Linearna algebra: udžbenik za studente prve godine

Vladimir Jaćimović

October 1, 2020

Sadržaj

Predgovor

Ova knjiga predstavlja udžbenik iz Linearne algebre za studente prve godine matematičkih fakulteta. Udžbenik je napisan na osnovu kursa lekcija iz predmeta "Linearna algebra 1" i "Linearna algebra 2" koji su tokom nekoliko godina držani studentima prve godine Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta Crne Gore. Materijal koji je izložen u udžbeniku je, po našem mišljenju, dovoljna osnova iz Linearne algebre za studente matematičkih fakulteta.
Izražavam zahvalnost za pomoć u pisanju udžbenika i dragocjene savjete svom kolegi prof. Izedinu Krniću. Takodje, veliku pomoć u pisanju udžbenika i tehničkoj pripremi su pružili studenti Milica Kankaraš, Jelena Dakić, Nikola Konatar, Andrea Vujisić, Milena Božović, Velibor Došljak i Velimir Ćorović.

Uvod: pojmovi grupe i polja

Ovo je uvodno poglavlje. U njemu ćemo uvesti neke matematičke pojmove koji će nam biti potrebni tokom kursa *Linearne algebre.*
Skup je jedan od svega nekoliko pojmova u matematici koji se ne definiše. Smatramo da svi podrazumijevamo isto kada koristimo riječ "skup". Skup koji sadrži konačan broj elemenata nazivamo konačnim. Kako bismo stvorili sadržajne matematičke teorije na skupovima uvodimo različite operacije i strukture.
Algebra je široka oblast matematike koja se bavi skupovima i strukturama na skupovima. Slijede dva primjera algebarskih struktura.

Definicija 0.1. *Reći ćemo da je na skupu G uvedena struktura grupe, ako je na G zadata operacija "$+$", tako da su zadovoljeni sljedeći uslovi:*
1) za $\forall a, b \in G$ važi $a + b \in G$;
2) za $\forall a, b, c \in G$ važi $a + (b + c) = (a + b) + c$;
3) $\exists 0 \in G$ tako da za $\forall a \in G$ važi $a + 0 = 0 + a = a$;
4) za $\forall a \in G \quad \exists(-a) \in G$ tako da $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Takođe ćemo govoriti da skup G sa operacijom "$+$" čini grupu (ili da je grupa).
Svojstvo 1) naziva se zatvorenost skupa G u odnosu na definisanu operaciju "$+$", svojstvo 2) asocijativnost, element 0 iz svojstva 3) naziva se neutralnim elementom grupe, a element $(-a)$ iz svojstva 4) inverznim elementom k elementu a.

Definicija 0.2. *Neka je $(G, +)$ grupa. Ako $\forall a, b \in G$ važi $a + b = b + a$ tada se grupa $(G, +)$ naziva komutativnom (Abelovom) grupom.*

Primjer 1. Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ sa standardnom operacijom sabiranja "$+$" je grupa, $(\mathbb{R}, +)$.
Primjer 2. Skup cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ sa standardnom operacijom sabiranja "$+$" je grupa, $(\mathbb{Z}, +)$.
Primjer 3. Skup prirodnih brojeva sa operacijom sabiranja, $(\mathbb{N}, +)$ nije grupa (npr. neutralni element za sabiranje, 0, nije iz skupa prirodnih brojeva, takođe elementi $\mathbb{N}$ nemaju inverzne elemente).
Primjer 4. Skup cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ sa standardnom operacijom množenja "$\cdot$" nije grupa (zadovoljene su sve aksiome, osim 4)).
Primjer 5. Označimo sa H skup svih rotacija geometrijske ravni za uglove $\phi \in [0, 2\pi)$. Na skupu H uvedimo operaciju "$\cdot$" superpozicije (kompozicije) dvije rotacije. Neka su $r_{\phi_1}, r_{\phi_2} \in H$, tada $r_{\phi_1} \cdot r_{\phi_2} = r_{\phi_1 + \phi_2} \in H$. Na ovaj način, superpozicija dvije rotacije je takođe rotacija. Potrebno je provjeriti sve četiri aksiome kako bismo se ubijedili da je $(H, \cdot)$ Abelova grupa.

Primjer 6. Razmotrimo konačan skup M sa n elemenata, recimo riječ LIST (ovaj skup ima $n = 4$ elementa, tj. slova). Označimo sa P skup svih permutacija konačnog skupa M. Skup P sadrži $n!$ elemenata. Na skupu P uvedimo operaciju "$\cdot$" superpozicije dvije permutacije, tj. ako su $p_1, p_2 \in P$, to je $p_1 \cdot p_2$ nova permutacija koja se dobija tako što se na skupu najprije izvede permutacija p_2, a zatim p_1. Recimo, ako je p_1 permutacija koja riječ LIST preslikava u ILST, a p_2 u STLI, to će $p_1 \cdot p_2$ riječ LIST permutovati u TSLI. Kada provjerimo sve aksiome zaključujemo da skup $\mathbb{P}$ sa operacijom "$\cdot$" čini grupu. Provjeriti da li je ovo Abelova grupa.

Definicija 0.3. *Reći ćemo da je na skupu P uvedena struktura polja, ako su na skupu P zadate dvije operacije "$+$" i "$\cdot$" tako da su zadovoljeni sljedeći uslovi:*
1. $(\forall a, b \in \mathbb{P})$ *važi* $a + b \in P$ *i* $a \cdot b \in \mathbb{P}$;
2. $(\forall a, b, c \in \mathbb{P})$ *važi* $(a + b) + c = a + (b + c)$ *i* $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
3. $(\exists 0 \in \mathbb{P})$ *tako da za* $\forall a \in \mathbb{P}$ *važi* $a + 0 = a$;
4. $(\forall a \in \mathbb{P}) \quad \exists(-a) \in \mathbb{P}$, *tako da* $a + (-a) = 0$;
5. $(\forall a, b \in \mathbb{P})$ *važi* $a + b = b + a$ *i* $a \cdot b = b \cdot a$;
6. $(\exists 1 \in \mathbb{P})$, *tako da za* $\forall a \in \mathbb{P} \backslash \{0\} \quad a \cdot 1 = a$;
7. $(\forall a \in \mathbb{P} \backslash \{0\}) \quad \exists a^{-1} \in \mathbb{P} \backslash \{0\}$ *tako da važi* $a \cdot a^{-1} = 1$;
8. za $\forall a, b, c \in \mathbb{P}$, *važi* $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *i* $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Operacije "$+$" i "$\cdot$" u polju se nazivaju "sabiranjem" i "množenjem". Neutralni element sabiranja, koji smo označili znakom 0, se naziva "nulom". Neutralni element množenja 1 se naziva "jedinicom".
Svojstvo 2.) se naziva asocijativnošću sabiranja i množenja, svojstvo 5.) komutativnošću, a svojstvo 8.) distributivnošću.
Primjer 1. Skup realnih brojeva, $\mathbb{R}$ sa standardnim operacijama sabiranja i množenja, tj. struktura $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, čini polje.
Primjer 2. Skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ sa standardnim operacijama sabiranja i množenja čini polje.
Dio algebre, koji nam je dobro poznat iz škole, koji se bavi konkretnim skupom racionalnih brojeva sa operacijama sabiranja i množenja (a, dakle, i oduzimanja i dijeljenja) se naziva *Aritmetika.*
Primjer 3. Skup kompleksnih brojeva, $\mathbb{C}$ sa standardnim operacijama sabiranja i množenja, tj. struktura $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ čini polje.
Primjer 4. Razmotrimo skup S koji sadrži četiri elementa, označićemo ih simbolima O,I,A i B. Na skupu S uvedimo operacije $+$ i $\cdot$ uz pomoć sljedećih tabela:

+	O	I	A	B	·	O	I	A	B
O	O	I	A	B	O	O	O	O	O
I	I	O	B	A	I	O	I	A	B
A	A	B	O	I	A	O	A	B	I
B	B	A	I	O	B	O	B	I	A

Provjerite da skup S sa ovim operacijama čini polje.
Ovim završavamo uvodno poglavlje u kojem smo uveli neke osnovne pojmove iz *Opšte algebre* koje ćemo dalje koristiti. Primijetimo da ćemo u svim daljim izlaganjima koristiti samo dva polja: to su polje realnih brojeva $\mathbb{R}$ i polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. Pri tome pretpostavljamo da

su studenti upoznati sa standardnim operacijama sabiranja i množenja (a znači i oduzimanja i dijeljenja) kako realnih, tako i kompleksnih brojeva.

Glava 1

Vektorski prostori

1.1 Definicija vektorskog prostora. Primjeri. Osnovna svojstva

U ovoj sekciji ćemo uvesti osnovni pojam Linearne algebre - vektorski prostor.

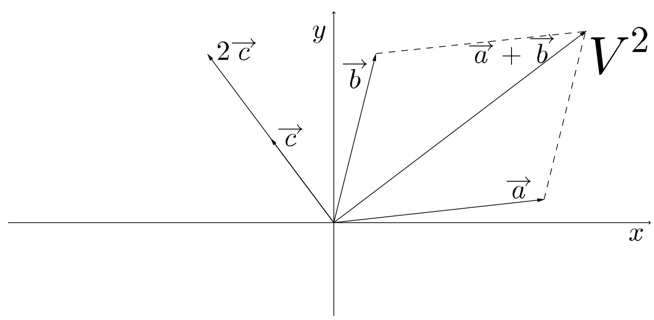
Definicija 1.1. *Skup V naziva se vektorskim prostorom nad poljem $\mathbb{P}$ ako su na njemu definisane dvije operacije:*
(I) *operacija $+$ sabiranja dva elementa iz skupa V, tj. $\forall x, y \in V, x + y \in V$,*
(II) *operacija $\cdot$ množenja elemenata iz skupa V elementima iz polja $\mathbb{P}$, tj. $\forall x \in V$ i $\forall \alpha \in P$ $\alpha \cdot x \in V$,*
i pri tome su zadovoljene sljedeće aksiome:
1. $(\forall x, y, z \in V)$ *važi* $x + (y + z) = (x + y) + z$;
2. $(\forall x, y \in V)$ *važi* $x + y = y + x$;
3. $(\exists \mathbb{0} \in V)$, *takav da* $\forall x \in V$ *važi* $x + \mathbb{0} = x$;
4. $(\forall x \in V)$ $\exists(-x) \in V$ *takav da važi* $x + (-x) = \mathbb{0}$;
5. $(\forall x, y \in V), \quad (\forall \alpha \in \mathbb{P})$ *važi* $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$;
6. $\forall x \in V \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{P}$ *važi* $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$;
7. $(\forall x \in V), \quad (\forall \alpha, \beta \in \mathbb{P})$ *važi* $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$;
8. $(\forall x \in V) \quad 1 \cdot x = x$, *gdje je* 1 *neutralni element za množenje u polju* $\mathbb{P}$.

Elemente vektorskog prostora V nazivamo vektorima.
Elemente polja P nazivamo skalarima.
Element vektorskog prostora $\mathbb{0}$ nazivamo nula vektorom, za njega koristimo drugačiju oznaku od skalara (broja) 0, kako bismo bili precizniji, a formule jasnije.

Primjedbe.
1. Naglasimo da prethodna definicija podrazumijeva postojanje dvije operacije: sabiranje dva vektora i množenje vektora skalarom (brojem). Nikakve druge operacije (za sada) ne poznajemo, na primjer, ne možemo pomnožiti dva elementa vektorskog prostora V.
2. Moguće je razmatrati vektorske prostore nad bilo kojim poljem $\mathbb{P}$. Ipak, u Linearnoj algebri se obično razmatraju vektorski prostori nad poljima realnih brojeva $\mathbb{R}$ i kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. Mi ćemo se tokom čitavog kursa ograničiti samo na ta dva polja. Štaviše, u početku ćemo

razmatrati samo vektorske prostore nad poljem realnih brojeva, i tek kasnije preći i na prostore nad poljem $\mathbb{C}$. Dakle, u početku možemo smatrati da su skalari realni brojevi.

Primjer 1. Razmotrimo skup V^2- geometrijsku ravan čiji elementi su zašiljene duži. Uvedimo operaciju sabiranja dva geometrijska vektora (zašiljene duži) na način koji nam je poznat (Slika 1.1): pravilom paralelograma (nadodavanjem jedne duži na drugu). Dalje, uvedimo operaciju množenja geometrijskih vektora realnim brojevima na poznat način: množenje brojem ne mijenja pravac vektora, ali mijenja dužinu i, u slučaju negativnog broja, smjer. Provjeravajući aksiome, utvrdjujemo da nakon uvodjenja ove dvije operacije skup V^2 postaje vektorski prostor nad poljem realnih brojeva.



Slika 1.1: Sabiranje dva vektora i množenje vektora brojem u geometrijskoj ravni V^2

Primjer 2. Sa $C[0,1]$ označimo skup neprekidnih funkcija na $[0,1]$. Uvedimo standardnu operaciju sabiranja dvije funkcije. Poznato je da je zbir dvije neprekidne funkcije neprekidna funkcija, dakle takodje element $C[0,1]$. Takođe množenjem neprekidne funkcije realnim brojem α dobijamo novu neprekidnu funkciju. Na ovaj način skup $C[0,1]$ postaje vektorski prostor nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$.

Primjer 3. Razmotrimo skup $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$.

