Gamma(f) = f^T \cdot f$.

Teorema 7.4.2. *Sistem vektora* $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ *je linearno zavisan* $\Leftrightarrow$ $\det \Gamma(f) = 0$.

Dokaz. Neka je sistem vektora $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ linearno zavisan. Tada je

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_m f_m = \theta,$$

pri čemu je bar jedan od skalara $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ različit on 0. Ukoliko ovu jednakost skalarno pomnožimo redom sa vektorima $f_1, f_2, \dots, f_m$, dobijamo sljedeći sistem:

$$\begin{cases} \alpha_1\langle f_1, f_1\rangle + \alpha_2\langle f_1, f_2\rangle + \cdots + \alpha_m\langle f_1, f_m\rangle = 0; \\ \alpha_1\langle f_1, f_2\rangle + \alpha_2\langle f_2, f_2\rangle + \cdots + \alpha_m\langle f_2, f_m\rangle = 0; \\ \vdots \\ \alpha_1\langle f_1, f_m\rangle + \alpha_2\langle f_2, f_m\rangle + \cdots + \alpha_m\langle f_m, f_m\rangle = 0. \end{cases}$$

koji ima netrivijalno rješenje (po promjenjivim $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$). Matrica ovog sistema je matrica Grama $\Gamma(f)$. Iz teorije sistema linearnih jednačina znamo da je matrica $\Gamma(f)$ tada singularna.

Da dokažemo obrnuto, pretpostavimo da je $\det\Gamma(f) = 0$. Tada su kolone matrice $\Gamma(f)$ linearno zavisne, pa se jedna može napisati kao linearna kombinacija preostalih. Ne umanjujući opštost, pretpostavimo da se m-ta kolona može izraziti kao linearna kombinacija ostalih, tj. neka je

$$\langle f_j, f_m\rangle = \beta_1\langle f_j, f_1\rangle + \cdots + \beta_{m-1}\langle f_j, f_{m-1}\rangle, \quad j = \overline{1, m}.$$

Odavde imamo $\langle f_j, \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \cdots + \beta_{m-1} f_{m-1} - f_m\rangle = 0$, pa je vektor $\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \cdots + \beta_{m-1} f_{m-1} - f_m$ ortogonalan na $f_1, f_2, \dots, f_m$. Ovo je moguće samo ako $\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \cdots + \beta_{m-1} f_{m-1} - f_m = 0$. Kako je riječ o netrivijalnoj linearnaoj kombinaciji, sistem vektora $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ je linearno zavisan. □

Teorema 7.4.3. *Za sistem vektora* $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ *važi* $\det\Gamma(f) \geq 0$, *pri čemu je jednakost ispunjena ako i samo ako je sistem linearno zavisan.*

Dokaz. Ako je sistem $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ linearno zavisan, po prethodnoj teoremi imamo $\det\Gamma(f) = 0$.

Pretpostavimo sada da je sistem $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ linearno nezavisan. Tada je f baza u potprostoru $E' = \mathrm{Lin}\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$. Neka je f' ortonormirana baza u E', a S matrica prelaska sa baze f na bazu f'. Tada je $f' = f \cdot S$ i prema tome je

$$\Gamma(f') = \Gamma(f \cdot S) = (f \cdot S)^T \cdot fS = S^T f^T fS = S^T\Gamma(f)S.$$

Kako je matrica Grama $\Gamma(f')$ jedinična matrica I, iz prethodne jednakosti imamo $I = S^T\Gamma(f)S$, pa je $1 = (\det S)^2 \det\Gamma(f)$. Kako je S regularna marica, imamo $(\det S)^2 > 0$. Slijedi $\det\Gamma(f) > 0$. □

Napomena 7.4.4. Nejednakost Koši-Švarca-Bunjakovskog možemo vidjeti kako poseban slučaj Teoreme 7.4.3 za sistem koji ima $n = 2$ vektora.

Glava 8

Linearni operatori u euklidskom prostoru

U ovoj glavi ćemo prvo razmotriti pojam konjugovanih operatora. Potom razmatramo dvije važne klase linearnih operatora na euklidskom prostoru, simetrične i ortogonalne operatore.

8.1 Konjugovani operatori

Neka su E i G euklidski prostori, $\dim E = n$ i $\dim G = m$.

Teorema 8.1.1. *Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(E \to G)$. Postoji i jedinstven je operator $\mathscr{B} \in \mathcal{L}(G \to E)$ takav da je*

$$\langle \mathscr{A}x, y\rangle = \langle x, \mathscr{B}y\rangle, \quad \forall x \in E, \forall y \in G. \tag{8.1}$$

Dokaz. Neka je $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza u prostoru E. Ukoliko postoji $\mathscr{B} : G \to E$ za koje vrijedi (8.1), imajući u vidu da je $\mathscr{B}y = \sum_{i=1}^n \langle \mathscr{B}y, e_i\rangle e_i$, zbog $\langle \mathscr{B}y, e_i\rangle = \langle e_i, \mathscr{B}y\rangle = \langle \mathscr{A}e_i, y\rangle = \langle y, \mathscr{A}e_i\rangle$, mora biti

$$\mathscr{B}y = \sum_{i=1}^n \langle y, \mathscr{A}e_i\rangle e_i, \quad \forall y \in G.$$

Operator $\mathscr{B}$ definišimo upravo gornjom realcijom. Pokazaćemo da je linearan i da zaista ispunjava jednakost (8.1). Naime, za $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ i $y_1, y_2 \in G$ je

$$\begin{aligned}\mathscr{B}(\lambda y_1 + \mu y_2) &= \sum_{i=1}^n \langle \lambda y_1 + \mu y_2, \mathscr{A}e_i\rangle e_i = \sum_{i=1}^n (\lambda\langle y_1, \mathscr{A}e_i\rangle e_i + \mu\langle y_2, \mathscr{A}e_i\rangle e_i) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^n \langle y_1, \mathscr{A}e_i\rangle e_i + \mu \sum_{i=1}^n \langle y_2, \mathscr{A}e_i\rangle e_i = \lambda\mathscr{B}y_1 + \mu\mathscr{B}y_2.\end{aligned}$$

Dakle, $\mathscr{B}$ je linearan operator.

Provjerimo sada da li je ispunjena jednakost (8.1). Neka su $x \in E$ i $y \in G$ proizvoljni vektori. Izrazićemo skalarne proizvode $\langle \mathscr{A}x, y\rangle$ i $\langle x, \mathscr{B}y\rangle$ u izabranoj otronormiranoj bazi i uporediti ih. Kako je $x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i$, imamo $\mathscr{A}x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle \mathscr{A}e_i$, i prema tome je

$$\langle \mathscr{A}x, y\rangle = \langle \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle \mathscr{A}e_i, y\rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle\langle \mathscr{A}e_i, y\rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle\langle y, \mathscr{A}e_i\rangle.$$

Sa druge strane, skalarni proizvod vektora $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$ i $\mathscr{B}y = \sum_{i=1}^{n} \langle y, \mathscr{A} e_i \rangle e_i$ je

$$\langle x, \mathscr{B}y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle y, \mathscr{A} e_i \rangle.$$

U jedinstvenost operatora $\mathscr{B}$ možemo se lako uvjeriti na sledeći način. Pretpostavimo da za $\mathscr{C}$ važi (8.1). Tada imamo $\langle \mathscr{A} x, y \rangle = \langle x, \mathscr{B}y \rangle = \langle x, \mathscr{C} y \rangle$, $x \in E$, $y \in G$. Prema tome je $\langle x, \mathscr{B}y - \mathscr{C} y \rangle = 0$ za sve $x \in E$. Dakle, $\mathscr{B}y - \mathscr{C} y - 0$, $y \in G$, odnosno $\mathscr{B} = \mathscr{C}$. □

Definicija 8.1.2. Za operator $\mathscr{A}^* \in \mathcal{L}(G \to E)$ kažemo da je konjugovan operatoru $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(E \to G)$ ako važi

$$\langle \mathscr{A} x, y \rangle = \langle x, \mathscr{A}^* y \rangle, \quad x \in E,\, y \in G.$$

Iz prethodne teoreme slijedi da svaki linearni operator ima jedinstven konjugovani operator.

U narednim tvrđenjima navodimo osnovna svojstva konjugacije.

Lema 8.1.3. *Za $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(E \to G)$ važi*

$$(\mathscr{A}^*)^* = \mathscr{A}.$$

Dokaz. Za sve $x \in E$ i $y \in G$ imamo

$$\langle \mathscr{A} x, y \rangle = \langle x, \mathscr{A}^* y \rangle = \langle \mathscr{A}^* y, x \rangle = \langle y, (\mathscr{A}^*)^* x \rangle = \langle (\mathscr{A}^*)^* x, y \rangle,$$

prema tome mora biti $(\mathscr{A}^*)^* x = \mathscr{A} x$, $x \in E$. □

Lema 8.1.4. *Za linearne operatore $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(E \to G)$ i $\mathscr{B} \in \mathcal{L}(E \to G)$ važi*

$$(\alpha\mathscr{A} + \mu\mathscr{B})^* = \alpha\mathscr{A}^* + \mu\mathscr{B}^*, \quad \alpha,\, \beta \in \mathbb{R}.$$

Dokaz. Za $x \in E$ i $y \in G$ je

$$\langle (\alpha\mathscr{A} + \mu\mathscr{B})x, y \rangle = \alpha \langle \mathscr{A} x, y \rangle + \beta \langle \mathscr{B}x, y \rangle = \alpha \langle x, \mathscr{A}^* y \rangle + \beta \langle x, \mathscr{B}^* y \rangle = \langle x, (\alpha\mathscr{A}^* + \beta\mathscr{B}^*) y \rangle.$$

Dakle, $\alpha\mathscr{A}^* + \beta\mathscr{B}^*$ je konjugova operator za $\alpha\mathscr{A} + \mu\mathscr{B}$. Kako je konjugovan operator jedinstven, mora biti $(\alpha\mathscr{A} + \mu\mathscr{B})^* = \alpha\mathscr{A}^* + \mu\mathscr{B}^*$. □

Lema 8.1.5. *Neka su E, G i H euklidski prostori. Za $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(E \to G)$ i $\mathscr{B} \in \mathcal{L}(G \to H)$ je*

$$(\mathscr{B}\mathscr{A})^* = \mathscr{A}^* \mathscr{B}^*.$$

Dokaz. Za proizvoljne vektore $x \in E$ i $y \in H$ je

$$\langle (\mathscr{A}\mathscr{B})x, y \rangle = \langle \mathscr{A}(\mathscr{B}x), y \rangle = \langle \mathscr{B}x, \mathscr{A}^* y \rangle = \langle x, \mathscr{B}^*(\mathscr{A}^* y) \rangle = \langle x, (\mathscr{B}^* \mathscr{A}^*) y \rangle.$$

Zbog jedinstvenosti konjugovanog operatora, imamo $(\mathscr{B}\mathscr{A})^* = \mathscr{A}^* \mathscr{B}^*$. □

Lema 8.1.6. *Ako je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(E \to E)$ regularan operator, tada je $\mathscr{A}^*$ takođe regularan i pri tome je*

$$(\mathscr{A}^*)^{-1} = (\mathscr{A}^{-1})^*.$$

Dokaz. Kako je $\mathscr{A}\mathscr{A}^{-1} = \mathscr{A}^{-1}\mathscr{A} = \mathscr{I}$, imamo $(\mathscr{A}^{-1})^*\mathscr{A}^* = \mathscr{A}^*(\mathscr{A}^{-1})^* = \mathscr{I}^* = \mathscr{I}$. □

Teorema 8.1.7. *Za svaki operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(E \to G)$ važi*

$$E = \mathrm{Ker}\mathscr{A} \oplus \mathrm{Im}\mathscr{A}^* \quad i \quad G = \mathrm{Ker}\mathscr{A}^* \oplus \mathrm{Im}\mathscr{A}.$$

Dakle, na osnovu ove teoreme imamo $\mathrm{Ker}\mathscr{A}^\perp = \mathrm{Im}\mathscr{A}^*$ i $\mathrm{Im}\mathscr{A}^\perp = \mathrm{Ker}\mathscr{A}^*$.

Dokaz. Pokazaćemo prvu jednakost, a druga slijedi iz prve ako se ima u vidu $(\mathscr{A}^*)^* = \mathscr{A}$. Za proizvoljne vektore $x \in \mathrm{Ker}\mathscr{A}$ i $y \in \mathrm{Im}\mathscr{A}^*$ imamo $\mathscr{A}x = \theta$ i $y = \mathscr{A}^*z$, gdje je $z \in G$, pa je $\langle x, y\rangle = \langle x, \mathscr{A}^*z\rangle = \langle \mathscr{A}x, z\rangle = 0$. Dakle, zaista je $\mathrm{Ker}\mathscr{A} \perp \mathrm{Im}\mathscr{A}^*$.

Pokažimo da je suma potprostora $\mathrm{Ker}\mathscr{A}$ i $\mathrm{Im}\mathscr{A}^*$ jednaka prostoru E. Ako bi ta suma bila pravi porpostor u E tada bi postojao vektor $e \neq \theta$ ortogonalan na $\mathrm{Ker}\mathscr{A} \oplus \mathrm{Im}\mathscr{A}^*$. Dakle, imali bi $e \perp \mathrm{Ker}\mathscr{A}$ i $e \perp \mathrm{Im}\mathscr{A}^*$. Međutim sada je $\langle \mathscr{A}e, y\rangle = \langle e, \mathscr{A}^*y\rangle = 0$, kako ovo važi za proizvoljna vektor $y \in E$, mora biti $\mathscr{A}e = \theta$, a to znači da je $e \in \mathrm{Ker}\mathscr{A}$. Slijedi $e = \theta$, budući da je e ortogonalan na potprostor $\mathrm{Ker}\mathscr{A}$. Ovo je u suprotnosti sa našom pretpostavkom $e \neq \theta$. □

Teorema 8.1.8. *Dva operatora u euklidskom prostoru su međusobno konjugovana, ako i samo ako su njihove matrice u ortonormiranoj bazi međusobno transponovane.*

Dokaz. Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(E \to G)$, $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ baza u E, a $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ baza u G. Neka su matrice operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(E \to G)$ i $\mathscr{A}^* \in \mathcal{L}(G \to E)$ u izabranim bazama redom

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n} \quad i \quad A^* = \begin{pmatrix} \alpha^*_{11} & \alpha^*_{12} & \ldots & \alpha^*_{1m} \\ \alpha^*_{21} & \alpha^*_{22} & \ldots & \alpha^*_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha^*_{n1} & \alpha^*_{n2} & \ldots & \alpha^*_{nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times m}$$

Prema tome je $\mathscr{A}e_j = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij} f_i$, $j = \overline{1,n}$, pa imamo $\alpha_{ij} = \langle \mathscr{A}e_j, f_i\rangle$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Slično je $\mathscr{A}^* f_i = \sum_{j=1}^n \alpha^*_{ji} e_j$, $i = \overline{1,m}$. Prema tome je $\alpha^*_{ji} = \langle \mathscr{A}^* f_i, e_j\rangle$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Slijedi

$$\alpha^*_{ji} = \langle \mathscr{A}^* f_i, e_j\rangle = \langle f_i, \mathscr{A}e_j\rangle = \langle \mathscr{A}e_j, f_i\rangle = \alpha_{ij}.$$

Dakle, matrice konjugovanih operatora su zaista transponovane.