Dakle, ovaj skup sadrži kolone od n realnih brojeva.

Na ovom skupu želimo uvesti operacije sabiranja dva elementa i množenje elementa realnim brojem, tako da dobijemo strukturu vektorskog prostora. Definišimo operacije na sljedeći način:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}, \qquad \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Lako je provjeriti da je skup $\mathbb{R}^n$ sa ovako uvedenim operacijama vektorski prostor.

Osnovna svojstva.

1. Nula vektor $\mathbb{0}$ je određen jednoznačno (ne postoje dva različita nula vektora u istom prostoru).

Dokaz

Pretpostavimo da u prostoru V postoje dva nula vektora, označimo ih sa $\mathbb{0}$ i $\mathbb{0}'$.

Tada za svaki vektor $x \in V$ imamo da $x + \mathbb{0} = x + \mathbb{0}'$.
Saglasno aksiomi 4 iz definicije vektorskog prostora, postoji $(-x) \in V$. Sabirajući lijevu i desnu stranu gornje jednačine sa ovim vektorom, imamo da $\mathbb{0} = \mathbb{0}'$.
2. Za svaki $x \in V$ njegov inverzni vektor $(-x)$ je jednoznačno određen.
3. Za svaki $x \in V$ imamo: $0 \cdot x = \mathbb{0}$.
Dokaz
Uzmimo proizvoljno $\alpha \in \mathbb{P}$.
Imamo $\alpha \cdot x = (\alpha + 0) \cdot x = \alpha \cdot x + 0 \cdot x \Rightarrow 0 \cdot x = \mathbb{0}$.
4. Za $\forall x \in V$ imamo $(-x) = (-1) \cdot x$.
Dokaz
$\mathbb{0} = 0 \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x \Rightarrow -1 \cdot x = (-1) \cdot x \Rightarrow -x = (-1) \cdot x$.
5. Za $\forall \alpha \in P$ imamo $\alpha \cdot \mathbb{0} = \mathbb{0}$.
Dokaz
$\alpha \cdot \mathbb{0} = \alpha \cdot (x + (-x)) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot (-x) = \alpha \cdot x - \alpha \cdot x = \mathbb{0}$.
6. Iz jednakosti $\alpha \cdot x = \mathbb{0}$ slijedi da je $\alpha = 0$ ili $x = \mathbb{0}$.
Dokaz
Neka je $\alpha \neq 0$. Tada $\exists \alpha^{-1}$. Pomnožimo jednakost $\alpha \cdot x = \mathbb{0}$ sa α^{-1}, imamo $\alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot x) = \alpha^{-1} \cdot \mathbb{0} = \mathbb{0}$.
S druge strane, $\alpha^{-1} \cdot (\alpha \cdot x) = (\alpha^{-1} \cdot \alpha) \cdot x = 1 \cdot x = x$.
Iz posljednje dvije jednakosti zaključujemo da $x = \mathbb{0}$.

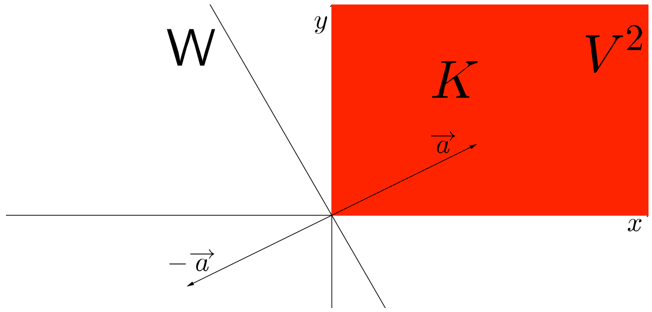
1.2 Vektorski potprostori

Kao i ranije, sa V označavamo vektroski prostor nad poljem P.

Definicija 1.2. *Podskup $W \subseteq V$ naziva se potprostorom prostora V, ako je W vektorski prostor.*

Teorema 1.1. *Podskup $W \subseteq V$ je potprostor ako i samo ako*
1. $(\forall x, y \in W) \quad x + y \in W$;
2. $(\forall x \in W), (\forall \alpha \in \mathbb{P}) \quad \alpha \cdot x \in W$.

Ova teorema se lako dokazuje direktnom provjerom svih aksioma vektorskog prostora.
Razmotrimo neke primjere vektorskih potprostora. Najprije primijetimo da svaki prostor V ima dva trivijalna potprostora, to su čitav prostor V i prostor koji se sastoji samo od nula vektora $\{\mathbb{0}\}$. Vratimo se primjerima vektorskih prostora iz prethodne sekcije kako bismo proučili njihove potprostore.
Primjer 1. Razmotrimo neke podskupove vektorskog prostora V^2 geometrijskih vektora: 1. Prvi kvadrant K nije vektorski potprostor, jer, na primjer množenje vektora negativnim brojem daje vektor izvan skupa K (Slika 1.2). 2. x i y-ose su vektorski potprostori. Dalje, vidimo da su sve prave koje prolaze kroz koordinatni početak takođe potprostori. To su, uz dva trivijalna potprostora $\mathbb{0}$ i V^2, jedini vektorski potprostori u V^2.
Primjer 2. Razmotrimo neke potprostore prostora $C[0, 1]$ neprekidnih funkcija na segmentu $[0, 1]$:
1. Lako je provjeriti da sve funkcije konstante na $[0, 1]$ čine potprostor.



Slika 1.2: Prvi kvadrant K nije vektorski potprostor V^2, jer postoji vektor koji je element K, ali čiji suprotni vektor nije element K. Sa druge strane, prava W jeste potprostor, kao i sve prave koje prolaze kroz koordinatni početak.

2. Podskup M_n svih polinoma stepena manjeg ili jednakog n je takođe potprostor prostora $C[0,1]$.

Primjer 3. 1. Na prostoru $\mathbb{R}^n$ razmotrimo skup zadat sa

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R}^n | \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Provjerite da li je S vektorski potprostor u $\mathbb{R}^n$.

2. Razmotrimo skup $M \subseteq \mathbb{R}^n$ zadat sa:

$$M = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} | x_1 = x_2 = 4x_n \right\}.$$

Provjerite da li je M vektorski potprostor u $\mathbb{R}^n$.

3. Na prostoru $\mathbb{R}^n$ razmotrimo skup zadat sa

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R}^n | \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Provjeriti da li je skup B potprostor.

Svojstva.

1. Ako su W_1 i W_2 potprostori V tada je i njihov presjek $W_1 \cap W_2$ potprostor.
2. Ako su W_1 i W_2 potprostori tada je i njihova suma potprostor, tj. $W_1 + W_2 = \{x_1 + x_2 | x_1 \in W_1, x_2 \in W_2\}$ je potprostor.

3. Primijetimo da unija dva potprostora nije potprostor, primjerom mogu služiti x i y ose u V^2.

1.3 Linearni omotač skupa

Definicija 1.3. *Neka je dat skup vektora* $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \in V$ *i neka su* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ *proizvoljni skalari iz polja* P

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n \in V \tag{1.1}$$

Izraz (1.1) *naziva se linearnom kombinacijom vektora* $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Definicija 1.4. *Neka je* S *podskup vektorskog prostora* V. *Linearnim omotačem skupa* S *naziva se skup svih mogućih linearnih kombinacija vektora* $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \in S$, *tj.:*

$$\{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n | \quad gdje \quad \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in P,\, n - \textit{konačan cijeli broj}\}.$$

Oznaka: Linearni omotač skupa S označavamo sa $\mathcal{L}(S)$, $Lin(S)$ ili $span(S)$.
Ako je $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ konačan skup vektora, tada ćemo njihov linearni omotač označavati sa $\mathcal{L}\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $Lin\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ili $span\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.

Primjer 1. Posmatrajmo vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ i dva vektora tog prostora, $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ i $x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Linearna kombinacija ovih vektora zadata je sa:

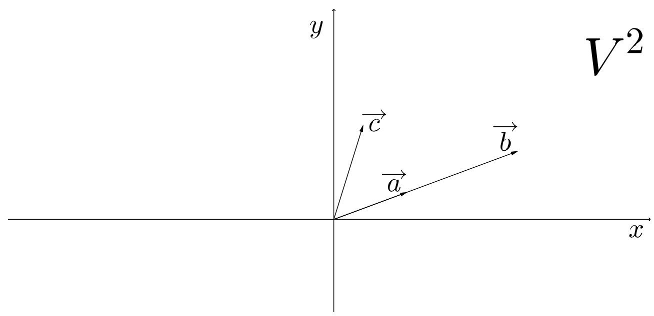
$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3\alpha_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ -3\alpha_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Linearni omotač skupa $\{x_1, x_2\}$ je $Lin\{x_1, x_2\} = \begin{pmatrix} x^1 \\ 0 \\ x^3 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Na primjer, vektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ pripada linearnom omotaču vektora x_1 i x_2, za konkretne vrijednosti $\alpha_1 = -1$ i $\alpha_2 = 0$.

S druge strane, vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ne pripada linearnom omotaču skupa $\{x_1, x_2\}$ (ne može se predstaviti kao linearna kombinacija ova dva vektora).

Primjer 2. Razmotrimo skup $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ u vektorskom prostoru V^2 (vidi Sliku 1.3). Vidimo da vektor $\vec{b}$ pripada linearnom omotaču skupa $\{\vec{a}\}$, a samim tim i linearnom omotaču skupa $\{\vec{a}, \vec{c}\}$. Takođe, vektor $\vec{a}$ pripada linearnom omotaču skupa $\{\vec{b}\}$, a samim tim i linearnom omotaču skupa $\{\vec{b}, \vec{c}\}$. Ali, vektor $\vec{c}$ ne pripada linearnom omotaču skupa $\{\vec{a}, \vec{b}\}$.



Slika 1.3

Tvrđenje 1.1. *Linearni omotač skupa je vektorski potprostor u V.*

Dokaz:
Iz Teoreme 1.1 znamo da je dovoljno provjeriti dva svojstva.
Razmotrimo konačan skup $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Neka su $y', y'' \in Lin\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Tada $y' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' x_i$ i $y'' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i'' x_i$. Tada je $y' + y'' = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i' + \alpha_i'') x_i$, što znači da je $y' + y'' \in Lin\{x_1, x_2, ..., x_n\}$.
Neka je $y' \in Lin\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, tj. $y' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$. Neka je β element iz polja, tada je $\beta y' = \sum_{i=1}^{n} \beta \alpha_i x_i$, što predstavlja linearnu kombinaciju vektora $\{x_1, x_2, .., x_n\}$ sa koeficijentima $\beta\alpha_1, \beta\alpha_2, .., \beta\alpha_n$, tj. $\beta y' \in Lin\{x_1, x_2, .., x_n\}$.
Zaključujemo da je $Lin\{x_1, x_2, .., x_n\}$ vektorski potprostor.

Tvrđenje 1.2. *Ako $S \subseteq W$, gdje je W potprostor V, tada je $Lin(S) \subseteq W$.*

Dokaz:
Neka je $y \in Lin(S)$, tada $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, gdje su $\{x_1, \dots, x_n\} \in S \Rightarrow \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq W$. Pošto je W potprostor, to i linearna kombinacija vektora $\{x_1, \dots, x_n\}$ takođe leži u W, dakle $y \in W$. Dokazali smo da za proizvoljan vektor $y \in Lin(S)$ važi $y \in W$. Odavde slijedi $Lin(S) \subseteq W$.
Zaključak. Iz prethodnog možemo izvesti jednostavan zaključak da je linearni omotač skupa najmanji vektorski potprostor koji sadrži taj skup.

1.4 Linearna zavisnost i nezavisnost vektora

U ovoj sekciji ćemo uvesti ključne pojmove linearne zavisnosti i nezavisnosti vektora.
Neka su $x_1, x_2, \dots, x_n$ vektori u vektorskom prostoru V. Razmotrimo linearnu kombinaciju $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ sistema vektora $\{x_1, \dots, x_n\} \in V$. Govorićemo da je ova linearna kombinacija *trivijalna*, ako $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ i *netrivijalna*, ako $\exists i = \overline{1, n}$, tako da $\alpha_i \neq 0$.

Definicija 1.5. *Sistem vektora $x_1, x_2, \dots, x_n$ se naziva linearno nezavisnim ako iz jednakosti:*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \mathbb{0}$$

slijedi da je $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

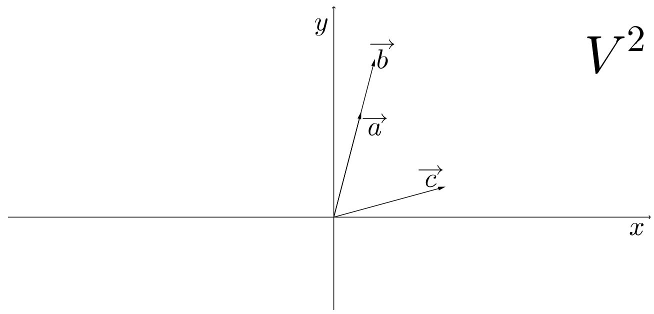
Definicija 1.6. *Sistem vektora $x_1, x_2, \dots, x_n$ se naziva linearno zavisnim, ako postoje koeficijenti $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in P$, pri čemu $\exists \alpha_i \neq 0, \quad i \in \{1, 2, ..., n\}$, tako da*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \mathbb{0}.$$

Drugim riječima, sistem vektora se naziva linearno zavisnim, ako postoji njihova netrivijalna linearna kombinacija koja daje nula vektor.