Pretpostavimo sada da je $A^* = A^T$, odnosno neka je $\alpha^*_{ji} = \alpha_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Tada za proizvoljne vektore x i y imamo $x = \sum_{j=1}^n \langle x, e_j\rangle e_j$, $\mathscr{A}x = \sum_{j=1}^n \langle x, e_j\rangle \mathscr{A}e_j$, $y = \sum_{i=1}^m \langle y, f_i\rangle f_i$, $\mathscr{A}^* y = \sum_{i=1}^m \langle y, f_i\rangle \mathscr{A}^* f_i$ i prema tome je

$$\langle \mathscr{A}x, y\rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \langle x, e_j\rangle\langle y, f_i\rangle\langle \mathscr{A}e_j, f_i\rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \langle x, e_j\rangle\langle y, f_i\rangle \alpha_{ij},$$

a sa druge strane

$$\langle x, \mathscr{A}^* y\rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \langle x, e_j\rangle\langle y, f_i\rangle\langle e_j, \mathscr{A}^* f_i\rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \langle x, e_j\rangle\langle y, f_i\rangle \alpha^*_{ji}.$$

Budući da je $\alpha^*_{ji} = \alpha_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, imamo $\langle \mathscr{A}x, y\rangle = \langle x, \mathscr{A}^* y\rangle$. □

Posljedica 8.1.9. *(i)* $\det \mathscr{A}^* = \det \mathscr{A}$; *(ii)* $\operatorname{rank} \mathscr{A} = \operatorname{rank} \mathscr{A}^*$.

8.2 Simetrični operatori

Neka je E euklidski prostor i $\dim E = n$.

Definicija 8.2.1. Operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(E \to E)$ nazivamo simetričnim ako je $\mathscr{A} = \mathscr{A}^*$, tj. ako važi $\langle \mathscr{A}x, y\rangle = \langle x, \mathscr{A}y\rangle$, $\forall x, y \in E$.

Lako je pokazati da je operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(E \to E)$ simetričan, ako i samo ako je matrica operatora $\mathscr{A}$ u svakoj ortonormiranoj bazi prostora E simetrična. Naime, ako je $\mathscr{A} = \mathscr{A}^*$, budući da su matrice ovih operatora A i A^T, redom, slijedi $A = A^T$. Da pokažemo obrnuto tvrđenje, pretpostavimo da je u nekoj ortnormormiranoj bazi matrica A operatora $\mathscr{A}$ simetrična, tj. $A = A^T$. Kako druga matrica operatoru $\mathscr{A}^*$, imamo $\mathscr{A} = \mathscr{A}^*$.

Teorema 8.2.2. *Sve nule karakterističnog polinoma simetričnog operatora su realne.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\lambda = \alpha \pm i\beta$ nula karakterističnog polinom simetričnog linearnog operatora $\mathscr{A}$. Tada A ima invarijantni potprostor čija je dimenzija 2 i koji je generaisan sistemom vektora $\{x, y\}$, pri čemu je $\mathscr{A}x = \alpha x - \beta y$ i $\mathscr{A}y = \beta x + \alpha y$. Ako se ove jednakosti zamjene u $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$, nalazimo $\alpha\langle x, y\rangle - \beta|y|^2 = \beta|x|^2 + \alpha\langle x, y\rangle$, pa imamo $\beta(|x|^2 + |y|^2) = 0$. Sada je jasno da mora biti $\beta = 0$. Dakle, $\lambda = \alpha \in \mathbb{R}$. □

Teorema 8.2.3. *Operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(E \to E)$ je simetričan ako i samo ako postoji ortonormirana baza prostora E od njegovih svojstvenih vektora.*

Dokaz. Neka je λ_1 svojstvena vrijednost operatora $\mathscr{A}$ i neka je e_1, $|e_1| = 1$ odgovarajući svojstveni vektor, tj. neka je $\mathscr{A}e_1 = \lambda_1 e_1$. Neka je $E_1 = e_1^{\perp}$ ortogonalna dopuna vektora e_1 do prostora E. Pokažimo da je potprostor E_1 invarijantni potprostor za operator $\mathscr{A}$. Zaista, zbog simetričnosti operatora $\mathscr{A}$, za $x \in E_1$ imamo $\langle \mathscr{A}x, e_1\rangle = \langle x, \mathscr{A}e_1\rangle = \lambda_1\langle x, e_1\rangle = 0$, odakle možemo zaključiti da $\mathscr{A}x \in E_1$. Zato možemo razmotriti suženje $\mathscr{A}_1 = \mathscr{A}|_{E_1}$. Operator $\mathscr{A}_1$ je takođe simetričan. Prema induktivnoj pretostavci postoji ortonormirana baza $\{e_2, e_3, \ldots e_n\}$ u E_1 koja se sastoji od svojstvenih vektora operatora $\mathscr{A}_1$. Jasno je da su to svojstveni vektori i za $\mathscr{A}$. Dakle, $\{e_1, e_2, \ldots e_n\}$ je ortonormirana baza u E u kojoj su svojstveni vektori za $\mathscr{A}$.

Da pokažemo obrnuto, pretpostavimo da postoji ortonormirana baza $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ od svojstvenih vektora operatora $\mathscr{A}$, odnosno, neka je $\mathscr{A}e_i = \lambda_i e_i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$. U ovoj ortonormiranoj bazi matrica operatora A je dijagonalna. Prema tome je $A = A^T$, a to znači da imamo $\mathscr{A} = \mathscr{A}^*$. □

Za operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(E \to E)$ kažemo da je kososimetričan ako je $\mathscr{A} = -\mathscr{A}^*$. Jedini operator koji je i simetričan i kososimetričan je nula-operator $\mathscr{O}$. Naime, ako je $\mathscr{A}$ simetričan i kososimetričan, tada je $\mathscr{A}^*x = \mathscr{A}x = -\mathscr{A}^*x$, $x \in E$, odakle imamo $\mathscr{A}^*x = \theta$, $x \in E$.

Neposredno se može provjeriti da je linearna kombinacija simetričnih (kososimetričnih) operatora takođe simetričan (kososimetričan) operator.

Teorema 8.2.4. *Svaki operator se može na jedinstven način predstaviti kao zbir simetričnog i kososimetričnog operatora.*

Dokaz. Pokažimo prvo mogućnost reprezentacije. Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(E \to E)$ proizvoljan operator, $\mathscr{B} = \frac{1}{2}(\mathscr{A} + \mathscr{A}^*)$ i $\mathscr{C} = \frac{1}{2}(\mathscr{A} - \mathscr{A}^*)$. Lako se pokazuje da je $\mathscr{B}$ simetričan, a $\mathscr{C}$ kososimetričan operator. Pri tome je $\mathscr{A} = \mathscr{B} + \mathscr{C}$.

Pokažimo sada jedinstvenost razlaganja. Neka je $\mathscr{A} = \mathscr{B}_1 + \mathscr{C}_1$, gdje je $\mathscr{B}_1$ simetričan, a $\mathscr{C}_1$ kososimetričan operator, tada je $\mathscr{B} - \mathscr{B}_1 = \mathscr{C}_1 - \mathscr{C}$. Kako je $\mathscr{B} - \mathscr{B}_1$ simetričan, a $\mathscr{C}_1 - \mathscr{C}$ kososimetričan, mora biti $\mathscr{B} - \mathscr{B}_1 = \mathscr{O}$. Dakle, $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1$, a to povlači $\mathscr{C} = \mathscr{C}_1$. □

Napomenimo da matricu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ nazivamo kososimetričnom ako važi $A^T = -A$.

Posljedica 8.2.5. *Svaka matrica nad poljem realnih brojeva se na jedinstven način može predstaviti kao zbir simetrične i kososimetrične matrice.*

8.3 Ortogonalni operatori

Neka je E euklidski prostor i $\dim E = n$.

Definicija 8.3.1. Operator $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(E \to E)$ nazivamo ortogonalnim ako je $\mathscr{P}^*\mathscr{P} = \mathscr{I}$.

Istaknimo nekoliko primjedbi:
(i) Ortogonalni operator $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(E \to E)$ je regularan, budući da iz jednakosti $\mathscr{P}^*\mathscr{P} = \mathscr{I}$ proizilazi da je njegova slika jednaka prostoru E.
(ii) Ako je $\mathscr{P}^{-1} \in \mathcal{L}(E \to E)$ inverzan operator za $\mathscr{P}$, tada je

$$\mathscr{P}\mathscr{P}^* = \mathscr{P}\mathscr{P}^*\mathscr{I} = \mathscr{P}\mathscr{P}^*\mathscr{P}\mathscr{P}^{-1} = \mathscr{P}\mathscr{I}\mathscr{P}^{-1} = \mathscr{I}.$$

Dakle, možemo zaključiti da je linearni operator $\mathscr{P}$ na E ortogonalan ako i samo ako je regularan i ako je $\mathscr{P}^* = \mathscr{P}^{-1}$. Drugim riječima, linearni operator $\mathscr{P}$ je ortogonalan ako i samo ako važi

$$\mathscr{P}\mathscr{P}^* = \mathscr{P}^*\mathscr{P} = \mathscr{I}.$$

(iii) Kažemo da je matrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonalna ako je $A^TA = I$. Neka je Π matrica operatora $\mathscr{P}$ u proizvoljnoj ortonormiranoj bazi prostora E. Budući da je Π^T matrica konjugovanog operatora $\mathscr{P}^*$ u istoj bazi, iz jednakosti $\mathscr{P}\mathscr{P}^* = \mathscr{P}^*\mathscr{P} = \mathscr{I}$ imamo $\Pi\Pi^T = \Pi^T\Pi = I$. Dakle, matrica ortogonalnog opertora u ortonormiranoj bazi je ortogonalna matrica. Tačno je i obrnuto, ako je Π matrica u ortnonormiranoj bazi za $\mathscr{P}$, tada budući da je Π^T matrica operatora $\mathscr{P}^*$, iz jednaksoti $\Pi^T\Pi = I$ imamo jednakost odgovarajućih operatora, tj. $\mathscr{P}^*\mathscr{P} = \mathscr{I}$.
(iv) Ako je $\mathscr{P}$ ortogonalni operator, budući da je $\det \mathscr{P} = \det \mathscr{P}^*$, imamo $\det \mathscr{P} = \pm 1$. Ortogonalni operator $\mathscr{P}$ nazivamo svojstvenim (nesvojstvenim) ako je $\det \mathscr{P} = 1$ ($\det \mathscr{P} = -1$).
(v) Sljedeća teorema daje razne karakterizacije ortogonalnih operatora. Jedna od njih jeste da je operator ortogonalan ako i samo ako je izometrija, odnosno ako operator čuva dužine vektora. Koristeći ovu karakterizaciju, možemo pokazati da ukoliko postoje, svojstvene vrijednosti ortogonalnog operatora su ± 1. Zaista, neka je $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(E \to E)$ ortogonalni operator i neka je $\mathscr{P}x = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. Kako je $\mathscr{P}$ izometerija, imamo $|x| = |\mathscr{P}x| = |\lambda x| = |\lambda||x|$. Zbog $|x| \neq 0$, slijedi $|\lambda| = 1$. Dakle, $\lambda = \pm 1$.

Teorema 8.3.2. *Neka je* $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(E \to E)$. *Sljedeći iskazi su ekvivalentni:*
(1) $\mathscr{P}$ *ortogonalni operator, odnosno* $\mathscr{P}\mathscr{P}^* = \mathscr{P}^*\mathscr{P} = \mathscr{I}$*;*
(2) $\mathscr{P}$ *čuva skalarni proizvod, tj.* $\langle \mathscr{P}x, \mathscr{P}y\rangle = \langle x, y\rangle$, $x, y \in E$*;*
(3) $\mathscr{P}$ *je izometrija, tj.* $|\mathscr{P}x| = |x|$, $x \in E$*;*
(4) $\mathscr{P}$ *preslikava svaki ortonormiran sistem u ortonormiran sistem;*
(5) Postoji ortonormirana baza u E *koju* $\mathscr{P}$ *preslikava u ortonormiranu bazu.*

Dokaz. (1) $\Rightarrow$ (2): Kako je $\mathscr{P}^*\mathscr{P} = \mathscr{I}$, imamo $\langle \mathscr{P}x, \mathscr{P}y\rangle = \langle x, \mathscr{P}^*\mathscr{P}y\rangle = \langle x, y\rangle$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Kako je $\langle x, \mathscr{P}^*\mathscr{P}y\rangle = \langle \mathscr{P}x, \mathscr{P}y\rangle = \langle x, y\rangle$, $x, y \in E$, zaključujemo da je $\mathscr{P}^*\mathscr{P} = \mathscr{I}$.

(2) $\Rightarrow$ (3): $|\mathscr{P}x| = \sqrt{\langle \mathscr{P}x, \mathscr{P}x\rangle} = \sqrt{\langle x, x\rangle} = |x|$, $x \in E$.

(3) $\Rightarrow$ (2): Koristeći identitet

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}|u+v|^2 - \frac{1}{4}|u-v|^2,$$

prvo za $u = \mathscr{P}x$ i $v = \mathscr{P}y$, a potom za e $u = x$ i $v = y$, nalazimo

$$\begin{aligned}\langle \mathscr{P}x, \mathscr{P}y\rangle &= \frac{1}{4}(|\mathscr{P}x + \mathscr{P}y|^2 - |\mathscr{P}x - \mathscr{P}y|^2) = \frac{1}{4}(|\mathscr{P}(x+y)|^2 - |\mathscr{P}(x-y)|^2) \\ &= \frac{1}{4}(|x+y|^2 - |x-y|^2) = \langle x, y\rangle.\end{aligned}$$

Dakle, ako $\mathscr{P}$ čuva dužine vektora, tada $\mathscr{P}$ takođe čuva skalarni proizvod.