Primjeri.
1. Sistem od dva vektora u geometrijskoj ravni V^2 je linearno zavisan ako i samo ako su oni kolinearni.
Sistem od tri vektora u V^2 je uvijek linearno zavisan.
2. U trodimenzionalnom geometrijskom prostoru V^3 tri vektora su linearno zavisni ako i samo ako su komplanarni (leže u istoj ravni).
Sistem od četiri vektora u V^3 je uvijek linearno zavisan.
Dakle, pojam linearne zavisnosti u geometrijskoj ravni ili prostoru ima jasnu geometrijsku interpretaciju.
Na Slici 1.4 vidimo da je sistem vektora $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ linearno zavisan, dok je sistem $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c}\}$ linearno nezavisan.
Primjer. U $\mathbb{R}^3$ posmatramo sistem od dva vektora:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$



Slika 1.4

Da bismo provjerili linearnu nezavisnost ovog sistema, izjednačićemo njihovu linearnu kombinaciju sa nulom:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Izjednačavajući koordinate dobijamo sistem linearnih jednačina:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ 3\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Odavde je lako zaključiti da $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ i, saglasno definiciji, sistem $\{x_1, x_2\}$ je linearno nezavisan.
Sada razmotrimo sistem $\{x_1, x_2, x_3\}$, gdje je:

$$x_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Da bismo ispitali linearnu zavisnost ovih vektora, posmatramo njihovu linearnu kombinaciju:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \mathbb{0}.$$

Dobijamo sistem linearnih jednačina:

$$\begin{cases} \alpha_1 - 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - 3\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Ovaj sistem ima beskonačno mnogo rješenja, a jedno od mogućih je $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (3, -1, 1)$. Zaključujemo da postoji netrivijalna linearna kombinacija vektora x_1, x_2, x_3 koja rezultira nula vektorom. Saglasno definiciji, ovaj sistem vektora je linearno zavisan.
Vidjeli smo da provjera linearne zavisnosti i nezavisnosti u prostoru $\mathbb{R}^n$ dovodi do neophodnosti rješavanja sistema linearnih jednačina. U trećem poglavlju ćemo detaljno proučiti teoriju i metode rješavanja sistema linearnih jednačina.
Sada ćemo dokazati nekoliko teorema o linearnoj zavisnosti i nezavisnosti vektora.

Teorema 1.2. *Sistem vektora* $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ *je linearno zavisan ako i samo ako se jedan vektor može predstaviti kao linearna kombinacija ostalih.*

Dokaz
Neka su vektori $x_1, x_2, \dots, x_n$ linearno zavisni, tada $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \mathbb{0}$ i uz to postoji bar jedno $\alpha_i \neq 0$. Tada je:

$$\alpha_i x_i = -\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 - \dots - \alpha_{i-1} x_{i-1} - \alpha_{i+1} x_{i+1} - \dots - \alpha_n x_n.$$

Ako podijelimo jednačinu sa $\alpha_i \neq 0$ dobijamo:

$$x_i = (-\frac{\alpha_1}{\alpha_i})x_1 + (-\frac{\alpha_2}{\alpha_i})x_2 + \dots + (-\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i})x_{i-1} + (-\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i})x_{i+1} + \dots + (-\frac{\alpha_n}{\alpha_i})x_n.$$

Dakle, x_i je linearna kombinacija ostalih vektora.
Sada dokažimo tvrđenje i u drugom smjeru. Ne umanjujući opštost, uzmimo da se vektor x_n može predstaviti kao linearna kombinacija ostalih, tj:

$$x_n = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1} \Rightarrow \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_{n-1} x_{n-1} - x_n = \mathbb{0}. \qquad (1.2)$$

U (1.2) koeficijent uz x_n je $-1 \neq 0$, samim tim radi se o netrivijalnoj linearnoj kombinaciji, što znači da je skup vektora $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ linearno zavisan.

Teorema 1.3. *Sistem vektora* $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ *iz* V *je linearno zavisan ako i samo ako u* V *postoji vektor koji može biti predstavljen kao linearna kombinacija vektora* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *na bar dva različita načina.*

Dokaz
Neka su $x_1, x_2, \dots, x_n$ linearno zavisni. Tada $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \mathbb{0}$, pri čemi $\exists \alpha_i \neq 0$. S druge strane, imamo i drugo razlaganje nula vektora $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = \mathbb{0}$. Dakle, napisali smo nula vektor kao linearnu kombinaciju vektora $x_1, \dots, x_n$ na dva različita načina.
Dokažimo tvrđenje i u drugom smjeru. Neka je $y \in V$ vektor koji ima dva razlaganja, tj:

$$y = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n,\ y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n,$$

pri čemu $\exists i :\ \alpha_i \neq \beta_i$. Oduzmimo drugu jednačinu od prve:

$$\mathbb{0} = (\alpha_1 - \beta_1)x_1 + (\alpha_2 - \beta_2)x_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)x_n.$$

Pošto je bar jedna od razlika $\alpha_i - \beta_i \neq 0$, ovo je netrivijalna linearna kombinacija, pa su prema definiciji vektori $x_1, x_2, \dots, x_n$ linearno zavisni.

Teorema 1.4. *Neka je* $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ *linearno zavisan sistem vektora i neka su* $x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n$ *prozivoljni vektori u* V*. Tada je sistem vektora* $\{x_1, x_2, \dots, x_p, x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_n\}$ *linearno zavisan.*

Dokaz
Kako su vektori $x_1, x_2, \dots, x_p$ linearno zavisni, tada $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_p x_p = \mathbb{0}$, pri čemu postoji bar jedno $\alpha_i \neq 0$. Tada je

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_p x_p + 0 \cdot x_{p+1} + 0 \cdot x_{p+2} + \dots + 0 \cdot x_n = \mathbb{0}$$

netrivijalna linearna kombinacija jer $\exists i \in \{1, 2, \dots, p\}$, takvo da $\alpha_i \neq 0$. Slijedi da je sistem vektora $x_1, \dots, x_n$ linearno zavisan.

Posljedica 1.1. *Neka je sistem vektora $S = \{x_1, \dots, x_p\}$ linearno nezavisan i neka je $Q \subseteq S$. Tada je skup Q takođe linearno nezavisan.*

Dokaz ove posljedice je jednostavan, pa ga ostavljamo za vježbu.

Teorema 1.5. *Neka je S linearno nezavisan skup vektora iz V, $u \in V$ i $u \notin S$. Tada je $S \cup \{u\}$ linearno zavisan ako i samo ako $u \in Lin(S)$.*

Dokaz
Neka je $S = \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ skup linearno nezavisnih vektora i $S \cup \{u\}$ linearno zavisan. Tada:

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p + \alpha_{p+1} u = \mathbb{0} \tag{1.3}$$

pri čemu $\exists i \in \{1, 2, \dots, p+1\}$, takav da $\alpha_i \neq 0$.
Ako pretpostavimo da je $\alpha_{p+1} = 0$ tada $\exists i \in \{1, 2, \dots, p\}$ tako da $\alpha_i \neq 0$, dakle linearna kombinacija $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p = \mathbb{0}$ je netrivijalna. To znači da je skup vektora $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ linearno zavisan, što je kontradikcija sa pretpostavkom Teoreme. Zaključujemo da je $\alpha_{p+1} \neq 0$. Tada iz (1.3) imamo:

$$u = (-\frac{\alpha_1}{\alpha_{p+1}})x_1 + \cdots + (-\frac{\alpha_p}{\alpha_{p+1}})x_p,$$

što znači da je $u \in Lin\{x_1, x_2, \dots, x_p\} = Lin(S)$.
Neka je sada $u \in Lin(S)$. Tada je $u = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p \Rightarrow \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p - u = \mathbb{0}$. Jasno je da su vektori $\{x_1, x_2, \dots, x_p, u\}$ linerano zavisni jer je koeficijent uz u u navedenoj linearnoj kombinaciji $-1 \neq 0$. Dakle, $S \cup \{u\}$ je linearno zavisan sistem vektora.
Primjena. (preuzeto iz Insel i ostali: *Linear algebra. Fourth edition.*)
U članku B. K. Watt i A. L. Merrill, objavljenom u *Agriculture Hand-book, N. 8, Washington, D.C., 1963.* data je sljedeća tabela sadržaja pet osnovnih vitamina (vitamina A, B_1, B_2, C i niacina) u nekim prehrambenim namirnicama:

namirnica	A	B_1	B_2	niacin	C
Jabukov maslac	0	0.01	0.02	0.2	2
svježe jabuke	90	0.03	0.02	0.1	4
čoko slatkiš sa kokosom	0	0.02	0.07	0.2	0
meso iz školjki	100	0.1	0.18	1.3	10
kolač od vafli	0	0.05	0.06	0.3	0
kaša sa žitaricama	0	0.01	0.01	0.1	0
marmelada	10	0.01	0.03	0.2	2
pita od kokosa sa prelivom	0	0.02	0.02	0.4	0
sirovi crni pirinač	0	0.34	0.05	4.7	0
soja sos	0	0.2	0.25	0.4	0
kuvane špagete	0	0.01	0.01	0.3	0
sirovi divlji pirinač	0	0.81	0.63	6.2	0

U tabeli su ukazane količine vitamina koje se nalaze u 100 grama svake od namirnica.
Sada sadržaj vitamina u 100 grama namirnice možemo posmatrati kao vektor u $\mathbb{R}^5$. Tada, na primjer, možemo uočiti da se vektor sirovog divljeg pirinča može predstaviti kao linearna

kombinacija vektora kolača od vafli, pite od kokosa, sirovog crnog pirinča i soja sosa:

$$\begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.05 \\ 0.06 \\ 0.30 \\ 0.00 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.02 \\ 0.02 \\ 0.40 \\ 0.00 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.34 \\ 0.05 \\ 4.70 \\ 0.00 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.20 \\ 0.25 \\ 0.40 \\ 0.00 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.81 \\ 0.63 \\ 6.20 \\ 0.00 \end{pmatrix}.$$

Ovo nas dovodi do zaključka da 100 grama kolača od vafli, 100 grama kokosove pite sa prelivom, 100 grama sirovog crnog pirinča i 200 grama soja sosa zajedno sadrže istu količinu pet osnovnih vitamina kao 100 grama sirovog divljeg pirinča.
Za vježbu pokažite da je vektor mesa iz školjki linearna kombinacija jabukovog maslaca, svježih jabuka, čokoladnog slatkiša sa kokosom, kaše, marmelade i kuvanih špageta.

1.5 Baza i dimenzija vektorskog prostora

Definicija 1.7. *Govorićemo da sistem vektora* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *generiše vektorski prostor* V *ako je* $Lin\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = V$.

Definicija 1.8. *Sistem vektora* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *se naziva bazom vektorskog prostora* V*, ako je:*
1. $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *sistem linearno nezavisnih vektora;*
2. $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *generiše prostor* V.

Teorema 1.6. *Neka je* V *vektorski prostor i* $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq V$. S *je baza u* V *ako i samo ako se svaki vektor* $u \in V$ *može predstaviti kao linearna kombinacija vektora iz* S *na jedinstven način.*

Dokaz
Neka je S baza. Tada $Lin(S) = V$. Ovo znači da se svaki vektor $u \in V$ može predstaviti kao linearna kombinacija vektora iz S:

$$u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n. \tag{1.4}$$

Pretpostavimo da se u može predstaviti kao linearna kombinacija vektora iz S na još jedan način, tj:

$$u = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n, \tag{1.5}$$

pri čemu $\exists i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tako da je $\alpha_i \neq \beta_i$. Oduzmimo (1.5) od (1.4):

$$\mathbb{0} = (\alpha_1 - \beta_1)x_1 + \cdots + (\alpha_i - \beta_i)x_i + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)x_n.$$

Kako je $\alpha_i \neq \beta_i$ to je $\alpha_i - \beta_i \neq 0$, što znači da je sistem vektora $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ linearno zavisan, tj. S nije baza u V.
Dokažimo tvrđenje i u drugom smjeru. Neka se svaki vektor $u \in V$ može predstaviti kao linearna kombinacija vektora iz $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Ovo znači da $Lin\{x_1, \ldots, x_n\} = V$, tj. $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$ generiše prostor V. Vektor $\mathbb{0} \in V$, pa se on može predstaviti kao linearna kombinacija vektora iz S: $\mathbb{0} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$ za jedinstvene $\alpha_i, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Očigledno $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, a to znači da su vektori $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ linearno nezavisni. Zaključujemo da je $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ baza u V.

Definicija 1.9. *Neka je* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *baza u* V, $u \in V$. *Linearna kombinacija*

$$u = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

se naziva razlaganjem vektora u *po bazi* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
Skalari $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ *se nazivaju koordinatama vektora* u *u bazi* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Sada možemo preformulisati Teoremu 1.6 na sljedeći način:
Razlaganje vektora po bazi je jedinstveno.