(2) $\Rightarrow$ (4): Slijedi iz jednakosti $\langle \mathscr{P}e_i, \mathscr{P}e_j\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$, $i, j = \overline{1, n}$, $i \neq j$.

(4) $\Rightarrow$ (3): Za $x \neq 0$, možemo uzeti ortonormirani sistem $\{e_1\}$, gdje je $e_1 = |x|^{-1}x$.

(4) $\Rightarrow$ (5): Neposredno.

(5) $\Rightarrow$ (2): Neka je $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza u E takva da je sistem vektora $\{\mathscr{P}e_1, \mathscr{P}e_2, \ldots, \mathscr{P}e_n\}$ takođe ortonormirana baza. Za proizvoljne vektore $x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i$ i $y = \sum_{i=1}^n \langle y, e_i\rangle e_i$ imamo $\mathscr{P}x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle \mathscr{P}e_i$ i $\mathscr{P}y = \sum_{i=1}^n \langle y, e_i\rangle \mathscr{P}e_i$. Budući da je $\{\mathscr{P}e_1, \mathscr{P}e_2, \ldots, \mathscr{P}e_n\}$ ortonormirana baza, imamo $\langle \mathscr{P}x, \mathscr{P}y\rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle\langle y, e_i\rangle = \langle x, y\rangle$. $\square$

Razmotrićemo u nastavku kakav oblik može imati matrica Π ortogonalnog operatora $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(E \to E)$ u ortonormiranoj bazi u E. Ako je $\dim E = 1$, moguća su samo dva slučaja. U prvom je $\mathscr{P}x = x$, tada je $\Pi = (1)$, a u drugom je $\mathscr{P}x = -x$, a tada je $\Pi = (-1)$.

Dvodimenzionalan slučaj je sadržaj naredne leme.

Lema 8.3.3. *Neka je euklidski prostor* E *dimenzije* 2 *i neka je* $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(E \to E)$ *ortogonalan operator.*
(i) Ako je $\det \mathscr{P} = 1$, *tada za svaku ortonormiranu baza u* E *postoji* $\rho \in [0, 2\pi)$ *tako da matrica* Π *operatora* $\mathscr{P}$ *ima formu*

$$\Pi = \begin{pmatrix} \cos\rho & \sin\rho \\ -\sin\rho & \cos\rho \end{pmatrix}.$$

(ii) Ako je $\det \mathscr{P} = -1$, *tada postoji ortonormirana baza u kojoj matrica* Π *operatora* $\mathscr{P}$ *ima oblik*

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ili \quad \Pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dokaz. (i) Neka je $\det \mathscr{P} = 1$ i neka je $\Pi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ matrica operatora $\mathscr{P}$ u ortonormiranoj bazi prostora E. Kako je Π ortogonalna matrica, imamo

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}.$$

Sa druge strane, kako je $\det \Pi = 1$, imamo $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ i

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} = (\det \Pi)^{-1} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

Dakle, mora biti $\alpha = \delta$ i $\beta = -\gamma$. Prema tome, matica Π ima formu $\Pi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$. Ako se ima u vidu da je $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, slijedi $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Postoji jedinstveni broj $\rho \in [0, 2\pi)$ takav da je $\alpha = \cos\rho$ i $\beta = \sin\rho$, pa je $\Pi = \begin{pmatrix} \cos\rho & \sin\rho \\ -\sin\rho & \cos\rho \end{pmatrix}$.

(ii) Pretpostavimo sada da je $\det \mathscr{P} = -1$ i neka je $\Pi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ matrica operatora $\mathscr{P}$ u nekoj ortonormiranoj bazi prostora E. Kako je $\det \Pi = -1$, tj. $\alpha\delta - \gamma\beta = -1$, imamo

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} = (\det \Pi)^{-1} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}.$$

Proizilazi da je $\alpha = -\delta$ i $\beta = \gamma$, tj. naša matrica imala oblik $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix}$. Kako je matrica Π simetrična, operator $\mathscr{P}$ je simetričan (pored toga što je ortogonalan) i prema tome postoji ortonormirana baza od svojstvenih vektora. Kako svojstvene vrijednosti mogu biti ± 1 i kako je $\det \Pi = -1$, slijedi da postoji ortonormirana baza $\{e_1, e_2\}$ u kojoj matrica Π ima oblik $\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ili $\Pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Jasno je da u ovom slučaju imamo dva invarijantna potprostora dimenzije 1 (potprostor generisan vektorom e_1, odnosno vektorom e_2). $\square$

Pri razmatranju opšteg slučaja biće nam od koristi naredna pomoćna tvrđenja.

Lema 8.3.4. *Neka je W invarijantni potprostor za ortogonalni operator $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(E \to E)$. Tada su W i $W^{\perp}$ invarijantni potprostori za operatore $\mathscr{P}$ i $\mathscr{P}^*$.*

Dokaz. Zaista, neka je $\mathscr{P}(W) \subseteq W$. Kako je $\mathscr{P}$ regularan operator, zapravo imamo $\mathscr{P}(W) = W$. Slijedi $\mathscr{P}^*(\mathscr{P}(W)) = \mathscr{P}^*(W)$, tj. $\mathscr{I}W = \mathscr{P}^*(W)$. Dakle, $\mathscr{P}^*(W) = W$, odnosno W je invarijantan i za operator $\mathscr{P}^*$.

Sada ćemo dokazati da je $W^{\perp}$ invarijantan za $\mathscr{P}$, a prema prvom dijelu taj potprostor će takođe biti invarijantni potprostror i za konjugovan operator. Neka je $y \in W^{\perp}$ proizvoljan vektor. Imamo $\mathscr{P}y \in W^{\perp}$. Neka je $x \in W$ proizvoljno, tada je $\langle \mathscr{P}y, x\rangle = \langle y, \mathscr{P}^*x\rangle = \langle y, \mathscr{P}^{-1}x\rangle = 0$. Odavde iz proizvoljnosti $x \in W$ slijedi da $\mathscr{P}y \in W^{\perp}$. $\square$

Lema 8.3.5. *Neka je $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(E \to E)$ ortogonalni operator. Tada postoji ortogonalno razlaganje $E = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_m$, tako da je W_i invarijantni potprostor za $\mathscr{P}$ i $\dim W_i \leq 2$ za sve $i = \overline{1, m}$.*

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom po dimenziji n prostora E.

Ako je $n \leq 2$, naše tvrđenje je trivijalno.

Pretpostavimo da je tvrđene tačno za ortogonalne operatore na euklidskim prostorima čija je dimenzija $< n$. U prostoru E postoji invarijantni potprostor W_1 operatora $\mathscr{P}$ dimenzije 1 ili 2. Saglasno prethodnoj lemi, W_1 i $W_1^\perp$ su invarijantni potprostori za $\mathscr{P}$ i $\mathscr{P}^*$. Neka je $E = W_1 \oplus E_1$, gdje je $E_1 = W_1^\perp$ ortogonalna dopuna za W_1. Pri tome je $\dim E_1 < n$. Razmotrimo suženje operatora $\mathscr{P}$ na E_1, neka je $\mathscr{P}_1 = \mathscr{P}|_{E_1}$. Operator $\mathscr{P}_1$ je ortogonalni operator na E_1 (budući da kao i $\mathscr{P}$ čuva skalarni proizvod). Prema induktivnoj pretpostavci postoji razlaganje za E_1 u formi $W_2 \oplus \cdots \oplus W_m$, pri čemu su W_i, $\dim W_i \leq 2$, $i = \overline{2, m}$ invarijantni potprostori za $\mathscr{P}_1$. Jasno je da su potrpostori W_i, $i = \overline{1, m}$ invarijantni i za $\mathscr{P}$. Prema tome, traženo ortogonalno razlaganje prostora E je $E = W_1 \oplus E_1 = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_m$. □

Teorema 8.3.6. *Neka je $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(E \to E)$ ortogonalan operator. Postoji ortonormirana baza prostora E u kojoj matrica operatora $\mathscr{P}$ ima oblik*

$$\begin{pmatrix}
1 &&&&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&&&& \\
&&& -1 &&&&&&&&& \\
&&&& \ddots &&&&&&&& \\
&&&&& -1 &&&&&&& \\
&&&&&& \cos\rho_1 & -\sin\rho_1 &&&&& \\
&&&&&& \sin\rho_1 & \cos\rho_1 &&&&& \\
&&&&&&&& \cos\rho_2 & -\sin\rho_2 &&& \\
&&&&&&&& \sin\rho_2 & \cos\rho_2 &&& \\
&&&&&&&&&& \ddots && \\
&&&&&&&&&&& \cos\rho_k & -\sin\rho_k \\
&&&&&&&&&&& \sin\rho_k & \cos\rho_k
\end{pmatrix}$$

gdje je $\rho_i \in [0, 2\pi)$, $i = \overline{1, k}$ (ako je $k = 0$ tada smatramo da odgovarajući blokovi formata 2 ne postoje).

Dokaz. Prema prethodnoj lemi postoji ortogonalno razlaganje $E = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_m$, tako da je W_j invarijantan potprostor za $\mathscr{P}$ i $\dim W_j \leq 2$, $j = \overline{1, m}$. Pretpostavimo dodatno da je razlaganje takvo da suženi operator $\mathscr{P}|_{W_j}$ nema invarijantne potprostore dimenzije 1, ako je $\dim(W_j) = 2$. U svakom potprostoru W_j odaberimo ortonormiranu bazu. Pretpostavimo da je razbijanje numerisano tako da prvih prostora $s = p + q$, $p \geq 0$, $q \geq 0$ dimenzije 1, a prostori $W_{s+1}, W_{s+2}, \ldots W_m$ su dimenzije 2. Odaberimo vektore e_i, $1 \leq i \leq s$ tako da je $|e_i| = 1$ i $e_i \in W_i$. Jasno je da su e_i svojstveni vektori operatora i da je $\mathscr{P} e_i = \pm e_i$. Ne umanjujući opštost, pretpostavimo da je mumeracija takva da je $\mathscr{P} e_i = e_i$, $1 \leq i \leq p$ i $\mathscr{P} e_i = -e_i$, $p + 1 \leq i \leq s$. Neka je $\{e_j^1, e_j^2\}$ ortonormirana baza prostora W_j, $s + 1 \leq j \leq m$. Imajući u vidu prethodne leme, i kako $\mathscr{P}$ nema invarijantih potprostora dimenzije 1, matrica suženog operatora $\mathscr{P}|_{W_j}$ je $\Pi(e_j^1, e_j^2) = \begin{pmatrix} \cos\rho_j & \sin\rho_j \\ -\sin\rho_j & \cos\rho_j \end{pmatrix}$, $j = \overline{s + 1, m}$. U ortonormiranoj bazi koju čine vektori e_i, $i = \overline{1, s}$, e_j^1, e_j^1, $j = \overline{s + 1, m}$ matrica operatora $\mathscr{P}$ ima oblik koji je naveden u teoremi. □

Definicija 8.3.7. Prostom refleksijom euklidskog prostora naziva se ortogonalno preslikavanje čija matrica u nekoj ortonormiranoj bazi ima formu

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & O & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & O & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Prostom rotacijom euklidskog prostora naziva se ortogonalno preslikavanje čija je matrica u ortonormiranoj bazi

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & O & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \cos\rho & -\sin\rho & & & \\ & & & \sin\rho & \cos\rho & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & O & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Posljedica 8.3.8. *Ortogonalan operator na euklidskom prostoru je kompozicija konačnog broja prostih refleksija i prostih rotacija. Ortogonalan operator je svojstven (nesvojstven) ako i samo ako je poizvod parnog (neparnog) broja refleksija.*

Posljedica 8.3.9. *U dvodimenzionalnom euklidskom prostoru ortogonalan operator je jedno od sljedećih preslikavanja:*
(i) identitet (svojstveno preslikavanje);
(ii) rotacija (svojstveno preslikavanje);
(iii) refleksija u odnosu na pravu (nesvojstveno preslikavanje).

Glava 9

Kvadratne forme u euklidskom prostoru

9.1 Kvadratne forme i metod Lagranža

Neka je E euklidski prostor i $\dim E = n$.

Definicija 9.1.1. Kvadratnom formom u euklidskom prostoru E nazivamo funkciju $\mathcal{A} : E \to \mathbb{R}$ koju je moguće predstaviti u formi

$$\mathcal{A}(x) = \langle \mathscr{A}x, x\rangle, \quad x \in E,$$

gdje je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(E \to E)$ simetričan operator.

Pokažimo da postoji jedinstven simetričan operator koji odgovara formi $\mathcal{A}$. Zaista, ako pretpostaimo da je $\langle \mathscr{A}x, x\rangle = \langle \mathscr{B}x, x\rangle$, $\forall x \in E$, pri čemu su $\mathscr{A}$ i $\mathscr{B}$ simetrični operatori, tada imamo $\langle \mathscr{C}x, x\rangle = 0$, gdje je $\mathscr{C} = \mathscr{A} - \mathscr{B}$. Opertor $\mathscr{C}$ je takođe simetričan. Postoji ortonormirana baza $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ u E od svojstvenih vrijednosti operatora $\mathscr{C}$. Neka je λ_i svojstvena vrijednost koja odgovara vektoru e_i, tj. neka je $\mathscr{C}e_i = \lambda_i e_i$, $i = \overline{1, n}$. Sada imamo $\lambda_i = \langle \lambda_i e_i, e_i\rangle = \langle \mathscr{C}e_i, e_i\rangle = 0$. Dakle, sve svojstvene vrijednosti operatora $\mathscr{C}$ imaju vrijednost 0. Ovo znači da je $\mathscr{C}$ nula-operator, pa imamo $\mathscr{A} = \mathscr{B}$.

Ako su u euklidskom prosotru ima u vidu određena ortonormirana baza, tada možemo reći da postoji uzajamno-jednoznačna korespodencija između kvadratnih formi i simetričnih matrica formata $n \times n$. Zbog ovoga ćemo ponekad poistovjećivati kvadratnu formu sa odgovarajućom matricom, a imajući u vidu određenu ortonormiranu bazu.

Primjer 9.1.2. Neka se u prostoru $\mathbb{R}^3$ ima u vidu standardni skalarni proizvod i standardna ortonormirana baza $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Tada je

$$\mathcal{A}(x) = {x_1}^2 - x_1x_3 - 3x_2x_3 + {x_3}^2, \quad x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$$

kvadratna forma u $\mathbb{R}^3$.

Zaista, neka je $\mathscr{A}$ simetričan operator kome u ortonormiranoj bazi $\{e_1, e_2, e_3\}$ odgovara matrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Tada je

$$\mathscr{A}x = \begin{pmatrix} x_1 - \frac{1}{2}x_3 \\ -\frac{3}{2}x_3 \\ -\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 + x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,$$

pa imamo

$$\mathcal{A}(x) = \langle \mathscr{A}x, x\rangle = {x_1}^2 - \frac{1}{2}x_1x_3 - \frac{3}{2}x_2x_3 - \frac{1}{2}x_1x_3 - \frac{3}{2}x_2x_3 + {x_3}^2 = {x_1}^2 - x_1x_3 - 3x_2x_3 + {x_3}^2.$$

Kako smo ranije ustanovili, postoji ortonomrirana baza u prostoru E koja je sastavljena od svojstvenih vektora simetričnog opertora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(E \to E)$. Prema tome, u toj ortonormiranoj bazi matrica A operatora $\mathscr{A}$ ima sljedeći oblik

$$A(e) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

gdje su λ_i, $i = \overline{1,n}$ svojstvene vrijednosti operatora $\mathscr{A}$. Dakle, imamo narednu teoremu.

Teorema 9.1.3 (Lagranž)**.** *Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(E \to E)$ simetrični operator i neka je $\mathcal{A}(x) = \langle \mathscr{A}x, x\rangle$ odgovarajuća kvadratna forma u euklidskom prostoru E. Postoji ortnormirna baza u E tako da kvadratna forma $\mathcal{A}$ ima oblik sume kvadrata, tj.*

$$\mathcal{A}(x) = \langle \mathscr{A}x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2, \quad x \in E,$$

gdje je $x_i = \langle x, e_i\rangle$.

Putem narednih karakterističnih primjera kvadratnih formi u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^4$, predstavićemo algoritam svođenja kvadratne forme na sumu kvadrata. Algoritam se naziva metodom Lagranža.

Primjer 9.1.4. Neka je na $\mathbb{R}^3$ zadata kvadratna forma $\mathcal{A}(x) = {x_1}^2 - x_1x_3 - 3x_2x_3 + {x_3}^2$. Najprije grupišimo sve sabirke koji sadrže promjenljivu x_1

$$\mathcal{A}(x) = (x_1^2 - x_1x_3) - 3x_2x_3 + x_3^2,$$

zatim dodajmo i oduzmimo neophodne sabirke, kako bismo izraz u zagradi dopunili do potpunog kvadrata

$$\mathcal{A}(x) = (x_1^2 - x_1x_3 + \frac{1}{4}{x_3}^2) - \frac{1}{4}{x_3}^2 - 3x_2x_3 + {x_3}^2 = (x_1 - \frac{1}{2}x_3)^2 - 3x_2x_3 + \frac{3}{4}x_3^2.$$

Dalje uvodimo linearnu zamjenu promjenljivih $\xi_1 = x_1 - \frac{1}{2}x_3$ i dopunimo ostale sabirke do potpunog kvadrata:

$$\mathcal{A} = \xi_1^2 + (-3x_2x_3 + \frac{3}{4}x_3^2 + 3x_2^2) - 3x_2^2 = \xi_1^2 + (\sqrt{3}x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_3)^2 - 3x_2^2.$$

Sada uvodimo smjene $\xi_2 = \sqrt{3}x_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_3$ i $\xi_3 = x_2$.

Dakle, koristeći ukazane zamjene promjenljivih, kvadratnu formu $\mathcal{A}$ smo sveli na sumu kvadrata

$$\mathcal{A} = \xi_1^2 + \xi_2^2 - 3\xi_3^2.$$

Primjer 9.1.5. Razmotrimo sljedeću kvadratnu formu na prostoru $\mathbb{R}^4$

$$\mathcal{A}(x) = 3x_1^2 - x_1x_2 + 4x_2^2 - x_1x_4 - x_2x_4 + 3x_3^2 - x_4^2.$$

Kao i u prethodnom primjeru, najprije grupišimo sve sabirke koji sadrže x_1, a zatim ih dopunimo neophodnim sabircima do potpunog kvadrata

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(x) &= (3x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_4) + 4x_2^2 - x_2x_4 + 3x_3^2 - x_4^2\\
&= (3x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_4 + \frac{1}{12}x_2^2 + \frac{1}{12}x_4^2 + \frac{1}{6}x_2x_4) - \frac{1}{12}x_2^2 - \frac{1}{12}x_4^2 - \frac{1}{6}x_2x_4 + 4x_2^2\\
&- x_2x_4 + 3x_3^2 - x_4^2\\
&= (\sqrt{3}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{6}x_2 - \frac{\sqrt{3}}{6}x_4)^2 + \frac{47}{12}x_2^2 - \frac{7}{6}x_2x_4 + 3x_3^2 - \frac{13}{12}x_4^2\\
&= (\sqrt{3}(x_1 - \frac{1}{6}x_2 - \frac{1}{6}x_4))^2 + \frac{47}{12}(x_2^2 - \frac{14}{47}x_2x_4 + \frac{49}{47}x_4^2) - \frac{49}{12}x_4^2 + 3x_3^2 - \frac{13}{12}x_4^2\\
&= 3(x_1 - \frac{1}{6}x_2 - \frac{1}{6}x_4)^2 + \frac{47}{12}(x_2 - \frac{7}{\sqrt{47}}x_4)^2 + 3x_3^2 - \frac{31}{6}x_4^2.
\end{aligned}$$

Uvođenjem smjena

$$\xi_1 = x_1 - \frac{1}{6}x_2 - \frac{1}{6}x_4; \quad \xi_2 = x_2 - \frac{7}{\sqrt{47}}x_4; \quad \xi_3 = x_3; \quad \xi_4 = x_4;$$

dobijamo

$$\mathcal{A}(\xi) = 3\xi_1^2 + \frac{47}{12}\xi^2 + 3\xi_3^2 - \frac{31}{6}\xi_4^2.$$

Dakle, kvadratna forma je svedena na sumu kvadrata sa dijagonalnom matricom

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{47}{12} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{31}{6} \end{pmatrix}$$

Primjer 9.1.6.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(x) &= x_1x_2 - x_2x_3 - x_2^2 + 4x_3^2\\
&= -(x_2^2 - x_1x_2 + x_2x_3 + \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{4}x_3^2 - \frac{1}{2}x_1x_3) + \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{4}x_3^2 - \frac{1}{2}x_1x_3 + 4x_3^2\\
&= -(x_2 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3)^2 + \frac{1}{4}x_1^2 - \frac{1}{2}x_1x_3 + \frac{17}{4}x_3^2\\
&= -\xi_1^2 + \frac{1}{4}(x_1^2 - 2x_1x_3 + x_3^2) + 4x_3^2\\
&= -\xi_1^2 + \frac{1}{4}(x_1 - x_3)^2 + 4x_3^2\\
&= -\xi_1^2 + \xi_2^2 + 4\xi_3^2.
\end{aligned}$$

Primjer 9.1.7. Razmotrimo sada kvadratnu formu na $\mathbb{R}^3$ zadatu na sledeći način

$$\mathcal{A}(x) = -x_1x_3 + 2x_2x_3, \quad x \in \mathbb{R}^3.$$

Ovdje se srijećemo sa situacijom kada nema nijednog kvadratnog člana, pa je nemoguće formirati potpun kvadrat. U ovoj situaciji ćemo najprije uvesti smjenu $x_1 = x_3 + t$ kako bismo stvorili bar jedan kvadratni sabirak. Tada je

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x) &= -(x_3+t)x_3 + 2x_2x_3 = -tx_3 - x_3^2 + 2x_2x_3 = \\ &= -(x_3^2 + \frac{1}{4}t^2 + tx_3 + x_2^2 - 2x_2x_3 - tx_2) + \frac{1}{4}t^2 + x_2^2 - tx_2 \\ &= -(x_3 + \frac{1}{2}t - x_2)^2 + (\frac{1}{2}t - x_2)^2 = -\xi 1^2 + \xi 3^2,\end{aligned}$$

gdje su uvedene naredne linearne smjene

$$\xi_1 = x_3 + \frac{1}{2}t - x_2 = x_3 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 - x_2 = \frac{1}{2}x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_3;$$
$$\xi_2 = \frac{1}{2}t - x_2 = \frac{1}{2}x_1 - x_2 - \frac{1}{2}x_3.$$

9.2 Znak kvadratne forme

Neka je E euklidski prostor i $\dim E = n$.

Definicija 9.2.1. Neka je $\mathcal{A}$ kvadratna forma i $\mathscr{A}$ odgovarajući simetričan opertator na E. Kvadratna forma $\mathcal{A}(x) = \langle \mathscr{A}x, x\rangle$ je
(i) pozitivno definita ako je $\mathcal{A}(x) > 0$, $x \in E$, $x \neq \theta$;
(ii) negativno definitna ako je $\mathcal{A}(x) < 0$, $x \in E$, $x \neq \theta$;
(iii) nenegativno definitna ako je $\mathcal{A}(x) \geq 0$, $x \in E$.
(iv) nepozitivno definita ako je $\mathcal{A}(x) \leq 0$, $x \in E$.

Ukoliko kvadratna forma ne ispunjava nijedan uslov (i)-(iv), tada kažemo da je promjenjivog znaka.

Kako kvadratne forme odgovaraju simetričnim operatorima odnosno simetričnim matricama (ako se ima u vidu određena ortonormirana baza), govorićemo i o pozitivno (negativno, nenegativno, nepozitivno) definitnim operatorima (matricama).

Primjer 9.2.2. (1) Neka je $\mathcal{A}(x) = x_1^2 + 4x_2^2$, $x = x_1e_1 + x_2e_2 \in \mathbb{R}^2$. Jasno je da imamo $\mathcal{A}(x) > 0$ za sve $x \neq \theta$, pa je ova kvadratna forma pozitivno definitna.
(2) Kvadratna forma $\mathcal{A}(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$, $x = x_1e_1 + x_2e_2 \in \mathbb{R}^2$ je nenegativno definitna kvadratna forma, ali nije pozitivno definitna.
(3) Kvadratna forma $\mathcal{A}(x) = x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2$, $x = x_1e_1 + x_2e_2 \in \mathbb{R}^2$ je promjenjivog znaka.
(4) Kvadratna forma $\mathcal{A}(x) = -3x_1^2 + 3x_1x_2 - x_2^2$, $x = x_1e_1 + x_2e_2 \in \mathbb{R}^2$ je negativno definitna.
(5) Kvadratna forma $\mathcal{A}(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_3 + 5x_2x_4 + 2x_3^2 + 14x_4^2$, $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 \in \mathbb{R}^2$ je primjenjovog znaka.

Iz posljednjeg primjera možemo vidjeti da nije uvijek očigledno da li kvadratna forma (matrica) ima određen znak, posebno ako je ona definisana na prostoru veće dimenzije (tj. zavisi od velikog broja promjenljivih). Zato je od koristi imati kriterijum za definitnost kvadratnih formi. Niže ćemo pokazati kriterijum za ispitivanje da li je kvadratna forma pozitivno definitna.

Neposredno se vidi da je kvadratna forma $\langle \mathscr{A}x, x\rangle$, $x \in E$ pozitivno definitna ako i samo ako su sve svojstvene vrijednosti opertora $\mathscr{A}$ pozitivne. Naime, dovoljno je uzeti u obzir ortonormiranu bazu od svojstvenih vektora operatora $\mathscr{A}$ u kojoj operator ima matricu koja je dijagonalna i na glavnoj dijagonali su raspoređene svojstvene vrijednosti operatora $\mathscr{A}$. Kriterijum Silvestera koji navodimo niže govori da se o pozitivnoj definitnosti može zaključiti posmatrajući glavne minore matrice operatora $\mathscr{A}$ u bilo kojoj ortonormiranoj bazi (dakle, ne moramo znati ortonormiranu bazu u kojoj je marica operatora dijagonalna).

Napomenimo da matrica simetričnog operatora $\mathscr{A}$ u (proizvoljnoj) ortonormiranoj bazi $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ prostora E ima sledeću formu

$$\begin{pmatrix} \langle \mathscr{A}e_1, e_1\rangle & \langle \mathscr{A}e_1, e_2\rangle & \ldots & \langle \mathscr{A}e_1, e_n\rangle \\ \langle \mathscr{A}e_2, e_1\rangle & \langle \mathscr{A}e_2, e_2\rangle & \ldots & \langle \mathscr{A}e_2, e_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathscr{A}e_n, e_1\rangle & \langle \mathscr{A}e_n, e_2\rangle & \ldots & \langle \mathscr{A}e_n, e_n\rangle \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Teorema 9.2.3 (Kriterijum Silvestra). *Kvadratna forma $\mathcal{A}(x) = \langle \mathscr{A}x, x\rangle$, $x \in E$ je pozitivno definitna ako i samo ako je $\Delta_k > 0$, $k = \overline{1, n}$, gdje je*

$$\Delta_k = \det \begin{pmatrix} \langle \mathscr{A}e_1, e_1\rangle & \langle \mathscr{A}e_1, e_2\rangle & \ldots & \langle \mathscr{A}e_1, e_k\rangle \\ \langle \mathscr{A}e_2, e_1\rangle & \langle \mathscr{A}e_2, e_2\rangle & \ldots & \langle \mathscr{A}e_2, e_k\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathscr{A}e_k, e_1\rangle & \langle \mathscr{A}e_k, e_2\rangle & \ldots & \langle \mathscr{A}e_k, e_k\rangle \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k\times k}$$

glavni minor reda k matrice A operatora $\mathscr{A}$ u ortonormiranoj bazi $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ u E.

Proof. Pretpostavimo da je forma $\mathcal{A}$ pozitivno definitna. Pokazaćemo da su tada svi glavni minori pozitivni. Neka je $E_k = \mathrm{Lin}\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$. Neka je $\mathscr{A}_k$ suženi operator $\mathscr{A}|_{E_k}$. Budući da je $\mathcal{A}$ pozitivno definittna kvadratne forma i na E_k, sve svojstvene vrijednosti za $\mathscr{A}_k$ su pozitivne. Ovo znači da je $\Delta_k > 0$.