Teorema 1.7. *Neka je* V *generisan nekim konačnim skupom vektora* $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$. *Tada* $\exists Q \subseteq S$ *takav da je* Q *baza u* V. *Znači,* V *ima konačnu bazu.*

Dokaz
Iz skupa $S = \{x_1, \ldots, x_p\}$ izdvojimo maksimalan podskup linearno nezavisnih vektora, tj. podskup $Q = \{x_1, \ldots, x_m\}, m \leq p$, takav da je Q linearno nezavisan i za bilo koji vektor $u \in S$, skup $Q \cup \{u\}$ je linearno zavisan. Nije teško zaključiti da ovakav podskup Q postoji.
Zbog jednostavnosti oznaka pretpostavimo da skup Q sadrži prvih m vektora skupa S i predstavimo S kao $S = \{x_1, \ldots, x_m\} \cup \{x_{m+1}, \ldots, x_p\}$. Po pretpostavci $x_{m+1} \in Lin\{x_1, \ldots, x_m\}, \ldots, x_p \in Lin\{x_1, \ldots, x_m\}$, što znači da:

$$x_i = \alpha_1^i x_1 + \alpha_2^i x_2 + \cdots + \alpha_m^i x_m, \text{ za } \forall i \in \{m+1, m+2, \ldots, p\}. \tag{1.6}$$

Neka je $u \in V$ proizvoljan vektor. Kako S generiše čitav prostor V, to se u može predstaviti kao linearna kombinacija vektora iz S:

$$u = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m + \beta_{m+1} x_{m+1} + \cdots + \beta_p x_p.$$

U posljednju jednakost uvrstimo (1.6), dobijamo:

$$u = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m + \beta_{m+1} \alpha_1^{m+1} x_1 + \cdots + \beta_{m+1} \alpha_m^{m+1} x_m + \cdots + \beta_p \alpha_1^p x_1 + \cdots + \beta_p \alpha_m^p x_m,$$

tj.:

$$u = (\beta_1 + \beta_{m+1}\alpha_1^{m+1} + \cdots + \beta_p \alpha_1^p) x_1 + \cdots + (\beta_m + \beta_{m+1}\alpha_m^{m+1} + \cdots + \beta_p \alpha_m^p) x_m.$$

Ako uvedemo oznake $\gamma_1 = \beta_1 + \beta_{m+1}\alpha_1^{m+1} + \cdots + \beta_p \alpha_1^p, \ldots, \gamma_m = \beta_m + \beta_{m+1}\alpha_m^{m+1} + \cdots + \beta_p \alpha_m^p$, imamo:

$$u = \gamma_1 x_1 + \cdots + \gamma_m x_m \Rightarrow u \in Lin\{x_1, x_2, \ldots, x_m\} = Lin(Q).$$

Kako je vektor u bio izabran proizvoljno, ovo znači da je $Lin(Q) = V$.
Dakle, sistem vektora Q je linearno nezavisan i $Lin(Q) = V$. Po definiciji Q je baza u V.

Teorema 1.8. *Neka je* V *vektorski prostor koji je generisan skupom* K *od* n *vektora i neka je* $L \subseteq V$ *skup od* m *linearno nezavisnih vektora. Tada je* $m \leq n$ *i* $\exists H \subseteq K$ *koji sadrži* $n - m$ *vektora, tako da* $L \cup H$ *generiše* V.

Dokaz
Dokaz ćemo izvesti indukcijom po m.
1. Baza indukcije: Neka je $m = 0$. Tada je L prazan skup, $L = \oslash \Rightarrow H = K$, pa je jasno da $L \cup H$ generiše čitav prostor V.
2. Korak indukcije: Pretpostavimo da teorema važi za neko $m \geq 0$. Treba je dokazati za $m+1$ vektora u L.
Neka je $L = \{v_1, v_2, \ldots, v_{m+1}\} \subseteq V$ skup od $m+1$ linearno nezavisnih vektora. Tada je po Posljedici 1.1 skup $\{v_1, \ldots v_m\}$ takođe linearno nezavisan. Po induktivnoj pretpostavci $m \leq n$ i postoji podskup skupa K od $n-m$ vektora $\{u_1, \ldots, u_{n-m}\}$, tako da $\{v_1, \ldots, v_m\} \cup \{u_1, \ldots, u_{n-m}\}$ generiše prostor V. Izrazimo vektor v_{m+1} kao linearnu kombinaciju vektora $\{v_1, \ldots, v_m, u_1, \ldots, u_{n-m}\}$:

$$v_{m+1} = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m + \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_{n-m} u_{n-m}. \tag{1.7}$$

Primijetimo da je $n - m > 0$. Zaista, kada bi $n = m$, imali bismo:

$$v_{m+1} = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_m v_m,$$

a to bi značilo da je skup $\{v_1, v_2, \ldots, v_{m+1}\}$ linearno zavisan, što je kontradikcija sa pretpostvakom da je skup L linearno nezavisan. Dakle, $m < n$. Na isti način zaključujemo da postoji $\beta_i \neq 0$. Zbog jednostavnosti oznaka pretpostavimo da je to β_1. Podijelimo jednakost (1.7) sa β_1:

$$u_1 = -\frac{\alpha_1}{\beta_1} v_1 - \cdots - \frac{\alpha_m}{\beta_1} v_m - \frac{\beta_2}{\beta_1} u_2 - \cdots - \frac{\beta_{n-m}}{\beta_1} u_{n-m} + \frac{1}{\beta_1} v_{m+1}.$$

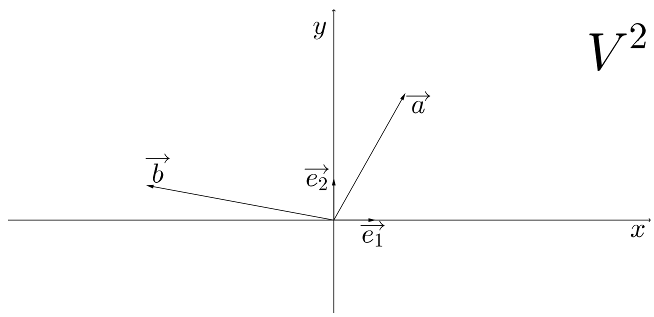
Označimo $H = \{u_2, u_3, \ldots, u_{n-m}\}$. Iz gornje jednakosti vidimo da $u_1 \in Lin(L \cup H)$ i znači $\{v_1, v_2, \ldots, v_m, u_1, u_2, \ldots, u_{n-m}\} \subseteq Lin(L \cup H)$. Pošto ovaj sistem generiše V, to znači da i $L \cup H$ generiše V. Kako H sadrži $n - m - 1$ vektor, to je Teorema tačna i za $m + 1$.
Saglasno principu indukcije, Teorema je dokazana.
Prethodna Teorema je zahtijevala nešto teži dokaz, ali sada zahvaljujući njoj možemo relativno jednostavno izvesti važne zaključke o bazi vektorskog prostora.

Posljedica 1.2. *Neka V ima konačnu bazu od n vektora. Tada svaka baza u V ima n vektora.*

Dokaz
Neka je $Q = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ baza u vektorskom prostoru V i neka je R druga baza u istom prostoru. Znamo da Q generiše prostor V. Na osnovu Teoreme 1.8,imamo da R sadrži $m \leq n$ vektora.
Ako sada u dokazu zamijenimo uloge Q i R na isti način možemo dokazati da $n \leq m$. Zaključujemo da je $m = n$, tj. Q i R sadrže jednak broj vektora.
Upravo dokazana Posljedica nam omogućava da uvedemo još jedan važan pojam Linearne algebre.

Definicija 1.10. *Vektorski prostor V se naziva konačnodimenzionalnim ako ima bazu od konačnog broja vektora. Broj vektora u bazi vektorskog prostora se naziva dimenzijom tog prostora.*

Oznaka: Dimenzija vektorskog prostora V se označava sa $dim V$.
Vektorski prostor koji nema bazu od konačnog broja vektora se naziva *beskonačnodimenzionalnim.*
Primjer 1. Razmotrimo geometrijsku ravan V^2. Vektori $\vec{e_1}$ i $\vec{e_2}$ su linearno nezavisni. Uz to, svaki vektor se može predstaviti kao linearna kombinacija ova dva vektora, drugim riječima $Lin\{\vec{e_1}, \vec{e_2}\} = V^2$. Zaključujemo da je ovo baza u V^2. Dakle, V^2 je dvodimenzionalan prostor. Svaki vektor u V^2 se može na jedinstven način predstaviti kao linearna kombinacija ova dva vektora. Koeficijenti razlaganja po ovoj bazi se nazivaju Dekartovim koordinatama vektora.
Naravno, ovo nije jedina baza u V^2. Bilo koji sistem od dva linearno nezavisna vektora je takođe baza u V^2. Na Slici 1.5 vidimo da i sistem vektora $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ i sistem $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ čine baze prostora V^2.



Slika 1.5

Dakle, $dim V^2 = 2$.
Primjer 2. Razmotrimo vektorski prostor

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

Lako je provjeriti da sljedeći sistem vektora:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

generiše $\mathbb{R}^n$, uz to su linearno nezavisni. Za ovu bazu u $\mathbb{R}^n$ ponekad kažemo da je standardna baza. Bilo koji drugi sistem od n linearno nezavisnih vektora je takođe baza u $\mathbb{R}^n$. Dakle, prostor $\mathbb{R}^n$ je n-dimenzionalan, $dim\mathbb{R}^n$.
Primjer 3. Na vektorskom prostoru $C[0,1]$ razmotrimo sistem vektora $\{1, t, t^2, \dots\}$. Ovo su očigledno neprekidne funkcije na $[0,1]$, dakle pripadaju $C[0,1]$. Primijetimo da je ovaj sistem funkcija (vektora u $C[0,1]$) linearno nezavisan, a ima ih beskonačno mnogo. Dakle, na prostoru $C[0,1]$ ne postoji baza od konačnog broja vektora, ovaj prostor je beskonačnodimenzionalan.

Primjer 4. (preuzeto iz Shikin: *Lineinie prostranstva i otobrazheniya*)
Jedna mala oblast nauke, pod nazivom *Kolorimetrija* se bavi "mjerenjem" boja, primjenjujući Linearnu algebru. "Izmjeriti" boju X znači naći način na koji se ta boja može dobiti miješanjem tri osnovne boje. Pri tome se tri osnovne boje mogu izabrati na različite načine. Tipičan izbor je: crvena, zelena, plava (red, green,blue - RGB). Recimo da se boja X dobija miješajući količine α, β, γ crvene, zelene i plave boje respektivno:

$$X = \alpha R + \beta G + \gamma B, \quad \alpha, \beta, \gamma \geq 0.$$

U praksi, neke boje se mjere tako što se najprije njima doda izvjesna količina jedne ili dvije od osnovnih boja, a zatim se ta nova boja dobije od preostalih (jedne ili dvije) osnovne boje. Recimo, boji X se najprije dodaje crvena boja, a zatim se ta boja dobija miješanjem zelene i plave. U tom slučaju se boja X mjeri na sljedeći način:

$$X + \alpha R = \beta G + \gamma B, \Rightarrow X = -\alpha R + \beta G + \gamma B, \quad \alpha, \beta, \gamma \geq 0.$$

Vidimo da Kolorimetrija na skupu boja faktički uvodi strukturu vektorskog prostora, gdje operacija sabiranja vektora predstavlja miješanje dvije boje, a množenje boje brojem je promjena intenziteta boje. Tri osnovne boje su baza ovog prosora. Pri tome RGB nije jedini mogući izbor za bazu. Recimo, moguće je umjesto zelene boje uzeti žutu i razlagati boje po bazi RYB. Bilo koje tri boje koje su "linearno nezavisne" mogu biti izabrane kao osnovne, tj. kao baza prostora boja. Zaključujemo da je prostor boja trodimenzionalan. S druge strane, sistem YGB ne može biti bazom ovog prostora, jer su te tri boje linearno zavisne.
Primjer 5. Označimo sa M_n, skup polinoma stepena $\leq n$ sa standardnim operacijama sabiranja i množenja polinoma brojem. Lako je provjeriti da M_n sa ovim operacijama ima strukturu vektorskog prostora nad poljem realnih brojeva. Elementi ovog prostora su oblika

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}.$$

Standardna baza u prostoru M_n je $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$, dakle $dim M_n = n + 1$.
Primjer 6. Vratimo se za momenat na Primjenu iz Sekcije I.4. Sada možemo reći da, proučavajući sadržaj osnovnih vitamina, možemo uvesti 5-dimenzionalni vektorski prostor namirnica. Za vježbu naći dvije različite baze u tom prostoru.
Primjedba. Linearna algebra se bavi proučavanjem konačnodimenzionalnih prostora i linearnih preslikavanja u njima. Pošto smo vidjeli da prostor $C[0, 1]$ nema konačnu bazu, to izučavanje ovog prostora ne spada u predmet Linearne algebre. Zato u daljem izlaganju više nećemo pominjati ovaj prostor.
Nastavimo sa još jednim važnim tvrđenjem koje nam daje ključne odgovore o strukturi vektorskog prostora.

Posljedica 1.3. *Neka je V vektorski prostor dimenzije n. Tada:*
(I) Svaki skup koji generiše V sadrži najmanje n vektora, pri tome skup koji generiše V i sadrži tačno n vektora je baza u V.
(II) Svaki skup linearno nezavisnih vektora koji sadrži n vektora je baza u V.
(III) Svaki skup linearno nezavisnih vektora u V može biti dopunjen do baze u V.