Ukoliko kvadratna forma nije $\mathcal{A}$ nije pozitivno definitna, tada postoji prvi potprostor E_k na kome je narušena pozitivna definitnost, odnostno postoji prvi E_k na kome suženi operator $\mathscr{A}_k$ ima tačno jednu nepozitivnu sopstvenu vrijednost, dok su ostale pozitivne. Tada imamo $\Delta_k \leq 0$. $\square$

Slično prethodnom dokazu pokazuje se i naredna

Teorema 9.2.4. *Kvadratna forma $\mathcal{A}(x) = \langle \mathscr{A}x, x\rangle$, $x \in E$ je nenegativno definitna ako i samo ako $\Delta_k \geq 0$, $k = \overline{1, n}$.*

Posljedica 9.2.5. *Kvadratna forma $\langle \mathscr{A}x, x\rangle$ je negativno definitna ako i samo ako je $\Delta_{k-1}\Delta_k < 0$, $k = \overline{1, n}$, pri čemu je $\Delta_0 = 1$.*

Dokaz. Kvadratna forma $\langle \mathscr{A}x, x\rangle$ je negativno definitna ako i samo ako je $\langle -\mathscr{A}x, x\rangle$ pozitivno definitna. Lako je uočiti da su minori matirce $-A$ parnog reda jednak minoru matrice A istog reda, dok minori neparnog reda imaju suprotan znak. Odavde slijedi da imamo $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, $\Delta_4 > 0$, itd. Ovo je ekvivalentno sa $\Delta_{k-1}\Delta_k < 0$, $k = \overline{1,n}$. □

Iz prethodnog izlaganja može se primjetiti da je $\Delta_k = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_k$, gdje su λ_i, $i = \overline{1,n}$ svojstvene vrijednosti operatora. Prema tome je $\lambda_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$ (ponovimo da je $\Delta_0 = 1$). Kao posljedicu imamo metod Jakobi, još jedan metod koji se primjenjue za svođenju matrice kvadratne forme na dijagonalni oblik.

Posljedica 9.2.6 (Metod Jakobi)**.** *Neka su svi glavni minori matrice A različiti od nule, tj. $\Delta_k \neq 0$, $k = \overline{1,n}$. Tada u prostoru E postoji (ortonormirna) baza takva da se odgovarajuća kvadratna forma svodi na sumu kvadrata s dijagonalnom matricom koja ima oblik*

$$\begin{pmatrix} \frac{\Delta_1}{\Delta_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\Delta_2}{\Delta_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \end{pmatrix},$$

pri čemu je $\Delta_0 = 1$.

Primjer 9.2.7. Provjerimo da li je kvadratna forma $\mathcal{A}(x) = x_1^2 - x_1x_2 + 3x_1x_3 + 3x_2^2 + x_3^2$ pozitivno definitna.

Matrica ove kvadratne forme je:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 3 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pa je lako izračunati njene glavne minore: $\Delta_1 = 1 > 0$, $\Delta_2 = \frac{11}{4}$ i $\Delta_3 = -4 < 0$. Pošto je glavni minor reda 3 manji od nule, prema kriterijumu Silvestra imamo da ova forma nije pozitivno definitna.

Primjer 9.2.8. Razmotrimo kvadratnu formu $\mathcal{A}(x) = -3x_1^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 2x_2^2 - 5x_3^2$. Njena matrica je

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -5 \end{pmatrix},$$

pa su glavni minori $\Delta_1 = -3 < 0$, $\Delta_2 = 2 > 0$ i $\Delta_3 = -1 < 0$. Saglasno prethodnoj teoremi, ova kvadratna forma je negativno definitna.

Primjer 9.2.9. Neka je zadata kvadratna forma

$$\mathcal{A}(x) = x_1x_2 - 3x_2^2 - 4x_1x_3 - x_2x_3 + 2x_3^2 + x_1^2.$$

Matrica ove forme je

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & -3 & -\frac{1}{2} \\ -2 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix},$$

pa su glavni minori $\Delta_0 = 1$, $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = -\frac{13}{4}$, $\Delta_3 = \frac{25}{4}$. Saglasno teoremi Jakobi kanonski oblik forme je

$$\mathcal{A}(\xi) = \xi_1^2 - \frac{1}{3}\xi_2^2 - \frac{13}{25}\xi_3^2,$$

a njena matrica je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{25} \end{pmatrix}.$$

9.3 Indeks i rang kvadratne forme

Definicija 9.3.1. Kvadratna forma $\mathcal{A}(x) = \langle \mathscr{A}x, x\rangle$, $x \in E$ ima normalni oblik u bazi $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ prostora E ako je

$$\mathcal{A}(x) = \langle \mathscr{A}x, x\rangle = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_q^2 - \xi_{q+1}^2 - \cdots - \xi_{q+s}^2,$$

gdje je $x = \sum_{i=1}^n \xi_i f_i$. Odnosno ako je matrica kvadratne forme dijagonalna matrica oblika

$$A(f) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & O & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & O & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Dakle, matrica $A(f)$ sadrži q jedinica na dijagonali, s jedinica sa znakom "-" i $n - q - s$ nula.

Teorema 9.3.2 (Zakon inercije)**.** *Postoji (ortogonalna) baza u kojoj kvadratna forma $\mathcal{A}(x) = \langle \mathscr{A}x, x\rangle$, $x \in E$ ima normalni oblik. Ako su e i f baze u euklidskom prostoru E, u kojima kvadratna forma $\mathcal{A}$ ima normalan oblik, tada je $A(e) = A(f)$.*

Dokaz. Kako nam je već poznato postoji ortonormirana baza $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ u kojoj je matrica operatora dijagonalna. Baza se može odabrati tako da su prvih q svojstvenih vrijednosti pozitvni brojevi, potom narednih s su nagativne svojstvene vrijednosti, i na kraju su vektori koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti 0. U ovoj bazi kvadratna forma imam oblik $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$. Neka je $f_i = \sqrt{\lambda_i} e_i$, $i = \overline{1, q}$, $f_i = -\sqrt{-\lambda_i} e_i$, $i = \overline{q+1, q+s}$ i $f_i = e_i$ ako je $i > q + s$. U bazi $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ kvadratna forma ima normalan oblik. Nova baza je ortogonalana.

Neka je

$$\langle A(f)\xi, \xi\rangle = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_q^2 - \xi_{q+1}^2 - \cdots - \xi_{q+s}^2,$$

i

$$\langle A(e)\nu, \nu\rangle = \nu_1^2 + \nu_2^2 + \cdots + \nu_p^2 - \nu_{p+1}^2 - \cdots - \nu_{p+r}^2.$$

Treba dokazati da je $p = q$ i $s = r$. Jednakost $p + r = q + s$ slijedi iz toga što rang matrice A ne zavisi od izbora baze, pa je $\text{rank}A(f) = \text{rank}A(e)$. Preostaje nam dokazati da je $p = q$. Pretpostavimo suprotno da je $p > q$. Razmotrimo dva potprostora

$$W_e = \text{Lin}\{e_1, e_2, \ldots, e_p\}, \quad W_f = \text{Lin}\{f_{q+1}, f_{q+2}, \ldots, f_n\},$$

čije su dimenzije p i $n-q$, respektivno. Iz pretpostavke $n-q+p > n$, slijedi da postoji ne-nula vektor $x_0 \in W_e \cap W_f$. Ovo znači da se vektor x_0 može predstaviti kao linearna kombinacija sistema vektora $\{e_1, \ldots, e_p\}$, a takođe i kako linearna kombinacija sistema vektora $\{f_{q+1}, \ldots, f_n\}$, pa je

$$x_0 = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_p e_p = \nu_{q+1} f_{q+1} + \cdots + \nu_n f_n.$$

Sada imamo

$$\langle Ax_0, x_0\rangle = \langle A(\xi_1 e_1 + \cdots + \xi_p e_p), \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_p e_p\rangle = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_p^2 > 0$$

i

$$\langle Ax_0, x_0\rangle = \langle A(\nu_{q+1} f_{q+1} + \cdots + \nu_n f_n), \nu_{q+1} f_{q+1} + \cdots + \nu_n f_n\rangle = -\nu_{q+1}^2 - \nu_{q+2}^2 - \cdots - \nu_{q+s}^2 \leq 0.$$

Dobijene kontradiktorne nejednakosti pokazuju da je slučaj $p > q$ nemoguć. Nemogućnost nejednakosti $p > q$ se dokazuje na isti način. Dakle, imamo $p = q$. □

Napomena 9.3.3. Iz dokazane teoreme slijedi da je broj pozitivnih, negativnih i nenultih sabiraka pri svođenju kvadratne forme na sumu kvadrata uvijek isti.

Definicija 9.3.4. Rangom kvadratne forme se naziva broj nenultih sabiraka u njenom normalnom obliku. Indeks kvadratne forme je broj negativnih sabiraka u njenom normalnom obliku.

Posljedica 9.3.5. *Rang i indeks kvadratne forme su invarijantni u odnosu na promjenu baze. Rang i indeks kvadratne forme jednoznačno određuju njen normalni oblik, baza u kojoj forma ima normalni oblik nije jednoznačno određena.*

Napomena 9.3.6. Indeks kvadratne forme je maksimalna dimenzija potprostora na kome je ta forma negativno definitna. Indeks kvadratne forme $\mathcal{A}(x) = \langle Ax, x\rangle$ se označava sa $\text{ind}\mathcal{A}$ ili $\text{ind}A$.

Jasno je da je indeks kvadratne forme jednak broju negativnih svojstvenih vrijednosti simetričnog operatora koji reprezentuje tu kvadratnu formu. Takođe je jasno da ako je kvadratna forma nenegativno definitna da je njen indeks 0, a ako je negativno definitna, tada je njen indeks jednak dimenziji prostora. Ukoliko kvadratna forma $\mathcal{A}$ mijenja znak, tada je $0 < \text{ind}\mathcal{A} < n$.

Primjer 9.3.7. Indeks kvadratne forme $\mathcal{A}(x) = x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2$ u prostoru $\mathbb{R}^2$ je jednak 1, jer je ona negativno definitna na jednodimenzionalnom potprostoru svih vektora oblika $\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Primjer 9.3.8. Naćićemo indeks kvadratne forme

$$\langle Ax, x\rangle = x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 - 3x_3^2 + x_2x_4 - 5x_4^2.$$

Matrica ove forme je sljedeća:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Glavni minori su $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = -\frac{5}{4}$, $\Delta_3 = \frac{15}{4}$, $\Delta_4 = -18$ različiti od nule. Dakle, kvadratnu formu možemo svesti na sumu kvadrata primjenom metoda Jakobi. Elementi na dijagonali su $\frac{\Delta_0}{\Delta_1} = 1$, $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = -\frac{4}{5}$, $\frac{\Delta_2}{\Delta_3} = -\frac{1}{3}$, $\frac{\Delta_3}{\Delta_4} = -\frac{5}{24}$. Pošto imamo tri negativna koeficijenta, to je indeks forme 3.

Glava 10

Linearni operatori u unitarnom prostoru

U ovoj glavi uvodimo pojam unitarnog prostora i razmatramo važne klase linearnih operatora na unitarnim prostorima, klase normalnih, unitarnih i ermitskih operatora.

10.1 Unitarni prostori

Definicija 10.1.1. Kažemo da je vektorski prostor V nad poljem $\mathbb{C}$ unitarni prostor ako je u njemu definisan skalarni (unitarni) proizvod $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ koji isunjava naredne aksiome:
(i) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$, $\forall x, y \in V$;
(ii) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$, $\forall x, y, z \in V$;
(iii) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$, $\forall x, y \in V$;
(iv) $\langle x, x\rangle \geq 0$, $\forall x \in V$, pri čemu je $\langle x, x\rangle = 0$ samo ako je $x = \theta$.

U svakom kompleksnom vekorskom prostoru može se uvesti skalarni proizvod. Naime, neka je $\dim V = n$ i neka je $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ proizvoljna baza prostora V. Za $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ i $y = \sum_{i=1}^n y_i v_i$, definišimo

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y}_i.$$

Sva svojstva (i)-(iv) mogu se neposredno provjeriti i ispuštamo dokaz.

Sada ćemo navesti najbitnija svojstva unitarnih prostora, ali dokaze isuštamo zbog sličnosti sa euklidskim slučajem. Većina svojstava i tvrđenja koja važe za euklidski prostor, mogu se primijeniti i na unitarni prostor. Navešćemo i nekoliko osnovnih razlika.
(I) U unitarnom prostoru V važi $\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle$, $x, y \in V$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Zaista, imamo

$$\langle x, \alpha y\rangle = \overline{\langle \alpha y, x\rangle} = \overline{\alpha}\overline{\langle y, x\rangle} = \overline{\alpha}\langle x, y\rangle.$$

(II) U unitarnim prostorima takođe važi nejednakost Koši-Bunjakovskog, ali ovdje ćemo navesti nešto drukčiji dokaz. Dakle, važi

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle, \quad x, y \in V,$$

pri čemu jednakost ima mjesta samo ako su vektori x i y linearno zavisni.

Ako su x i y linearno zavisni, tada se lako provjerava da tada imamo jednakost u gonjnjoj nejednakosti. Pretpostavimo zato da su x i y linearno nezavisni. Pokazaćemo strogu nejednakost. Za sve $t \in \mathbb{C}$ imamo $\langle tx - y, tx - y\rangle > 0$. Ova nejednakost može se napisati u formi $\langle tx - y, tx - y\rangle = t\bar{t}\langle x, x\rangle - t\langle x, y\rangle - \bar{t}\langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle > 0$, odnosno

$$|t|^2\langle x, x\rangle - 2\mathrm{Re}(t\langle x, y\rangle) + \langle y, y\rangle > 0.$$

U zadnjoj nejednakosti možemo postaviti $t = \frac{\overline{\langle x,y\rangle}}{\langle x,x\rangle}$. Kako je $|t|^2\langle x, x\rangle = \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle x,x\rangle}$ i kako je $t\langle x, y\rangle = \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle x,x\rangle}$ realan broj, prethodna nejedakost postaje

$$-\frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle x, x\rangle} + \langle y, y\rangle > 0,$$

koja se sada neposredno transformiše do nejednakosti Koši-Bunjakovskog.
(III) Nejednakost Koši-Bunjakovskog dozvoljava da se definiše dužina vektora $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, $x \in V$ u unitarnom prostoru V i da se pokaže nejednakosti trougla (nejednakost Minkovskog)

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \quad x, y \in V.$$

(IV) U unitarnom prostoru ne postoji sadržajan pojam ugla između dva vektora, međutim ortogonalnost ima smisla i definiše se na isti način kao u euklidskom slučaju: vektori x i y u unitarnom prostoru su ortogonalni ako je $\langle x, y\rangle = 0$. Takođe se može uvesti pojam ortogonalne dopune skupa.
(V) Ortogonalni i ortonormirani sistem vekotra se definišu na gotovo isti način kao u euklidskom slučaju. Svaki unitarni prostor ima ortonormiranu bazu. Međutim, ako je $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ortonormirana baza unitarnog prostora V, za vektore $x, y \in V$ imamo

$$x = \sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle e_i, \quad \langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle\overline{\langle y, e_i\rangle}, \quad |x|^2 = \langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n}|\langle x, e_i\rangle|^2.$$

(VI) U unitarnom prostoru važi sljedeći identitet:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(|x + y|^2 - |x - y|^2 + i|x + iy|^2 - i|x - iy|^2), \quad x, y \in V.$$

(VII) Neka su V i W unitarni prostori, $\dim V = n$ i $\dim W = m$. Neka su $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ i $f = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ ortonormirane baze u prostorima V i W, respektivno, i $A(e, f) = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ matrica operaora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ u bazama e i f. Tada se lako pokazuje da je

$$a_{ij} = \langle \mathscr{A} e_j, f_i\rangle \quad i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}.$$

(VIII) Neka je $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ sistem vektora u unitarnom prostoru V. Matrica Grama $\Gamma(v) = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $a_{ij} = \langle v_i, v_j\rangle$ $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, m}$ nije simetrična, već imamo $\alpha_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}$ $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, m}$. Matrica koja ispunjava prethodni uslov naziva se ermitskom i taj pojam ćemo sresti kasnije.
(IX) Pojam konjugovanih operatora između unitarnih prostora V i W uvodi se na sličan način kao u euklidskim prostorima i slično se pokazuje se naredna

Teorema 10.1.2. *Za $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ postoji jedinstven operator $\mathscr{A}^* \in \mathcal{L}(W \to V)$ konjugovan operatoru $\mathscr{A}$, odnosno tako da važi*

$$\langle \mathscr{A}x, y\rangle = \langle x, \mathscr{A}^* y\rangle, \quad x \in V, y \in W. \tag{10.1}$$

Osnovna svojstva konjugacije su sljedeća (i ovdje propuštamo dokaze uz napomenu da su oni slični odgovarajućim dokazima u euklidskom slučaju):
(a) $(\mathscr{A}^*)^* = \mathscr{A}$, $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$;
(b) $(\alpha\mathscr{A} + \mu\mathscr{B})^* = \overline{\alpha}\mathscr{A}^* + \overline{\mu}\mathscr{B}^*$, $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$, $\mathscr{B} \in \mathcal{L}(V \to W)$;
(c) $(\mathscr{B}\mathscr{A})^* = \mathscr{A}^*\mathscr{B}^*$, $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$, $\mathscr{B} \in \mathcal{L}(W \to Z)$;
(d) ako je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ regularan operator, tada je $\mathscr{A}^* \in \mathcal{L}(V \to V)$ takođe regularan i pri tome je $(\mathscr{A}^*)^{-1} = (\mathscr{A}^{-1})^*$;
(e) za operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ i njemu konjugovan operator $\mathscr{A}^* \in \mathcal{L}(W \to V)$ imamo $V = \operatorname{Ker}\mathscr{A} \oplus \operatorname{Im}\mathscr{A}^*$ i $W = \operatorname{Ker}\mathscr{A}^* \oplus \operatorname{Im}\mathscr{A}$, tj. $\operatorname{Ker}\mathscr{A}^\perp = \operatorname{Im}\mathscr{A}^*$ i $\operatorname{Im}\mathscr{A}^\perp = \operatorname{Ker}\mathscr{A}^*$.
(f) ako $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ i $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ ortonormirane baze u prostorima V i W, respektivno, matrice $A(e,f) = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$ i $A^*(f,e) = (a^*_{ji}) \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ i $\mathscr{A}^* \in \mathcal{L}(W \to V)$ su konjugovane matrice, tj. važi $a^*_{ji} = \overline{a_{ij}}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Zaista, imamo $a_{ij} = \langle \mathscr{A}e_j, f_i\rangle$, $a^*_{ji} = \langle \mathscr{A}^* f_i, e_j\rangle$, pa je

$$a^*_{ji} = \langle \mathscr{A}^* f_i, e_j\rangle = \overline{\langle e_j, \mathscr{A}^* f_i\rangle} = \overline{\langle \mathscr{A}e_j, f_i\rangle} = \overline{a_{ij}}, \quad i = \overline{1,m}, \, j = \overline{1,n}.$$

Važi i obrnuto: ako su matrice operatora u ortonormiranim bazam konjugovane, opertaori su takođe konjugovani (dokaz se sprovodi slično odgovarajućem u euklidskom slučaju).

10.2 Normalni operatori

Neka je V unitaran prostor i $\dim V = n$.

Definicija 10.2.1. Operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ se naziva normalnim ako su $\mathscr{A}$ i $\mathscr{A}^*$ međusobno komutativni, tj. ako važi $\mathscr{A}\mathscr{A}^* = \mathscr{A}^*\mathscr{A}$.

Lako je pokazati da je operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ normalan ako i samo ako u (proizvoljnoj) ortonormiranoj bazi u prostoru V matrice A i A^* operatora $\mathscr{A}$ i $\mathscr{A}^*$ su komutativne, tj. važi $AA^* = A^*A$.

Lema 10.2.2. *Ako su operatori $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \mathcal{L}(V \to V)$ međusobno komutativni, tj. ako važi $\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{B}\mathscr{A}$, tada postoji zajednički svojstveni vektor za $\mathscr{A}$ i $\mathscr{B}$.*

Dokaz. Potrebno je pokazati da postoji vektor $e \in V$ i skalari $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ tako da je $\mathscr{A}e = \lambda e$ i $\mathscr{B}e = \mu e$.

Kako je V vektorski prostor nad algebarski zatvorenim poljem $\mathbb{C}$, postoji svojstvena vrijednost $\lambda \in \mathbb{C}$ za operator $\mathscr{A}$. Neka je $W_\lambda = \{x \in V | \mathscr{A}x = \lambda x\}$ svojstveni potprostor za $\mathscr{A}$ koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ. Primjetimo da za sve $x \in W_\lambda$ imamo

$$\mathscr{A}(\mathscr{B}x) = (\mathscr{A}\mathscr{B})x = (\mathscr{B}\mathscr{A})x = \mathscr{B}(\mathscr{A}x) = \mathscr{B}(\lambda x) = \lambda\mathscr{B}x.$$

Dakle, $\mathscr{B}x \in W_\lambda$, pa možemo zaključiti da je W_λ invarijantni potprostor za $\mathscr{B}$. Prema tome, možemo razmotriti suženi operator $\mathscr{B}|_{W_\lambda} \in \mathcal{L}(W_\lambda \to W_\lambda)$. Operator $\mathscr{B}|_{W_\lambda}$ takođe ima svojstvenu vrijednost, tj. postoji $\mu \in \mathbb{C}$ i $e \in W_\lambda$, tako da je $\mathscr{B}|_{W_\lambda}e = \mu e$. Sada imamo $\mathscr{B}e = \mu e$, a kako je $e \in W_\lambda$, imamo i $\mathscr{A}e = \lambda e$. □

Teorema 10.2.3. *Operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ je normalan ako i samo ako u V postoji ortonormirana baza od svojstvenih vektora za $\mathscr{A}$.*

Dokaz. Tvrđenje ćemo u jednom smjeru pokazati indukcijom po dimenziji n prostora V.

Ako je $n = 1$ iskaz teoreme je trvijalan.

Neka je $n > 1$ i pretpostavimo da tvrđenje vrijedi za normalne operatore na unitarnim prostorima dimenzije $n-1$. Neka je $\mathscr{A}$ normalan operator na prostoru V. Budući da $\mathscr{A}$ i $\mathscr{A}^*$ međusobno komutiraju, prema Lemi 10.2.2 postoji vektor $e_1 \in V$ i skalari λ, μ tako da je

$$\mathscr{A}e_1 = \lambda_1 e_1 \quad \text{i} \quad \mathscr{A}^* e_1 = \mu_1 e_1,$$

pri čemu se može uzeti $|e_1| = 1$. Neka je $W = e_1^\perp$ ortogonalna dopunu vektora e_1 do čitavog prostora V. Pokazaćemo da je W invarijantni potprostor za $\mathscr{A}$ i $\mathscr{A}^*$. Zaista, za sve $x \in W$ važi

$$\langle \mathscr{A}x, e_1\rangle = \langle x, \mathscr{A}^* e_1\rangle = \langle x, \mu_1 e_1\rangle = \overline{\mu}_1\langle x, e_1\rangle = 0 \Rightarrow \mathscr{A}x \in W,$$

i slično tome je

$$\langle \mathscr{A}^*x, e_1\rangle = \langle x, \mathscr{A}e_1\rangle = \langle x, \lambda_1 e_1\rangle = \overline{\lambda_1}\langle x, e_1\rangle = 0 \Rightarrow \mathscr{A}^*x \in W.$$

Prema tome možemo razmatrati sužene operatore $\mathscr{A}|_W$ i $\mathscr{A}^*|_W$. Suženi operatori $\mathscr{A}|_W$ i $\mathscr{A}^*|_W$ su takođe konjugovani i međusobno komutiraju. Dakle, $\mathscr{A}|_W$ je normalan operator na potprostoru W. Kako je $\dim W = n-1$, prema induktivnoj pretpostavci postoji ortonormirana baza $\{e_2, e_3, \dots, e_n\}$ u W od svojstvenih vektora operatora $\mathscr{A}|_W$. Jasno je da su to svojstveni vektori i za $\mathscr{A}$. Prema tome, ortonormirana baza $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ prostora V, se sastoji od svojstvenih vektora za $\mathscr{A}$.

Pokazaćemo sada tvrđenje u suprotnom smjeru. Pretpostavimo da u V postoji ortonormirana baza $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ od svojstvenih vektora za $\mathscr{A}$.Neka su $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ odgovarajuće svojstvene vrijednosti, tj. neka je $\mathscr{A}e_i = \lambda_i e_i$, $i = \overline{1,n}$. Tada važi

$$\mathscr{A}^*x = \sum_{i=1}^{n}\langle \mathscr{A}^*x, e_i\rangle e_i = \sum_{i=1}^{n}\langle x, \mathscr{A}e_i\rangle e_i = \sum_{i=1}^{n}\overline{\lambda_i}\langle x, e_i\rangle e_i, \quad x \in V.$$

Posebno, imamo $\mathscr{A}^*e_i = \overline{\lambda}_i e_i$, $i = \overline{1,n}$. Prema tome je

$$\mathscr{A}^*\mathscr{A}e_i = |\lambda_i|^2 e_i \quad \text{i} \quad \mathscr{A}\mathscr{A}^*e_i = |\lambda_i|^2 e_i.$$

Za proizvoljan vektor $x \in V$ važi

$$\mathscr{A}^*\mathscr{A}x = \mathscr{A}^*\mathscr{A}(\sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle e_i) = \sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle \mathscr{A}^*\mathscr{A}e_i = \sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle |\lambda_i|^2 e_i$$

i

$$\mathscr{A}\mathscr{A}^*x = \mathscr{A}\mathscr{A}^*(\sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle e_i) = \sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle \mathscr{A}\mathscr{A}^*e_i = \sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle |\lambda_i|^2 e_i.$$

Iz prethodne dvije jednakosti slijedi $\mathscr{A}\mathscr{A}^* = \mathscr{A}^*\mathscr{A}$. □

Napomena 10.2.4. Iz dokaza prethodne teoreme proizilazi da postoji ortonormirana baza u kojoj je matrica normalnog operatora $\mathscr{A}$ dijagonalna, pri tome su na glavnoj dijagonali svojstvene vrijednosti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ operatora $\mathscr{A}$. Matrica operatora $\mathscr{A}^*$ u istoj bazi je takođe dijagonalna, pri čemu su sada $\overline{\lambda}_1, \overline{\lambda}_2 \ldots, \overline{\lambda}_n$ na glavnoj dijagonali. Dakle, postoji ortonormirana baza e u kojoj matrica normalnog operatora $A(e)$ i matrica njemu konjugovanog $A^*(e)$ imaju sljedeće oblike

$$A(e) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad A^*(e) = \begin{pmatrix} \overline{\lambda}_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

10.3 Unitarni operatori

Neka je V unitarni prostor i $\dim V = n$.

Definicija 10.3.1. Operator $\mathscr{U} \in \mathcal{L}(V \to V)$ nazivamo unitarnim ako je $\mathscr{U}^*\mathscr{U} = \mathscr{I}$.

Kako i kod ortpgonalnih operatora, može se pokazati da je operator unitaran ako i samo ako je regularan i $\mathscr{U}^* = \mathscr{U}^{-1}$, odnosno ako i samo ako važi

$$\mathscr{U}\mathscr{U}^* = \mathscr{U}^*\mathscr{U} = \mathscr{I}.$$

Dakle, svaki unitarni operator je normalan.

Matricu $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ nazivamo unitarnom ako važi $U^*U = I$. Matrica unitarnog operatora u ortonormiranoj bazi prostora V je unitarna, što slijedi iz činjenice da su matrice konjugovanih operatora (u ortonormiranoj bazi) konjugovane. Vrijedi i obrnuto.

Teorema 10.3.2. *Neka je $\mathscr{U} \in \mathcal{L}(V \to V)$ operator na unitarnom prostoru V. Naredni iskazi su ekvivalentni:*
(1) $\mathscr{U}$ je unitarni operator, tj. $\mathscr{U}\mathscr{U}^* = \mathscr{U}^*\mathscr{U} = \mathscr{I}$;
(2) $\langle \mathscr{U}x, \mathscr{U}y\rangle = \langle x, y\rangle$, $\forall x, y \in V$;
(3) $\mathscr{U}$ je izometrija, tj. $|\mathscr{U}x| = |x|$, $\forall x \in V$;
(4) $\mathscr{U}$ preslikava ortonormirani sistem vektora u ortonormirani sistem;
(5) $\mathscr{U}$ je normalni operator i sve svojstvene vrijednosti za $\mathscr{U}$ imaju apsolutnu vrijednost 1.

Dokaz. (1) $\Rightarrow$ (2): $\langle \mathscr{U}x, \mathscr{U}y\rangle = \langle x, \mathscr{U}^*\mathscr{U}y\rangle = \langle x, \mathscr{I}y\rangle = \langle x, y\rangle$, $\forall x, y \in V$;

(2) $\Rightarrow$ (1): Za proizvoljne vektore $x, y \in V$ važi $\langle \mathscr{U}^*\mathscr{U}x, y\rangle = \langle \mathscr{U}x, \mathscr{U}y\rangle = \langle x, y\rangle$, pa mora biti $\mathscr{U}^*\mathscr{U}x = x$, $\forall x \in V$, tj. imamo $\mathscr{U}^*\mathscr{U} = \mathscr{I}$.