Dokaz
Sa $Q = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ označimo bazu u V.
(I) Neka K generiše V. Po Teoremi 1.7 $\exists H \subseteq K$ koji je baza u V. Po Posljedici 1.2 skup H sadrži tačno n vektora. Kako je $H \subseteq K$, to K sadrži $\geq n$ vektora. Ako K sadrži tačno n vektora tada je $H = K$, tj. K je baza u V.
(II) Neka je L skup koji sadrži n linearno nezavisnih vektora. Po Teoremi 1.8 $\exists H \subseteq Q$ koji sadrži $n - n = 0$ vektora, tako da $L \cup H$ generiše V, tj. L generiše V. Zaključujemo da je L baza u V.
(III) Ako je L skup od m linearno nezavisnih vektora to po Teoremi 1.8 postoji skup $H \subseteq Q$ tako da $L \cup H$ generiše V, odakle slijedi da $L \cup H$ sadrži $m + (n - m) = n$ vektora. Po dokazanom tvrđenju (I) ove Posljedice, $L \cup H$ je baza u V.
Zadatak. Posmatrajmo prostor $\mathbb{R}^4$ i četiri vektora iz tog prostora:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ispitajmo da li su ovi vektori linearno nezavisni. Sastavimo njihovu linearnu kombinaciju i izjednačimo je sa nula vektorom:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ovo nas dovodi do sistema linearnih jednačina:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_4 = 0 \\ -\alpha_2 + 5\alpha_3 + 3\alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_4 = 0 \\ 3\alpha_1 - 3\alpha_2 + 7\alpha_3 + \alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Rješavajući ovaj sistem, dobijamo samo trivijalno rješenje $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Dakle, vektori v_1, v_2, v_3, v_4 su linearno nezavisni. Pošto su to 4 linearno nezavisna vektora u četvorodimenzionalnom prostoru, to znači da su oni baza u $\mathbb{R}^4$.

Teorema 1.9. *Neka je W potprostor u prostoru V. Tada je $dimW \leq dimV$, a ako je $dimW = dimV$ tada je $W = V$.*

Dokaz
Označimo $n = dimV$. Ako je $W = \{\mathbb{0}\}$, tada je $dimW = 0 \leq n$. U suprotnom W sadrži bar jedan vektor $x_1 \neq \mathbb{0}$, koji je sam po sebi linearno nezavisan. Dopunimo x_1 do baze u W, tj. $W = Lin\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. Ovaj skup vektora je linearno nezavisan u V, što znači da je $m \leq n$. Imamo da je

$$dimW = m \leq n = dimV.$$

Ako je $dimW = n$, to znači da u W postoji baza od n vektora $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, što znači da je i $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ baza u V. Zaključujemo da je

$$W = V = Lin\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$

Posljedica 1.4. *Ako je W potprostor u V, tada W sadrži konačnu bazu koja može biti dopunjena do baze u V.*

Dokaz
Dokaz slijedi po Teoremi 1.9 i Posljedici 1.3 (III).

Primjer 7. Posmatrajmo vektorski prostor $\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$.

Neka je $W = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$ vektorski potprostor u $\mathbb{R}^3$. Lako vidimo da je $dimW = 2$, dok je $dim\mathbb{R}^3 = 3$.

Jasno je da vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$ pripada W, dok $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ne pripada. Takođe primijetimo da su vektori:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

linearno nezavisni, pa čine bazu u W. Takav sistem vektora može se dopuniti do baze u V, s tim što se mora izabrati treći vektor koji je sa navedena dva vektora linearno nezavisan. Taj treći vektor može biti $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \notin W$.

Teorema 1.10. *Neka je potprostor W zbir potprostora W_1 i W_2 vektorskog prostora V. Tada je $dimW = dimW_1 + dimW_2 - dim(W_1 \cap W_2)$.*

Dokaz
Neka je $B = \{e_1, ..., e_m\}$ baza potprostora $W_1 \cap W_2$. Kako je $W_1 \cap W_2 \subseteq W_1$ i $W_1 \cap W_2 \subseteq W_2$, po Posljedici 1.4, bazu B možemo dopuniti do baza $B_1 = \{e_1, ..., e_m, e_{m+1}, ..., e_n\}$ i $B_2 = \{e_1, ..., e_m, e_{n+1}, ..., e_k\}$ u W_1 i W_2, respektivno. Dokažimo da je $B_W = e_1, ..., e_m, e_{m+1}, ..., e_n, e_{n+1}, ..., e_k$ baza u W.
1. Uzmimo proizvoljni element $x \in W$. Tada postoje $x_1 \in W_1$ i $x_2 \in W_2$ takvi da je $x = x_1 + x_2$. Kako je $x_1 \in W_1$, i B_1 baza u W_1, to postoje koeficijenti $\alpha_1, ...\alpha_m, \alpha_{m+1}, ...\alpha_n \in \mathbb{R}$ takvi da je $x_1 = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i e_i + \sum\limits_{i=m+1}^{n} \alpha_i e_i$. Analogno, kako je $x_2 \in W_2$, i B_2 baza u W_2, to postoje koeficijenti $\beta_1, ...\beta_m, \beta_{n+1}, ...\beta_k \in \mathbb{R}$ takvi da je $x_2 = \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_i e_i + \sum\limits_{i=n+1}^{k} \beta_i e_i$. Na kraju, imamo $x = \sum\limits_{i=1}^{m} (\alpha_i + \beta_i) e_i + \sum\limits_{i=m+1}^{n} \alpha_i e_i + \sum\limits_{i=n+1}^{k} \beta_i e_i$. Dakle, vektor x pripada linearnom omotaču skupa B_W, pa je $W \subseteq \mathcal{L}(B)$.

2. Treba još dokazati da je sistem vektora $e_1, ..., e_m, e_{m+1}, ..., e_n, e_{n+1}, ..., e_k$ linerano nezavisan. Neka je

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i + \sum_{i=m+1}^{n} \beta_i e_i + \sum_{i=n+1}^{k} \gamma_i e_i = \mathbb{0}.$$

Uvedimo oznake $a = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i e_i,\ b = \sum\limits_{i=m+1}^{n} \beta_i e_i$ i $c = \sum\limits_{i=n+1}^{k} \gamma_i e_i$. Imamo da je $a+b+c = \mathbb{0}$, odnosno $a + b = -c$. Kako je $a + b \in W_1$, to je i $c \in W_1$, a pošto važi i $c \in W_2$, to je $c \in W_1 \cup W_2$. Dakle, vektor c možemo razložiti po bazama B i B_2. Kako je razlaganje vektora po bai prostora jedinstveno, zaključujemo da je $\gamma_{n+1} = ... = \gamma_k = 0$. Dakle, ostaje nam izraz

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i + \sum_{i=m+1}^{n} \beta_i e_i = \mathbb{0},$$

a kako su vektori $e_1, ..., e_m, e_{m+1}, ..., e_n$ linearno nezavisni (jer čine bazu potprostora W_1), to je $\alpha_1 = ... = \alpha_m = \beta_{m+1} = ... = \beta_n = 0$. Iz prethodnog zaključujemo da je sistem vektora $e_1, ..., e_m, e_{m+1}, ..., e_n, e_{n+1}, ..., e_k$ linearno nezavisan.
Iz 1. i 2. slijedi da je sistem vektora $e_1, ..., e_m, e_{m+1}, ..., e_n, e_{n+1}, ..., e_k$ baza potprostora W. Zaključujemo da je $dimW = n + k - m = dimW_1 + dimW_2 - dim(W_1 \cap W_2)$

1.6 Izomorfizam vektorskih prostora iste dimenzije

Neka su V i V' vektorski prostori nad poljem P.

Definicija 1.11. *Vektorski prostor V' naziva se izomorfnim vektorskom prostoru V ako postoji "$1-1$" preslikavanje $\varphi : V \to V'$ tako da $\forall u, v \in V$ i $\forall \alpha \in P$ važi:*
1. $\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$
2. $\varphi(\alpha u) = \alpha\varphi(u)$.

Preslikavanje φ se naziva izomorfizmom.
Oznaka: $V \cong V'$ čita se: "Prostori V i V' su izomorfni".

Tvrđenje 1.3. $\varphi(\mathbb{0}) = \mathbb{0}'$, *gdje su $\mathbb{0}$ i $\mathbb{0}'$ nula vektori u prostorima V i V', respektivno.*

Dokaz
Neka je $v \in V$ i neka je $\varphi : V \to V'$ izomorfizam vektorskih prostora V i V'. Tada:

$$\varphi(\mathbb{0}) = \varphi(0 \cdot v) = 0 \cdot \varphi(v) = \mathbb{0}'.$$

Primjedba. Izomorfizam je relacija ekvivalencije.

Teorema 1.11. *Vektorski prostori V i V' su izomorfni ako i samo ako $dimV = dimV'$.*

Dokaz:
Neka je $dimV = dimV' = n$ i neka su $B_1 = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ i $B_2 = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ baze u V i V', respektivno. Izaberimo proizvoljni vektor $v \in V$, tada se v razlaže po bazi u svom prostoru:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$

Definišimo preslikavanje φ na sljedeći način: $\varphi(v) = v'$, gdje je $v' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i'$. Dakle, preslikavanje φ je definisano tako da se svaki vektor iz V slika u vektor sa istim koordinatama u V'. Preslikavanje φ je "$1-1$", jer je razlaganje po bazi jedinstveno.
Neka su dalje $u, v \in V$, tj. $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ i $v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i$. Tada je:

$$\varphi(u+v) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) e_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) e_i' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i' + \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i' = u' + v' = \varphi(u) + \varphi(v).$$

Slično ćemo pokazati da je $\varphi(\alpha v) = \alpha \varphi(v)$:

$$\varphi(\alpha v) = \varphi(\alpha \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} \alpha \beta_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha \beta_i e_i' = \alpha \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i' = \alpha v' = \alpha \varphi(v).$$

Dakle, dokazali smo da su prostori iste dimenzije izomorfni, tako što smo konstruisali jedan takav izomorfizam.
Neka je sada $dimV = n > n' = dimV'$. Tada izomorfizam φ slika bazu B_1 u vektore $\{\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)\}$, koji su linearno zavisni jer u V' baza po pretpostavci ima $n' < n$ vektora. To znači da $\exists i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tako da je $\alpha_i \neq 0$ i da:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(e_i) = \mathbb{0}'$$

Pošto je φ izomorfizam, imamo da:

$$\varphi(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i) = \mathbb{0}'.$$

Kako je φ "$1-1$" preslikavanje, to se samo jedan vektor iz V slika u nula vektor u V', a to je nula vektor iz V. Slijedi:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = \mathbb{0},$$

i pošto $\exists i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tako da je $\alpha_i \neq 0$, to znači da sistem vektora B_1 nije baza, jer su linearno zavisni. Ovo je kontradikcija koja pokazuje da $n \leq n'$.
Na isti način se pokazuje kontradikcija i za pretpostavku $n < n'$. Ovo dokazuje da prostori različitih dimenzija nisu izomorfni.
Zaključak. Na kraju prvog Poglavlja podsjetimo da smo se upoznali sa konačnodimenzionalnim vektorskim prostorima, njihovom strukturom i svojstvima. Rezultat o izomorfizmu vektorskih prostora nam omogućava da poistovjetimo dva vektorska prostora iste dimenzije. Uz pomoć izomorfizma, sve rezultate o jednom prostoru možemo lako prenijeti na drugi. To nam otvara mogućnost da dalje skoro isključivo radimo sa prostorima $\mathbb{R}^n$ i skoro zaboravimo na geometrijske prostore, prostore boja, prostore prehrambenih namirnica i slično. Tačke u geometrijskom prostoru, boje, namirnice, itd. možemo poistovjetiti sa koordinatnim kolonama u

$\mathbb{R}^n$, gdje je lakše vršiti operacije sabiranja vektora i množenja brojem. Takođe, operacije nad vektorima u $\mathbb{R}^n$ je lako isprogramirati na računaru, i tako (koristeći izomorfizam) kreirati programe za operacije nad geometrijskim vektorima, za mjerenje boja ili sastavljanje optimalnog režima ishrane. Dakle, ubuduće ćemo se baviti isključivo Linearnom algebrom, znajući da se njeni rezultati mogu primijeniti na mnoge oblasti, uključujući Analitičku geometriju, Kompjutersku grafiku, Kolorimetriju ili Dijetologiju.

1.7 Direktna suma vektorskih potprostora

U prethodnoj sekciji smo naveli da je suma dva potprostora W_1 i W_2 vektorskog prostora V potprostor prostora V. Analogno, suma konačno mnogo potprostora prostora V je potprostor prostora V. Definišimo direktnu sumu potprostora.

Definicija 1.12. *Ako su $W_1, W_2, ..., W_k$ potprostori prostora V i ako se svaki vektor x iz $W = W_1 + W_2 + ... + W_k$ može na* jedinstven *način predstaviti u obliku zbira*

$$x = x_1 + x_2 + ... + x_k,\ x_i \in W_i,\ 1 \leq i \leq k,$$

tada se kaže da je W (unutrašnja) direktna suma potprostora $W_1, W_2, ..., W_k$ i piše

$$W = W_1 \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_k$$

Primjer 1. Prostor V^2 je direktna suma potprostora $W_1 = \{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} | x \in \mathbb{R}\}$($x$-osa) i $W_2 = \{\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} | y \in \mathbb{R}\}$($y$-osa).