(2) $\Rightarrow$ (3): $|\mathscr{U}x| = \sqrt{\langle \mathscr{U}x, \mathscr{U}x\rangle} = \sqrt{\langle x, x\rangle} = |x|$, $\forall x \in V$.

(3) $\Rightarrow$ (2): Neka su $x, y \in V$ proizvoljni vektori. Koristeći identitet

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}(|u+v|^2 - |u-v|^2 + i|u+iv|^2 - i|u-iv|^2),$$

prvo za $u = \mathscr{U}x$, $v = \mathscr{U}y$, a potom za vektore $u = x$, $v = y$, nalazimo

$$\begin{aligned}\langle \mathscr{U}x, \mathscr{U}y\rangle &= \frac{1}{4}(|\mathscr{U}x + \mathscr{U}y|^2 - |\mathscr{U}x - \mathscr{U}y|^2 + i|\mathscr{U}x - i\mathscr{U}y|^2 - i|\mathscr{U}x - i\mathscr{U}y|^2)\\ &= \frac{1}{4}(|\mathscr{U}(x+y)|^2 - |\mathscr{U}(x-y)|^2 + i|\mathscr{U}(x+iy)|^2 - i|\mathscr{U}(x-iy)|^2)\\ &= \frac{1}{4}(|x+y|^2 - |x-y|^2 + i|x+iy|^2 - i|x-iy|^2) = \langle x, y\rangle.\end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (4): Neka je $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ ortonormirani sistem vektora u V. Tada je $\langle \mathscr{U}f_i, \mathscr{U}f_j\rangle = \langle f_i, f_j\rangle = \delta_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,m}$ (δ_{ij} je simbol Kronekera). Dakle, $\{\mathscr{U}f_1, \mathscr{U}f_2, \ldots, \mathscr{U}f_m\}$ je takođe ortonormirani sistem vektora.

(4) $\Rightarrow$ (3): Ako je $x \neq 0$, možemo uzeti sistem od jednog vektora $\{e\}$, gdje je $e = |x|^{-1}x$. Tada je $|\mathscr{U}e| = 1$, tj. $|\mathscr{U}x| = |x|$.

(1) $\Rightarrow$ (5): Pretpostavimo da je λ svojstvena vrijednost operatora $\mathscr{U}$ i neka je e, $|e| = 1$, odgovarajući svojstveni vektor. Tada je

$$1 = \langle e, e\rangle = \langle \mathscr{U}^*\mathscr{U}e, e\rangle = \langle \mathscr{U}e, \mathscr{U}e\rangle = \langle \lambda e, \lambda e\rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle e, e\rangle = |\lambda|^2.$$

Dakle, $|\lambda| = 1$.

(5) $\Rightarrow$ (3): Neka je $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza u V koja se sastoji od svojstvenih vektora normalnog operatora $\mathscr{U}$, i neka je $\mathscr{U}e_i = \lambda_i e_i$, $|\lambda_i| = 1$, $i = \overline{1,n}$. Za proizvoljan vektor $x \in V$ je $x = \sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle e_i$, pa imamo

$$\mathscr{U}x = \sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle \mathscr{U}e_i = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\langle x, e_i\rangle e_i.$$

Prema tome, dužina vektora $\mathscr{U}x$ je

$$|\mathscr{U}x|^2 = \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i\langle x, e_i\rangle|^2 = \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2\langle x, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}|\langle x, e_i\rangle|^2 = |x|^2.$$

Dakle, $|\mathscr{U}x| = |x|$, $\forall x \in V$, pa je $\mathscr{U}$ zaista izometrija prostora V. □

Napomena 10.3.3. Iz upravo pokazanog tvrđenja slijedi da unitarni operator ima ortnormiranu bazu od svojstvenih vektora. U toj bazi matrica operatora ima dijagonalni oblik, a na dijagonali su svojstvene vrijednosti operatora, tj. kompleksni brojevi čija je apsolutna vrijednost 1. Imajući u vidu polarno predstavljanje kompleksnog broja, zaključujemo da u V postoji ortonormirana baza u kojoj matrica unitarnog operatora ima sljedeći oblik

$$\begin{pmatrix} e^{i\phi_1} & 0 & \ldots & 0\\ 0 & e^{i\phi_2} & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & e^{i\phi_n}\end{pmatrix}, \quad \phi_i \in [0, 2\pi),\ i = \overline{1,n}.$$

10.4 Ermitski operatori

Neka je V unitarni prostor i $\dim V = n$.

Definicija 10.4.1. Operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ se naziva ermitskim (ili samokonjugovanim) ako je $\mathscr{A} = \mathscr{A}^*$, tj. ako važi $\langle \mathscr{A}x, y\rangle = \langle x, \mathscr{A}y\rangle$, $\forall x, y \in V$.

Navodimo činjenice o ermitskim operatorima koje se neposredno pokazuju:
(i) Operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ je ermitski ako i samo ako je matrica A u proizvoljnoj ortonormiranoj bazi prostora V ermitska (samokonjugovana) matrica, odnosno ako je $A = A^*$. Primjetimo da su na dijagonali ermitske matrice realni brojevi, jer je $a_{ii} = \overline{a_{ii}}$, $i = \overline{1, n}$.
(ii) Svaki ermitski operator je normalan operator.
(iii) Ako je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ ermitski operator, tada je $\langle \mathscr{A}x, x\rangle \in \mathbb{R}$, $x \in V$. Naime, kako je $\mathscr{A} = \mathscr{A}^*$, imamo

$$\langle \mathscr{A}x, x\rangle = \langle x, \mathscr{A}x\rangle = \overline{\langle \mathscr{A}x, x\rangle}.$$

(iv) Realno-linearna kombinacija ermitskih operatora je takođe ermitski operator, tj. ako su $\mathscr{A}$ i $\mathscr{B}$ ermitski operatori, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, tada je $\lambda\mathscr{A} + \mu\mathscr{B}$ ermitski operator.

Teorema 10.4.2. *Sve svojstvene vrijednosti ermitskog operatora su realne. Svojstveni vektori ermitskog operatora, koji odgovaraju različitim svojstvenim vrijednostima, su međusobno ortogonalni.*

Dokaz. Neka je $\mathscr{A}e = \lambda e$, $|e| = 1$. Tada je

$$\lambda = \lambda \cdot 1 = \lambda\langle e, e\rangle = \langle \lambda e, e\rangle = \langle \mathscr{A}e, e\rangle = \langle e, \mathscr{A}e\rangle = \langle e, \lambda e\rangle = \overline{\lambda}\langle e, e\rangle = \overline{\lambda}.$$

Dakle, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Neka je sada $\mathscr{A}e = \lambda e$ i $\mathscr{A}f = \mu f$, pri čemu je $\lambda \neq \mu$. Tada imamo

$$\lambda\langle e, f\rangle = \langle \lambda e, f\rangle = \langle \mathscr{A}e, f\rangle = \langle e, \mathscr{A}f\rangle = \langle e, \mu f\rangle = \overline{\mu}\langle e, f\rangle = \mu\langle e, f\rangle.$$

Kako je $\lambda \neq \mu$, mora biti $\langle e, f\rangle = 0$. Dakle, $e \perp f$. □

Posljedica 10.4.3. *Operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ je ermitski ako i samo ako je normalan i sve njegove svojstne vrijednosti su realne.*

Teorema 10.4.4 (Ermitovo razlaganje operatora)**.** *Za $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ postoje jedinstveni ermitski operatori $\mathscr{B}$ i $\mathscr{C} \in \mathcal{L}(V \to V)$, tako da je $\mathscr{A} = \mathscr{B} + i\mathscr{C}$.*

Dokaz. Neka je $\mathscr{B} = \frac{1}{2}(\mathscr{A} + \mathscr{A}^*)$ i $\mathscr{C} = \frac{1}{2i}(\mathscr{A} - \mathscr{A}^*)$. Lako se vidi da je $\mathscr{B} + i\mathscr{C} = \mathscr{A}$. Operatori $\mathscr{B}$ i $\mathscr{C}$ su ermitski, jer je

$$\mathscr{B}^* = \frac{1}{2}(\mathscr{A} + \mathscr{A}^*)^* = \frac{1}{2}(\mathscr{A}^* + \mathscr{A}) = \mathscr{B}$$

i

$$\mathscr{C}^* = \frac{1}{2i}(\mathscr{A} - \mathscr{A}^*)^* = -\frac{1}{2i}(\mathscr{A} - \mathscr{A}^*)^* = -\frac{1}{2i}(\mathscr{A}^* - \mathscr{A}) = \mathscr{C}.$$

Pokažimo sada jedinstvenost razlaganja, ali primjetimo prvo da ako su $\mathscr{A}$ i $i\mathscr{A}$ ermitski operatori, tada je $\mathscr{A}$ nula-operator. Naime, kako je $i\mathscr{A} = (i\mathscr{A})^* = \bar{i}\mathscr{A}^* = -i\mathscr{A}$, mora biti $\mathscr{A}x = \theta$, $\forall x \in V$.

Neka je $\mathscr{A} = \mathscr{B} + i\mathscr{C}$ i $\mathscr{A} = \mathscr{B}_1 + i\mathscr{C}_1$, pri čemu su $\mathscr{B}$ i $\mathscr{C}$ ermitski operatori. Tada je $\mathscr{B}+i\mathscr{C} = \mathscr{B}_1+i\mathscr{C}_1$, odosno $\mathscr{B}-\mathscr{B}_1 = i(\mathscr{C}_1-\mathscr{C})$. Ovo znači da su $(\mathscr{C}_1-\mathscr{C})$ i $i(\mathscr{C}_1-\mathscr{C})$ ermitski operatori, a kako smo vidjeli, to je moguće samo ako je $\mathscr{C}_1 - \mathscr{C}$ nula-operator, tj. $\mathscr{C}_1 = \mathscr{C}$, pa mora biti i $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1$. □

Definicija 10.4.5. Za ermitski operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ kažemo da je nenegativan ako je $\langle \mathscr{A}x, x\rangle \geq 0$, $\forall x \in V$. Za nenegativan operator $\mathscr{A}$ kažemo da je pozitivan ako je $\langle \mathscr{A}x, x\rangle = 0$ samo ako je $x = \theta$.

Teorema 10.4.6. *Ermitski operator je nenegativan (pozitivan) ako i samo su sve njegove svojstvene vrijednosti nenegativne (pozitivne).*

Dokaz. Pretpostavimo da je ermitski operator $\mathscr{A}$ nenegativan (pozitivan). Neka je λ svojstvena vrijednost, a e, $|e| = 1$, odgovarajući svojstveni vektor. Kako je

$$\lambda = \lambda \cdot 1 = \lambda\langle e, e\rangle = \langle \mathscr{A}e, e\rangle,$$

možemo zaključiti da ako je $\mathscr{A}$ nenegativan (pozitivan) operator, tada je $\lambda \geq 0$ $(\lambda > 0)$.

Pokažimo sada obrnuto. Zbog normalnosti operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$, u prostoru V postoji ortonormirana baza $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ koja se sastoji od svojstvenih vektora operatora $\mathscr{A}$. Neka su λ_i odgovarajuće svojstvene vrijednosti, tj. neka je $\mathscr{A}e_i = \lambda_i e_i$, $i = \overline{1,n}$. Za sve vektore $x \in V$ je $x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i$ i $\mathscr{A}x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle \mathscr{A}e_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x, e_i\rangle e_i$. Kako su svojstvene vrijednosti ermitskog operatora realne, imamo

$$\langle \mathscr{A}x, x\rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle \overline{\lambda_i\langle x, e_i\rangle} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left|\langle x, e_i\rangle\right|^2.$$

Ako su sve svojstvene vrijednosti nenegativne, jasno je da imamo $\langle \mathscr{A}x, x\rangle \geq 0$, a ako su sve pozitivne, za $x \neq 0$ važi $\langle \mathscr{A}x, x\rangle > 0$. □

Teorema 10.4.7. *Pozitivan ermitski operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ je regularan i njegov obratni operator $\mathscr{A}^{-1} \in \mathcal{L}(V \to V)$ je takođe pozitivan.*

Dokaz. Ako je $\mathscr{A}x = \theta$, tada je $\langle \mathscr{A}x, x\rangle = 0$, a kako je $\mathscr{A}$ pozitivan, mora biti $x = \theta$. Dakle, jezgro operatora $\mathscr{A}$ je trivijalno, pa je zaista riječ o regularnom operatoru.

Neka je $y \neq \theta$. Postoji $x \neq \theta$ tako da je $\mathscr{A}x = y$. Kako je

$$\langle \mathscr{A}^{-1}y, y\rangle = \langle \mathscr{A}^{-1}\mathscr{A}x, \mathscr{A}x\rangle = \langle x, \mathscr{A}x\rangle = \langle \mathscr{A}x, x\rangle > 0,$$

to možemo zaključiti da je $\mathscr{A}^{-1}$ takođe pozitivan operator. □

Primjetimo da je nenegativna (pozitivna) linearna kominacija nenegativnih (pozitivnih) ermitskih operatora takođe nenegativan (pozitivan) ermitski operator.

Teorema 10.4.8. *Ako je operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ nenegativan, tada postoji jedinstven nenegativan operator $\mathscr{B} \in \mathcal{L}(V \to V)$, takav da $\mathscr{B}^2 = \mathscr{A}$. Operator $\mathscr{B}$ se naziva korijenom operatora $\mathscr{A}$*
Oznaka: *$\mathscr{A}^{\frac{1}{2}}$ ili $\sqrt{\mathscr{A}}$ za korijen operatora $\mathscr{A}$.*

Dokaz. Neka je $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza od svojstvenih vektora operatora $\mathscr{A}$, tj. neka je $\mathscr{A} e_i = \lambda_i e_i$, $\lambda_i \geq 0$, $i = \overline{1,n}$. Operator $\mathscr{B} \in \mathcal{L}(V \to V)$ uvedimo na sljedeći način $\mathscr{B} e_i = \sqrt{\lambda_i} e_i$, $i = \overline{1,n}$. Jasno je da je operator $\mathscr{B}$ ermitski, a kako je $\sqrt{\lambda_i} \geq 0$, $i = \overline{1,n}$ slijedi da je $\mathscr{B}$ nenegativan. Osim toga, jasno je da važi $\mathscr{B}^2 = \mathscr{A}$, jer je $\mathscr{B}^2 e_i = \mathscr{A} e_i$, $i = \overline{1,n}$.