Primjer 2. Prostor $\mathbb{R}^n$ je direktna suma potprostora $W_i = \{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} | x_i \in \mathbb{R}\},\ 1 \leq i \leq n.$

Teorema 1.12. *Neka je potprostor W direktna suma potprostora W_1 i W_2 vektorskog prostora V. Tada je $W_1 \cap W_2 = \{\mathbb{0}\}$. Takođe, $dimW = dimW_1 + dimW_2$*

Dokaz:
Prvo, kako je $W = W_1 \oplus W_2$, zaključujemo da je $\mathbb{0} = \mathbb{0} + \mathbb{0}$ jedinstveno predstavljanje vektora $\mathbb{0} \in W$ preko vektora $\mathbb{0} \in W_1$ i $\mathbb{0} \in W_2$.
Dalje, uzmimo vektor $x \in W_1 \cup W_2$. Tada, postoje $x_1 \in W_1$ i $x_2 \in W_2$, takvi da je $x = x_1$ i $-x = x_2$. Odavde je $x_1 + x_2 = \mathbb{0}$, pa na osnovu jedinstvenog predstavljanja elementa $\mathbb{0} \in W$, zaključujemo da je $x_1 = x_2 = x = \mathbb{0}$. Dakle, $W_1 \cap W_2 = \{\mathbb{0}\}$. Na kraju, dokažimo da je $dimW = dimW_1 + dimW_2$. Iz Teoreme 1.10 imamo da je $dimW = dimW_1 + dimW_2 - dim(W_1 \cup W_2)$, a kako je $W_1 \cap W_2 = \{\mathbb{0}\}$, to je $dim(W_1 \cup W_2) = 0$, pa je $dimW = dimW_1 + dimW_2$.
Prethodnu teoremu možemo uopštiti za direktnu sumu konačno mnogo potprostora, odnosno:

Teorema 1.13. *Neka je potprostor W direktna suma potprostora $W_1, W_2, ..., W_k$ vektorskog prostora V. Tada je $(\sum_{1 \leq i \leq k, i \neq j} W_i) \cup W_j = \mathbb{0}$. Takođe, $dimW = dimW_1 + dimW_2 + ... + dimW_k$.*

Dokaz ove Teoreme je analogan dokazu Teoreme 1.12, pa ga ostavljamo čitaocu.

Definicija 1.13. *Ako se vektorski prostor V može predstaviti kao direktna suma svojih potprostora W_1 i W_2, tada kažemo da je potprostor W_1 (odnosno W_2) direktna dopuna za W_2 (W_1), ili da su W_1 i W_2 komplementarni potprostori prostora V.*

Teorema 1.14. *Za proizvoljan netrivijalan potprostor W prostora V postoji komplementaran potprostor.*

Dokaz:
Neka je $dimW = m$, $dimV = n$. Kako je W netrivijalan potprostor V, to je $m < n$. Neka je $e_1, ..., e_m$ baza potprostora W. Po Posljedici 1.4, ovu bazu možemo dopuniti do baze prostora V vektorima $e_{m+1}, ..., e_n$. Neka je W_1 potprostor prostora V čija je baza sistem vektora $e_{m+1}, ..., e_n$. Kako je razlaganje proizvoljnog vektora $x \in V$ po bazi $e_1, ..., e_m, e_{m+1}, ..., e_n$ jedinstveno, zaključujemo da postoje jedistveni vektori $x_1 \in W,\ x_2 \in W_1$ takvi da je $x = x_1 + x_2$. Odavde slijedi da je $V = W \oplus W_1$.

Glava 2

Matrice

2.1 Definicija. Operacije nad matricama.

Definicija 2.1. *Matricom nad poljem P naziva se tablica $m \times n$ elemenata iz polja P.*

Oznaka: $A \in P^{m \times n}$ označava da matrica A nad poljem P sadrži m vrsta i n kolona.
Matricu $A \in P^{n \times n}$ koja sadrži isti broj vrsta i kolona ćemo nazivati kvadratnom. U suprotnom, matricu ćemo nazivati pravougaonom.
Uvedimo sada tri osnovne operacije nad matricama.
1. Množenje matrice brojem
Neka je $\alpha \in P$, $A \in P^{m \times n}$. Matricu A možemo pomnožiti brojem α:

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. Sabiranje matrica istih dimenzija
Neka su A i B matrice istih dimenzija, $A, B \in P^{m \times n}$. Tada možemo sabrati ove dvije matrice na sljedeći način:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matrica $A + B$ takođe pripada $P^{m \times n}$.
Naglasimo da, ukoliko matrice nemaju iste dimenzije, operacija sabiranja se ne može uvesti.
3. Množenje dvije matrice
Nešto složenija je operacija množenja matrica. Proizvod $A \cdot B$ je definisan samo ako je broj kolona matrice A jednak broju vrsta matrice B. Dakle, neka je $A = (a_{ij}) \in P^{m \times n}$ i $B = (b_{ij}) \in$

$P^{n\times k}$:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}.$$

Tada je proizvod $A\cdot B\in P^{m\times k}$ matrica definisana na sljedeći način:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^n a_{1i}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n a_{1i}b_{ik} \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^n a_{2i}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n a_{2i}b_{ik} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}b_{i1} & \sum_{i=1}^n a_{mi}b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n a_{mi}b_{ik} \end{pmatrix},$$

gdje je $\sum_{i=1}^n a_{1i}b_{i1}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}+\cdots+a_{1n}b_{n1}$.
Između ostalog, razmotrimo množenje vektora matricom. Neka je $A\in P^{m\times n}, b\in P^n$:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Tada je:

$$Ab=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i}b_i \\ \sum_{i=1}^n a_{2i}b_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi}b_i \end{pmatrix}.$$

Vidimo da $Ab\in P^m$.
Još jednom naglasimo da je proizvod $C\cdot D$ matrica $C\in P^{p\times q}$ i $D\in P^{r\times s}$ definisan samo u slučaju kada $q=r$.
Matricu $I=\begin{pmatrix} e_{11} & \dots & e_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ e_{m1} & \dots & e_{mn} \end{pmatrix}$ kod koje je $e_{ii}=1$ i $e_{ij}=0$ za $i\neq j$ nazivamo jediničom matricom.

Svojstva sabiranja matrica:
Za proizvoljne matrice $A,B,C\in P^{m\times n}$ važi:
a) $A+B=B+A$
b) $A+(B+C)=(A+B)+C$
c) $A+O=O+A=A,\ O\in P^{m\times n}$
d) $\forall A\in P^{m\times n}\ \exists(-A)\in P^{m\times n}\ A+(-A)=-A+A=O\in P^{m\times n}$.
e) $1\cdot A=A$
f) $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A,\ \alpha,\beta\in P$
g) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B,\ \alpha\in P$
h) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A,\ \alpha,\beta\in P$

Svojstva množenja matrica:
Za proizvoljne matrice $A \in P^{m\times n}$, $B \in P^{n\times k}$ i $C \in P^{k\times l}$ važi:
a) $A(BC) = (AB)C$
b) $A(B+C) = AB + AC,\ (A+B)C = AC + BC$
c) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B),\ \lambda \in P$
d) za $\forall A \in P^{m\times n}$ i $I \in P^{n\times n}$ važi $AI = IA = A$.

Primjer 1. Neka su date matrice $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ i $B \in \mathbb{R}^{4\times 2}$:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 & -3 \\ -2 & -5 & 1 & -1 \\ -5 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ -1 & 2 \\ 5 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Tada je lako naći proizvod $A \cdot B$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 37 & 49 \\ -9 & -19 \\ -21 & -22 \end{pmatrix}.$$

Primijetimo da u ovom slučaju nije definisan proizvod $B \cdot A$.
Zadatak. Da li je skup $\mathbb{R}^{n\times n}$ svih realnih kvadratnih matrica dimenzije n sa operacijom množenja grupa?

2.2 Sistem linearnih jednačina. Metod Gausa.

U ovoj sekciji ćemo kratko razmotriti jedan metod rješavanja sistema m linearnih jednačina sa n nepoznatih. Detaljnije ćemo se ovim zadatkom baviti u sljedećem Poglavlju.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.1}$$

Matricom ovog sistema nazovimo sljedeću matricu:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Vektor $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ nazovimo vektorom desne strane, a vektor $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vektorom nepoznatih promjenljivih.

Znajući operaciju množenja matrica i, između ostalog, množenja vektora matricom, sada zadatak (2.1) možemo zapisati kraće, u vektorskom obliku na sljedeći način:

$$AX = b. \tag{2.2}$$

2.2.1 Metod Gausa

Posmatrajmo proširenu matricu sistema (2.1) $(A|b)$:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Pretpostavimo da je $a_{11} \neq 0$. Prvu vrstu pomnoženu sa $-\frac{a_{21}}{a_{11}}, ..., -\frac{a_{m1}}{a_{11}}$ dodajemo respektivno drugoj, trećoj, ..., $m-$toj vrsti, dobijamo:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \widetilde{a_{22}} & \dots & \widetilde{a_{2n}} & \widetilde{b_2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \widetilde{a_{m2}} & \dots & \widetilde{a_{mn}} & \widetilde{b_m} \end{array}\right).$$

Pod pretpostavkom da je $\widetilde{a_{22}} \neq 0$, ponavljamo postupak sve dok ne dobijemo tzv. stepenasti oblik matrice (u svakoj novoj vrsti ispred prvog nenultog elementa postoji jedna bar jedna nula više nego u prethodnoj vrsti), tj.:

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \widetilde{a_{22}} & \dots & \widetilde{a_{2n}} & \widetilde{b_2} \\ 0 & 0 & \dots & \widetilde{\widetilde{a_{2n}}} & \widetilde{\widetilde{b_2}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \widetilde{\widetilde{a_{mn}}} & \widetilde{\widetilde{b_m}} \end{array}\right).$$

U slučaju da se u nekom momentu dogodi da $\widetilde{a_{ii}} = 0$, to ćemo vrstu i zamijeniti sa nekom od donjih vrsta $j > i$, takvom da $\widetilde{a_{ji}} \neq 0$. Ukoliko se dogodi situacija da svi $a_{ji} = 0$, $j \geq i$, to prelazimo na sljedeću kolonu. Na ovaj način uvijek svodimo matricu na stepenasti oblik, što se jasno vidi iz narednih primjera.

Primjer 1. Neka je dat sistem jednačina:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -3 \\ x_1 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

Svedimo matricu sistema na trougaoni oblik:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right) \to Iv \cdot (-\frac{1}{2}) + IIv; Iv \cdot (-1) + IIIv \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to IIv\cdot(-6)+IIIv \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -3 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -19 & -8 \end{array}\right).$$

Odavde nalazimo da je $-19x_3=-8$, tj. $x_3=\frac{8}{19}$. Uvrstimo ovo u drugu jednačinu i dobijamo $\frac{1}{2}x_2+\frac{5}{2}\frac{8}{19}=\frac{3}{2}$ odakle imamo $x_2=\frac{17}{19}$. Iz prve jednačine $2x_1-x_2+3x_3=-3$ zamjenom konkretnih vrijednosti za x_2 i x_3 dobijamo da je $x_1=-\frac{32}{19}$. Na ovaj način smo našli rješenje sistema linearnih jednačina koristeći metod Gausa.

Primjer 2. Neka je dat sistem jednačina:

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2-3x_3-x_4=5 \\ 3x_1+3x_2-x_3-5x_4=1 \\ x_1-x_2-x_4=0 \\ 4x_1-3x_3-3x_4=0 \end{cases}$$

Svedimo matricu sistema na trougaoni oblik:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -3 & -1 & 5 \\ 3 & 3 & -1 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \to Iv\cdot(-\frac{3}{2})+IIv; Iv\cdot(-\frac{1}{2})+IIIv; Iv\cdot(-2)+IVv \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & -\frac{13}{2} \\ 0 & -2 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & -4 & 3 & -1 & -10 \end{array}\right) \to IIIv\cdot(-2)+IVv; IIv \leftrightarrow IIIv \to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 2 & -3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & -\frac{13}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right).$$

Na osnovu posljednje matrice zaključujemo da sistem nema rješenje.

Primjer 3. Neka je dat sistem jednačina:

$$\begin{cases} 3x_1-3x_2-x_3=1 \\ x_1+2x_3=-1 \\ 4x_1-3x_2+x_3=0 \end{cases}$$

Svedimo matricu sistema na trougaoni oblik:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Zamijenićemo mjesta prve i druge vrste, a onda prvu vrstu pomnoženu sa -3 dodajemo drugoj, pa zatim pomnoženu sa -4 trećoj, dobijamo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -7 & 4 \\ 0 & -3 & -7 & 4 \end{array}\right) \to IIv\cdot(-1)+IIIv \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Odavde zaključujemo da je $-3x_2 - 7x_3 = 4$, tj. $x_2 = -\frac{7}{3}x_3 - \frac{4}{3}$, a iz prve jednačine imamo $x_1 + 2x_3 = -1$, tj $x_1 = -1 - 2x_3$. Opšte rješenje sistema je

$$\begin{pmatrix} -1 - 2x_3 \\ -\frac{7}{3}x_3 - \frac{4}{3} \\ x_3 \end{pmatrix}, x_3 \in \mathbb{R}.$$

Zaključak. Metod Gausa je algoritam rješavanja sistema linearnih jednačina, putem svođenja matrice na stepenasti oblik. Pri tome se koriste tri operacije nad vrstama matrice:
1. množenje jedne vrste brojem $\lambda \neq 0$;
2. zamjena dvije vrste mjestima;
3. dodavanje jedne vrste, pomnožene brojem α, drugoj vrsti.