Pokažimo sada jedinstvenost operatora $\mathscr{B}$. Pretpostavimo da za nenegativan ermitski operator $\mathscr{C}$ važi $\mathscr{C}^2 = \mathscr{A}$. Primjetimo da ako je x svojstveni vektor za $\mathscr{C}$ koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ, tada je x svojstveni vektor i za $\mathscr{A}$, ali odgovara svojstvenoj vrijednosti λ^2. Ovo znači da $\mathscr{C}$ i $\mathscr{A}$ imaju iste svojstvene vektore. Dakle, ortonormirana baza od svojstvenih vektora za $\mathscr{A}$ je takođe baza od svojstvenih vektora za $\mathscr{C}$. U ovoj ortonormiranoj bazi matrice za operatore $\mathscr{C}$ i $\mathscr{B}$ su jednake, a to znači da su i sami operatori jednaki. Dakle, imamo $\mathscr{B} = \mathscr{C}$. $\square$

Dodatak A

Klasifikacija hiperpovrši drugog reda u euklidskom prostoru

Hiperpovrš drugog reda u euklidskom prostoru E^n je skup tačaka $x \in E^n$ koje zadovoljavaju sljedeću jednakost:

$$\langle \mathscr{A}x, x\rangle + \langle b, x\rangle + \gamma = 0, \tag{A.1}$$

gdje je A simetrična matrica formata $n \times n$, $b \in E^n$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Dakle, prvi sabirak je kvadratna forma, drugi linearna forma, a γ je konstanta.

Primjedba A.0.1. Linearnom zamjenom promjenljivih i pomjeranjem koordinatnog početka jednačina hiperpovrši (A.1) se može svesti na jedan od sljedeća dva oblika:

$$(A) \quad \lambda_1\xi_1^2 + \cdots + \lambda_r\xi_r^2 + \gamma = 0,\ r \leq n.$$

$$(B) \quad \lambda_1\xi_1^2 + \cdots + \lambda_r\xi_r^2 = 2\mu\xi_{r+1},\ r < n.$$

Umjesto dokaza ovog tvrđenja niže ćemo dati nekoliko primjera postupka svođenja jednačine hiperpovrši. Sada razmotrimo slučaj (A). Jednostavnom zamjenom koeficijenata jednakost (A) možemo svesti na sljedeći oblik:

$$(A) \quad \frac{\xi_1^2}{\alpha_1^2} + \cdots + \frac{\xi_p^2}{\alpha_p^2} - \frac{\xi_{p+1}^2}{\alpha_{p+1}^2} - \cdots - \frac{\xi_r^2}{\alpha_r^2} = c = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}. \tag{A.2}$$

Sada razmotrimo nekoliko slučajeva:

(A1a) Neka je rang matrice A ravan n, a indeks nula, tj. $r = n, c = 1, p = n$. Tada jednačina (A.2) opisuje $(n-1)$-dimenzionalni elipsoid.

(A1b) Neka su rang i indeks matrice A ravni n, tj. $r = n, c = 1, p = 0$. Tada je skup tačaka u E^n koje zadovoljavaju jednačinu prazan. Reći ćemo da je ova hiperpovrš imaginarni $(n-1)$-dimenzionalni elipsoid.

(A1c) Neka je rang matrice A ravan n, a indeks veći od nule i manji od n, tj. $r = n, c = 1, 0 < p < n$. Tada jednačina (A.2) opisuje $(n-1)$-dimenzionalni hiperboloid.

Sada razmotrimo slučaj kada je $c = 0$.

(A0a) Neka je $r = n, c = 0, 0 < p < n$. Ovu hiperpovrš nazivamo $(n-1)$-dimenzionalnim konusom drugog reda.

(A0b) Neka je $r = n$, $c = 0$, $p = 0$ ili $p = n$. Tada samo nula zadovoljava jednačinu (A.2). Reći ćemo da je ovo imaginarni $(n-1)$-dimenzionalni konus.

Konačno, u slučajevima kada je $r < n$, reći ćemo da se radi o cilindričkim površima.

Sada razmotrimo jednačinu (B). Zamjenom koeficijenata, ovu jednačinu možemo svesti na oblik:

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha_1^2} + \cdots + \frac{\xi_p^2}{\alpha_p^2} - \frac{\xi_{p+1}^2}{\alpha_{p+1}^2} - \cdots - \frac{\xi_r^2}{\alpha_r^2} = 2\xi_{r+1}. \tag{A.3}$$

(B1) Neka je $r = n-1$. Tada jednačina (A.3) opisuje $(n-1)-$dimenzionalni paraboloid.

(B2) Ako je $r < n-1$, tada govorimo da se radi o cilindričnoj površi.

Sada ćemo predstaviti metod svođenja jednačine hiperpovrši na dva primjera. Veći dio metoda nam je dobro poznat, jer se sastoji u linearnoj zamjeni promjenljivih, tako da se kvadratna forma u (A.1) svede na sumu kvadrata. Ostatak metoda je pomjeranje koordinatnog početka kako bi se sredio linearni dio jednakosti.

Primjer A.0.2. Odrediti tip hiperpovrši drugog reda u E^3 zadate jednačinom:

$$x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - 3x_1 - x_2 + 6 = 0.$$

Najprije grupišemo sabirke, kako bismo kvadratnu formu sveli na sumu kvadrata metodom Lagranža. Imamo redom:

$$(x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 - \frac{1}{4}x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - 3x_1 - x_2 + 6 = 0.$$

$$(x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 - (\frac{1}{2}x_2 - 2x_3)^2 + 4x_3^2 + x_3^2 - 3x_1 - x_2 + 6 = 0.$$

Uvodeći linearnu zamjenu promjenljivih: $x_1 - \frac{1}{2}x_2 = \xi_1, \frac{1}{2}x_2 - 2x_3 = \xi_2, x_3 = \xi_3$ dobijamo:

$$\xi_1^2 - \xi_2^2 + 5\xi_3^2 - 3x_1 - x_2 + 6 = 0.$$

U posljednjoj jednakosti zamijenimo x_1, x_2 na nove promjenljive:

$$\begin{cases} x_1 = \xi_1 + \frac{1}{2}x_2 = \xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 \\ x_2 = 2\xi_2 + 4x_3 = 2\xi_2 + 4\xi_3. \end{cases}$$

Tada:

$$\xi_1^2 - \xi_2^2 + 5\xi_3^2 - 3\xi_1 - 3\xi_2 - 6\xi_3 - 2\xi_2 - 4\xi_3 + 6 = 0 \Rightarrow$$
$$-\frac{1}{6}\xi_1^2 + \frac{1}{6}\xi_2^2 - \frac{5}{6}\xi_3^2 + \frac{1}{2}\xi_1 + \frac{5}{6}\xi_2 + \frac{5}{3}\xi_3 = 1.$$

Kako u posljednjoj jednakosti prisustvuju kvadratni članovi od sve tri promjenljive, to dodavanjem i oduzimanjem konstanti možemo napisati potpune kvadrate po promjenljivima ξ_1, ξ_2, ξ_3:

$$-\frac{1}{6}(\xi_1 - \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{8} + \frac{1}{6}(\xi_2 + \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{24} - \frac{5}{6}(\xi_3 - 1)^2 + \frac{5}{6} = 1.$$

Uvodeći odgovarajuće smjene dobijamo (ova zamjena u stvari predstavlja pomjeranje koordinatnog početka):

$$-\frac{1}{6}\widetilde{\xi_1}^2 + \frac{1}{6}\widetilde{\xi_2}^2 - \frac{5}{6}\widetilde{\xi_3}^2 = \frac{5}{6} \Rightarrow -\frac{1}{5}\widetilde{\xi_1}^2 + \frac{1}{5}\widetilde{\xi_2}^2 - \widetilde{\xi_3}^2 = 1.$$

Zaključujemo da se radi o dvodimenzionalnom hiperboloidu (hiperboloidu u trodimenzionalnom prostoru).

Primjer A.0.3. Odrediti tip hiperpovrši drugog reda zadate jednačinom:

$$4x_1^2 + 9x_2^2 + 4x_3^2 - 6x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3 + 3x_1 - x_2 - x_3 - 4 = 0.$$

Opet počinjemo svođenjem kvadratne forme na sumu kvadrata:

$$(2x_1 - 3x_2 + x_3)^2 - 9x_2^2 - x_3^2 + 9x_2^2 + 4x_3^2 + 3x_1 - x_2 - x_3 - 4 = 0,$$

pa uvodeći smjene $\xi_1 = 2x_1 - 3x_2 + x_3$, $\xi_2 = x_3$, $\xi_3 = -3x_1 + x_2 + x_3 + 4$:

$$\xi_1^2 + 3\xi_2^2 = \xi_3.$$

Dakle, ovdje se radi o dvodimenzionalnom paraboloidu.

Dodatak B

Linearne operatorske jednačine u unitarnom prostoru

Na kraju ćemo se kratko vratiti na jedan od zadataka sa kojim smo počeli kurs Linearne algebre, pitanje postojanja rješenja sistema linearnih jednačina. Opremljeni određenim znanjima, sagledaćemo ovaj problem iz nešto drugačije perspektive. Sistem linearnih jednačina možemo posmatrati kao jednu operatorsku jednačinu u vektorskom prostoru.

Neka su V, W unitarni prostori i $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$. Razmotrimo jednačinu:

$$\mathscr{A} z = u, \tag{B.1}$$

gdje je $u \in W$ poznati vektor, a $z \in V$ nepoznati vektor.

Definicija B.0.1. Homogena jednačina

$$\mathscr{A}^* w = \theta \tag{B.2}$$

se naziva konjugovanom ka jednačini (B.1).

Poznato nam je (Teorema 8.1.7) da:

$$V = \operatorname{Ker} \mathscr{A} \oplus \operatorname{Im} \mathscr{A}^*, \quad W = \operatorname{Ker} \mathscr{A}^* \oplus \operatorname{Im} \mathscr{A}.$$

Koristeći ova razlaganja možemo dokazati sljedeću teoremu:

Teorema B.0.2 (Alternativa Fredholma)**.** *Ili jednačina $\mathscr{A} z = u$ ima rješenje za svako $u \in W$, ili konjugovana jednačina $\mathscr{A}^* w = \theta$ ima netrivijalna rješenja.*

Dokaz. Jednačina $\mathscr{A} z = u$ ima rješenje ako i samo ako $u \in \operatorname{Im} \mathscr{A}$. Neka $\mathscr{A} z = u$ ima rješenje za svako $u \in W$, tada $\operatorname{Im} \mathscr{A} = W$. Kako je $W = \operatorname{Ker} \mathscr{A}^* \oplus \operatorname{Im} \mathscr{A}$ imamo da je $\operatorname{Ker} \mathscr{A}^* = \{\theta_W\}$, pa $\mathscr{A}^* w = \theta$ ima samo trivijalno rješenje.

Neka jednačina $\mathscr{A}^* w = \theta$ ima netrivijalno rješenje. Ovo znači da je $\operatorname{Ker} \mathscr{A}^* \neq \{\theta\}$, pa $\operatorname{Im} \mathscr{A} \neq W$, te postoji $\widetilde{u} \in W$, takvo da $\widetilde{u} \notin \operatorname{Im} \mathscr{A}$. Ovo znači da jednačina $\mathscr{A} z = \widetilde{u}$ nema rješenje za svako u. $\square$

Dokazana Teorema se naziva alternativom Fredholma, ovdje imamo "ekskluzivno ili" tj. rečenicu tipa "ili-ili" koja označava da uvijek ima mjesto tačno jedna situacija.

Kada je $V = W$ teorema se može formulisati na sljedeći način:

Teorema B.0.3. *Neka je* $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$. *Tada ili jednačina* $\mathscr{A}z = u$ *ima jedinstveno rješenje za svako* $u \in V$, *ili konjugovana jednačina* $\mathscr{A}^* w = \theta$ *ima netrivijalno rješenje.*

Konačno, možemo formulisati i sljedeću:

Teorema B.0.4. *Jednačina* $\mathscr{A}z = u$ *ima rješenje, ako i samo ako je vektor* u *ortogonalan na potprostor* $\mathrm{Ker}\mathscr{A}^*$.

Dokaz. Kako je $\mathrm{Im}\,\mathscr{A} \perp \mathrm{Ker}\,\mathscr{A}^*$ to $u \in \mathrm{Im}\,\mathscr{A}$ ako i samo ako $u \perp \mathrm{Ker}\mathscr{A}^*$. $\square$

Zadatak B.0.5. Koristeći prethodne teoreme provjeriti da li sljedeći sistem ima rješenje:

$$\begin{cases} (1-i)z_1 - 2z_2 = i; \\ (1+i)z_1 - 2iz_2 = -1-i. \end{cases}$$

Bibliografija

[1] Sheldon J. Axler. *Linear Algebra Done Right*. Springer, 2015

[2] Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel and Lawrence E. Spence. *Linear Algebra, 4th Edition*. Pearson, 2002.

[3] Evgeniy V. Shikin. *Lineinie prostranstva i otobrazheniya* (na ruskom). MGU, Moskva, 1987.

[4] Paul R. Halmos. *Finite–Dimensional Vector Spaces: Second Edition*. Dover Publications, 2017.

[5] Paul R. Halmos. *Linear algebra Problem Book*. Mathematical Association of America, 1995

[6] Fumio Hiai and Dénes Petz. *Introduction to Matrix Analysis and Applications*. Springer, 2014.

[7] Krešimir Horvatić. *Linearna algebra*. Golden marketing, Zagreb, 2004.

[8] Aleksandar Lipkovski. *Linearna algebra i analitička geometrija*. Zavod za udžbenike, Beograd, 2007.

[9] Neven Elezović. *Linearna algebra*. Element, Zagreb, 1996.

[10] Ljubiša Kočinac. *Linearna algebra i analitička geometrija*. Prosveta, Niš, 1997.

[11] Gradimir V. Milovanović i Radosav Ž. Djorđević. *Linearna Algebra*. Elektronski fakultet Niš, 2004.

[12] Igor V. Proskurjakov. *Zbirka zadataka iz Linearne algebre*. Savremena administracija, Beograd, 1988.

[13] Morris W. Hirsch and Stephen Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Academic Press, 1974.

[14] V.V. Voevodin. *Lineynaya algebra*. Nauka, Moskava, 1980.