Ove tri operacije nad vrstama nazivamo *elementarnim transformacijama vrsta*.
Osim elementarnih transformacija vrsta, mogu se razmotriti i elementarne transformacije kolona matrice. Koristeći elementarne transformacije i vrsta i kolona, matrica se može svesti na još prostiji oblik.

Tvrđenje 2.1. *Neka je $A \in P^{m \times n}$. Elementarnim transformacijama vrsta i kolona matrica A se može svesti na sljedeći oblik:*

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

gdje je G matrica dimenzija $m \times n$, na čijoj glavnoj dijagonali stoji $r \leq m$ jedinica i $m - r$ nula, a svi ostali elementi su jednaki nuli.

Umjesto strogog dokaza, ovdje ćemo navesti primjer koji ilustruje postupak svođenja.
Primjer.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 0 \\ -4 & -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to Iv \cdot (-\frac{3}{2}) + IIv; Iv \cdot 2 + IIIv \to \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -7 & 3 \end{pmatrix} \to$$

$$\to Ik \cdot (-1) + IIk; Ik \cdot \frac{3}{2} + IIIk; Ik \cdot (-\frac{1}{2}) + IVk \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -7 & 3 \end{pmatrix} \to$$

$$\to IIv \cdot 2 + IIIv; IIk \leftrightarrow IIIk \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to IIk \cdot \frac{3}{7} + IVk \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to Ik \cdot \frac{1}{2}; IIk \cdot \frac{2}{7} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.3 Determinanta kvadratne matrice

Na početku se podsjetimo pojma permutacije konačnog skupa. Skup K' se naziva permutacijom konačnog skupa $K = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ ako je K' dobijen iz K zamjenom elemenata mjestima. Prostom permutacijom se naziva skup u kome su samo dva elementa zamijenila mjesta. Skup od n elemenata ukupno ima $n!$ permutacija.
Skup K' se naziva parnom permutacijom skupa K, ako se on može dobiti putem parnog broja prostih permutacija elemenata iz skupa K. U suprotnom, skup se naziva neparnom permutacijom, ako nam treba neparan broj takvih permutacija.
Sada uvedimo pojam determinante kvadratne matrice $A = (a_{ij})_{n\times n}$. Izaberimo n elemenata matrice A, tako da bude tačno po jedan iz svake vrste i kolone i formirajmo prozivod oblika: $a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}$, gdje je $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Na ovaj način možemo formirati $n!$ različitih proizvoda. Dalje, saberimo svih $n!$ proizvoda, pri čemu ćemo svaki proizvod uzeti sa odgovarajućim znakom. Pravilo određivanja znaka svakog od proizvoda je sljedeće: ukoliko je permutacija $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ parna, taj proizvod će ući sa znakom plus, ukoliko je neparna, proizvod će ući sa znakom minus.
Dobijeni zbir od $n!$ sabiraka, uzetih sa odgovarajućim znakovima, se naziva *determinantom* kvadratne matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Oznaka: $detA$ ili $det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ili $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Primjedbe.
1. Determinanta matrice je broj, tj. element polja P.
2. Determinantu imaju samo kvadratne matrice. Nema smisla govoriti o determinanti pravougaone matrice, tj. matrice koja ima različit broj vrsta i kolona.

Primjer 1. Neka je $A = (a_{11}) \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ matrica dimenzija 1×1. Tada $detA = a_{11}$.
Primjer 2. Neka je $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Tada, saglasno definiciji:

$$detA = det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Primjer 3. Neka je $A = \mathbb{R}^{3\times 3}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{\pi \in Skup\, permutacija \{1,2,3\}} sgn(\pi) a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}.$$

U ovom slučaju determinanta matrice će biti jednaka zbiru $3! = 6$ proizvoda. Označimo sa $\pi_1, \ldots, \pi_6$ sve permutacije skupa $\{1, 2, 3\}$, sa $P(\pi_j)$ broj inverzija u permutaciji π_j. Znak (parnost) permutacije π_j je $(-1)^{P(\pi_j)}$.

$$\pi_1 : 1 \quad 2 \quad 3 \quad P(\pi_1) = 0 \Rightarrow sgn\pi_1 = (-1)^0 = 1$$

$$\pi_2 : 1 \quad 3 \quad 2 \quad P(\pi_2) = 1 \Rightarrow sgn\pi_2 = (-1)^1 = -1$$

$$\pi_3 : 2 \quad 1 \quad 3 \quad P(\pi_3) = 1 \Rightarrow sgn\pi_3 = (-1)^1 = -1$$

$$\pi_4 : 2 \quad 3 \quad 1 \quad P(\pi_4) = 2 \Rightarrow sgn\pi_4 = (-1)^2 = 1$$

$$\pi_5 : 3 \quad 1 \quad 2 \quad P(\pi_5) = 2 \Rightarrow sgn\pi_5 = (-1)^2 = 1$$

$$\pi_6 : 3 \quad 2 \quad 1 \quad P(\pi_6) = 3 \Rightarrow sgn\pi_6 = (-1)^3 = -1$$

Konačno, imamo:

$$detA = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Zadatak. Odredimo determinantu matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determinanta ove matrice se dobija sabiranjem $3! = 6$ proizvoda. Računajući parnost svake od permutacija, dobijamo:

$$detA = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) \cdot (-1) + 7 \cdot 0 \cdot (-1) - (-1) \cdot 2 \cdot 7 - 0 \cdot 0 \cdot 3 - (-1) \cdot (-1) \cdot 1 = 19.$$

Neka je $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Sa $\widetilde{A_{ij}} \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ označimo matricu dobijenu iz A izbacivanjem $i-$te vrste i $j-$te kolone.

Teorema 2.1. *Determinanta kvadratne matrice A se može izračunati razlaganjem po bilo kojoj vrsti, tj. $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ važi:*

$$detA = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot det\widetilde{A_{ij}}.$$

Definicija 2.2. *Broj $(-1)^{i+j} \cdot det\widetilde{A_{ij}}$ naziva se algebarskom dopunom elementa a_{ij}.*

Nastavak zadatka. Odredimo determinantu matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

razvijajući je po drugoj vrsti:

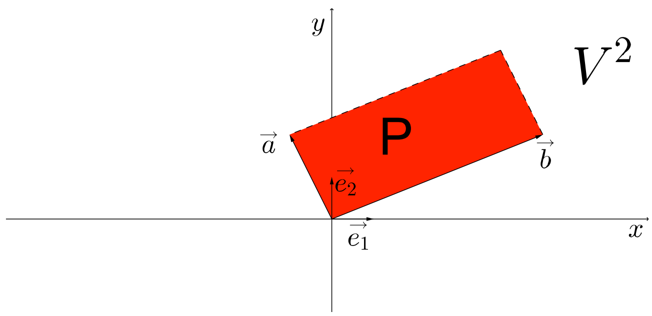
$$detA = -0 \cdot det \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - (-1) \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = -0 \cdot 7 + 2 \cdot 10 + 1 \cdot (-1) = 19.$$

2.3.1 Geometrijski smisao determinante

(A) Razmotrimo dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ u geometrijskom prostoru V^2. Izaberimo standardnu bazu $\{e_1, e_2\}$ u V^2. Tada se $\vec{a}$ i $\vec{b}$ razlažu po bazi: $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$, $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2$.
Označimo sa P površinu paralelograma koji je navučen na vektore $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Tada:

$$P = |det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}|.$$

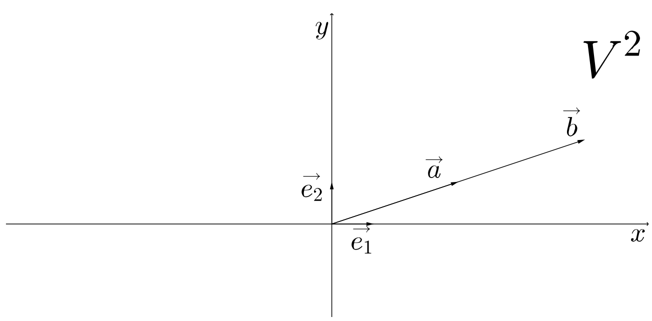
Dakle, kako bi se izračunala površina paraleleograma koji je navučen na dva vektora, dovoljno je koordinate tih vektora uvrstiti u vrste matrice i izračunati determinantu dobijene matrice dimenzija 2×2. Istina, determinanta matrice može biti negativnom, zato će površina biti apsolutna vrijednost determinante.
Primijetimo da površina zavisi od izbora baze. Kada se govori o površini obično se podrazumijeva da je izabrana standardna baza $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, ako nije naglašeno drugačije.
Zadatak 1. Izračunati površinu paralelograma navučenog na vektore $\vec{a} = (-1,\, 2)$ i $\vec{b} = (5,\, 2)$.
Imamo:



Slika 2.1

$$P = |det\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}| = |-2-10| = 12.$$

Zadatak 2. Izračunati površinu paralelograma navučenog na vektore $\vec{a} = (3,\, 1)$ i $\vec{b} = (6,\, 2)$.
Lako je provjeriti da je tražena površina nula. Ovo je bilo očekivano, s obzirom da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni. (B) U geometrijskom trodimenzionalnom prostoru V^3 paralelopiped je geometrijsko

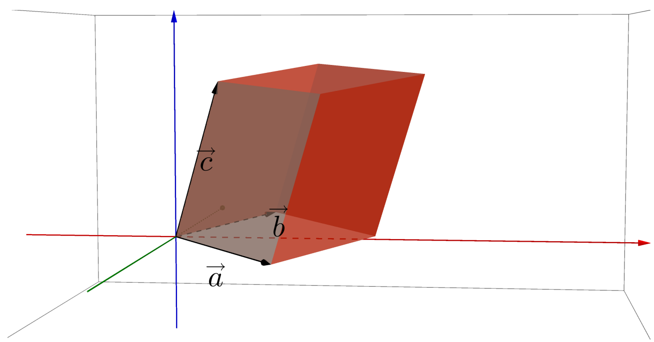


Slika 2.2

tijelo navučeno na tri vektora: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Uvrstivši koordinate ovih vektora u vrste matrice, možemo izračunati zapreminu V ovog paralelopipeda:

$$V = |det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}|.$$

Na Slici 2.3 je prikazan paralelogram navučen na vektore $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$.



Slika 2.3

Zadatak 3. Izračunati zapreminu paralelopipeda navučenog na vektore $\vec{a} = (3, 0, -6)$, $\vec{b} = (1, -3, -2)$, $\vec{c} = (1, 6, -2)$.
Uvrstimo koordinate vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ u vrste matrice i nađimo determinantu:

$$V = |det \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 6 & -2 \end{pmatrix}| = 0.$$

Dobijeni rezultat je očekivan, ako uočimo da su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ komplanarni (linearno zavisni). Pošto leže u istoj ravni, paralelopiped koji je navučen na njih je, u stvari, paralelogram i zapremina mu je nula.
(C) Iako se naša geometrijska intuicija završava na trodimenzionalnom geometrijskom prostoru, moguće je razmotriti zapreminu apstraktnog paralelopipeda u geometrijskom prostoru V^n. Ovaj paralelopiped je navučen na n vektora: $\vec{a}_1 = (a_{11}, \ldots a_{1n}), \ldots, \vec{a}_n = (a_{n1}, \ldots, a_{nn})$. Očekivano, zapremina ovog apstraktnog n-dimenzionalnog paralelopipeda se može izračunati pomoću determinante:

$$V = |det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}|.$$

Sada već možemo pogoditi da će ova zapremina biti jednaka nuli, ako su vektori-vrste $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ linearno zavisni.

2.3.2 Svojstva determinante

Nakon ovih geometrijskih ilustracija pojma determinante, vratimo se algebarskim razmatranjima. Najprije ćemo dokazati dva jednostavna tvrđenja o determinanti matrice.

Tvrđenje 2.2.

Tvrđenje 2.3. *Ako matrica A sadrži vrstu koja se sastoji isključivo od nula, tada je $detA = 0$.*

Tvrđenje 2.4. *Neka je matrica B dobijena iz A množenjem jedne vrste brojem λ. Tada je $detB = \lambda \cdot detA$.*

Dva prethodna tvrđenja direktno slijede iz definicije determinante.

Tvrđenje 2.5. *Ako matrica A sadrži dvije identične vrste, tada je $detA = 0$.*

Dokaz
Dokaz ćemo izvesti indukcijom po dimenziji matrice.
Neka je $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ matrica sa dvije iste vrste. Tada je

$$det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} = 0$$

Pretpostavimo da tvrđenje važi za matricu dimenzije $(n-1)\times(n-1)$ i dokažimo za matricu A dimenzije $n \times n$ koja ima dvije iste vrste. Imamo:

$$detA = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot det\widetilde{A_{ij}}.$$

Po pretpostavci indukcije matrica $\widetilde{A_{ij}}$ dimenzije $(n-1)\times(n-1)$ ima dvije iste vrste, pa je $det\widetilde{A_{ij}} = 0$. Iz ovoga jasno slijedi da je $detA = 0$.
Dalje ćemo zbog jednostavnosti sa $a_i \, (i = \{1, \ldots, n\})$, označavati $i-$tu vrstu matrice A: $a_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$.

Teorema 2.2. *Determinanta matrice $A = (a_{ij})_{n\times n}$ je linearna funkcija svake vrste, tj. za svako $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ i svako $\alpha \in P$ imamo:*

$$det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{r-1} \\ u + \alpha v \\ a_{r+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{r-1} \\ u \\ a_{r+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \alpha \cdot det \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{r-1} \\ v \\ a_{r+1} \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Dokaz
Dokaz Teoreme izvodimo indukcijom po n.
Za $n = 1$ tvrđenje je očigledno. Pretpostavimo da Teorema važi za matricu dimenzije $(n-1) \times (n-1)$. Neka je A matrica dimenzije $n \times n$ sa vrstama $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Neka za neko $r \in \{1, 2, \ldots, n\}$ imamo da je $a_r = u + \alpha \cdot v$ i gdje su u i v vektori zadati sa $u = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ i $v = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Označimo sa B i C matrice dobijene iz A tako što je vrsta a_r zamijenjena vrstom u i v respektivno. Treba dokazati da je:

$$det A = det B + \alpha \cdot det C.$$

Pretpostavimo da je $r > 1$. Tada su matrice $\widetilde{A_{1j}}, \widetilde{B_{1j}}$ i $\widetilde{C_{1j}}$ iste osim $(r-1)-$ve vrste. Vrsta $(r-1)$ matrice $\widetilde{A_{1j}}$ je oblika $(b_1 + \alpha \cdot c_1, \ldots, b_{j-1} + \alpha \cdot c_{j-1}, b_{j+1} + \alpha \cdot c_{j+1}, \ldots, b_n + \alpha \cdot c_n)$. Jasno je da je ovo suma $(r-1)-$ve vrste matrice $\widetilde{B_{1j}}$ i $(r-1)-$ve vrste matrice $\widetilde{C_{1j}}$, pomnožene sa α. Dimenzije matrica $\widetilde{A_{1j}}, \widetilde{B_{1j}}$ i $\widetilde{C_{1j}}$ su $(n-1) \times (n-1)$, pa za njih važi pretpostavka indukcije, tj.

$$det\widetilde{A_{1j}} = det\widetilde{B_{1j}} + \alpha \cdot det\widetilde{C_{1j}}.$$

Sada imamo:

$$det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot det\widetilde{A_{1j}} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot det\widetilde{B_{1j}} + \alpha \cdot \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot det\widetilde{C_{1j}} =$$

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \cdot b_{1j} \cdot det\widetilde{B_{1j}} + \alpha \cdot \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \cdot c_{1j} \cdot det\widetilde{C_{1j}} = det B + \alpha \cdot det C.$$

Jednakost $a_{1j} = b_{1j} = c_{1j}$ važi, jer se matrice $\widetilde{A_{1j}}, \widetilde{B_{1j}}$ i $\widetilde{C_{1j}}$ razlikuju samo po vrsti $(r-1)$, a elementi a_{1j}, b_{1j} i c_{1j} nisu u toj vrsti.

Posljedica 2.1. *Neka je matrica B dobijena zamjenom mjestima dvije vrste u matrici A. Tada je $det A = -det B$.*

Dokaz
Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vrste u matrici A i neka se B dobija zamjenom mjesta vrsta a_r i a_s, tj.:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \\ \vdots \\ a_s \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_s \\ \vdots \\ a_r \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Posmatrajmo matricu C dobijenu iz A zamjenom vrsta a_r i a_s vrstom $a_r + a_s$:

$$C = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r + a_s \\ \vdots \\ a_r + a_s \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Determinanta matrice C je 0, jer ima dvije iste vrste, dakle:

$$0 = detC = det\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r + a_s \\ \vdots \\ a_r + a_s \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \\ \vdots \\ a_r + a_s \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_s \\ \vdots \\ a_r + a_s \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} =$$

$$= det\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \\ \vdots \\ a_r \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \\ \vdots \\ a_s \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_s \\ \vdots \\ a_r \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_s \\ \vdots \\ a_s \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0 + detA + detB + 0.$$

Odavde imamo da je $detA + detB = 0$, tj. $detA = -detB$, što je i trebalo dokazati.

Posljedica 2.2. *Neka je matrica B dobijena dodavanjem jedne vrste matrice A, pomnožene brojem α, drugoj vrsti matrice A. Tada je $detA = detB$.*

Dokaz
Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vrste u matrici A i neka se B dobija dodavanjem vrste a_r, pomnožene sa

α, vrsti a_s u A, tj.:

$$A=\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_r\\ \vdots\\ a_s\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_r\\ \vdots\\ a_s+\alpha a_r\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}.$$

Tada je:

$$detB=det\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_r\\ \vdots\\ a_s+\alpha a_r\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=det\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_r\\ \vdots\\ a_s\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}+\alpha\cdot det\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_r\\ \vdots\\ a_r\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=detA+\alpha\cdot 0=detA.$$

Posljedica 2.3. *Neka se u matrici A jedna vrsta može izraziti kao linearna kombinacija ostalih. Tada je $detA=0$.*

Dokaz
Neka su $a_1,a_2,\ldots,a_n$ vrste u matrici A. Neka je vrsta a_r linearna kombinacija ostalih, tj. $a_r=\alpha_1a_1+\cdots+\alpha_{r-1}a_{r-1}+\alpha_{r+1}a_{r+1}+\cdots+\alpha_na_n$. Formirajmo matricu B na sljedeći način: vrsti a_r dodajmo vrstu a_1 pomnoženu sa $-\alpha_1$, vrstu a_2 pomnoženu sa $-\alpha_2$,...,vrstu a_{r-1} pomnoženu sa $-\alpha_{r-1}$, vrstu a_{r+1} pomnoženu sa $-\alpha_{r+1}$,..., vrstu a_n pomnoženu sa $-\alpha_n$. Determinante matrica A i B su jednake po Posljedici 2.2 Imamo:

$$detA=detB=det\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_{r-1}\\ a_r-\alpha_1a_1-\cdots-\alpha_{r-1}a_{r-1}-\alpha_{r+1}a_{r+1}-\cdots-\alpha_na_n\\ a_{r+1}\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=0$$

jer u B imamo vrstu u kojoj su sve nule.
Zaključak. Ukoliko su vrste matrice A linearno zavisne tada je $detA=0$.
Primjer. Posmatrajmo matricu:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3\\ 0 & 7 & 2\\ 1 & -18 & -3\end{pmatrix}.$$

Vrste ove matrice su $a_1 = (1 \quad 3 \quad 3), a_2 = (0 \quad 7 \quad 2)$ i $a_3 = (1 \quad -18 \quad -3)$. Primijetimo da je $a_3 = a_1 - 3a_2$, što znači da je $detA = 0$.

2.4 Matrice elementarnih transformacija

Neka je zadata matrica $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

U ovoj sekciji ćemo se baviti transformacijama vrsta matrice A. Razlikovaćemo elementarne transformacije vrsta tri tipa:
1. tip: množenje jedne vrste matrice A brojem $\lambda \neq 0$;
2. tip: zamjena dvije vrste matrice A mjestima;
3. tip: dodavanje jedne vrste matrice A, pomnožene brojem α, drugoj vrsti.
Primjedba. Metod Gausa, svođenje matrice na stepenasti oblik, se sastoji od konačnog broja elementarnih transformacija vrsta matrice A.
Sada ćemo pokazati da se elementarne transformacije vrsta mogu dobiti množenjem matrice A nekim kvadratnim matricama. Te matrice ćemo nazivati *matricama elementarnih transformacija.*
1. tip: Matrica elementarne transformacije množenja vrste brojem $\lambda \neq 0$.
Označimo sa E_a kvadratnu dijagonalnu matricu dimenzije m, na čijoj dijagonali su sve jedinice, osim r-te vrste, gdje se nalazi broj λ:

$$E_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Pomnožimo matricu $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matricom $E_a \in \mathbb{R}^{m\times m}$ sa lijeve strane:

$$E_aA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda a_{r1} & \lambda a_{r2} & \dots & \lambda a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Vidimo da je proizvod ove dvije matrice matrica dobijena iz A množenjem r-te vrste brojem λ. Konačno, primijetimo da je $detE_a = \lambda \neq 0$.

2. tip: Matrica elementarne transformacije zamjene dvije vrste mjestima.

Označimo sa E_b kvadratnu matricu dimenzije m u kojoj u svakoj vrsti stoji tačno po jedna jedinica. Pri tome u svim vrstama, osim r-te i s-te, jedinice stoje na dijagonali, dok u vrsti r jedinica stoji u s-toj koloni, a u vrsti s u r-toj koloni:

$$E_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Pomnožimo matricu A matricom E_b sa lijeve strane:

$$E_bA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Vidimo da je proizvod E_bA matrica dobijena iz A zamjenom vrsta r i s mjestima.

Primijetimo da $detE_b = -1$.

3. tip: Dodavanje jedne vrste, pomnožene brojem α, drugoj vrsti.

Označimo sa E_c kvadratnu matricu dimenzije m u kojoj na dijagonali stoje sve jedinice, ostalo su nule, osim elementa na poziciji r, s, koji je jednak α:

$$E_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Pomnožimo matricu A matricom E_c sa lijeve strane:

$$E_cA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1}+\alpha a_{r1} & a_{s2}+\alpha a_{r2} & \dots & a_{sn}+\alpha a_{rn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Vidimo da je proizvod E_cA matrica dobijena iz A dodavanjem vrste r, pomnožene brojem α, vrsti s.
Primijetimo da $detE_c = 1$.
Primjer. Neka je data matrica $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$. Pretpostavimo da je u matrici A potrebno prvoj vrsti dodati drugu, pomnoženu brojem 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 6 & -5 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Formirajmo matricu E_c elementarnih transormacija trećeg tipa:

$$E_c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rezultat proizvoda E_cA je upravo matricu koju smo tražili.

$$E_cA = \begin{pmatrix} 13 & -7 & 5 & 4 \\ 6 & -5 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Zaključak. Prilikom rješavanja sistema linearnih jednačina smo koristili metod Gausa. Sada vidimo da se metod Gausa svođenja matrice $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ na stepenasti oblik može zapisati kao množenje matrice A matricama elementarnih transformacija sa lijeve strane.
Primjedba. Množenje matrice A matricama elementarnih transformacija sa desne strane odgovara elementarnim transformacijama kolona.

Zadatak. Zadata je matrica

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & 8 & 4 \\ 4 & -5 & 0 & 2 \\ 1 & -11 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Zapisati matrice elementarnih transformacija $E_1, \dots, E_m$ kojima je potrebno pomnožiti A s lijeve strane kako bi se ova svela na stepenasti oblik.

2.5 Obratna matrica

U ovoj Sekciji ćemo nastaviti da se bavimo isključivo kvadratnim matricama iz $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Definicija 2.3. *Matrica* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ *dimenzija* $n \times n$*, na čijoj dijagonali se nalaze jedinice, a izvan dijagonale nule, se naziva jediničnom matricom.*

Definicija 2.4. *Neka je* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$*. Ako postoji matrica* $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *takva da je* $Q \cdot A = A \cdot Q = I$*, tada ćemo* Q *nazivati obratnom (ili inverznom) matricom matrice* A*.*
Matricu koja ima obratnu ćemo nazivati invertibilnom.

Oznaka: Obratna matrica se označava $Q = A^{-1}$.

Teorema 2.3. *Matrice elementarnih transformacija su invertibilne i njihove obratne matrice su matrice elementarnih transformacija istog tipa.*

Dokaz
Dokaz ćemo izvesti tako što ćemo za svaki od tri tipa matrica elementarnih transformacija neposredno naći njihove obratne matrice.
1. Razmotrimo najprije matricu E_a elementarnih transformacija prvog tipa.

$$E_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Tada:

$$E_a^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \frac{1}{\lambda} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Neka je E_b matrica elementarnih transformacija drugog tipa, tj. zamjene dvije vrste mjestima. Tada je lako provjeriti da $E_b = E_b^{-1}$.
3. Konačno, razmotrimo matricu elementarnih transformacija trećeg tipa.

$$E_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}, E_c^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\alpha & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Na ovaj način je pokazano da su matrice elementarnih transformacija invertibilne. Vidimo da su obratne matrice $E_a^{-1}, E_b^{-1}, E_c^{-1}$ takođe matrice elementarnih transformacija.

2.6 Rang matrice

Neka je zadata pravougaona matrica $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Iz A izaberimo k vrsta i k kolona, tj. podmatricu M_k dimeznije $k \times k$. Označimo sa $i_1, i_2, \dots, i_k$ indekse izabranih vrsta, a sa $j_1, j_2, \dots, j_k$ indekse kolona.

$$M_k = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & \dots & a_{i_k j_k} \end{pmatrix}.$$

Definicija 2.5. *Determinanta matrice M_k naziva se minorom reda k matrice A.*

Definicija 2.6. *Reći ćemo da matrica A ima rang jednak r, ako:*
1. postoji minor reda r različit od nule;
2. svaki minor reda $s > r$ matrice A je jednak nuli.

Drugim riječima, rang matrice je dimenzija najveće kvadratne podmatrice čija je detemninata različita od nule.
Oznaka: $r = rankA$.

2.6.1 Bazisne vrste i kolone

Matrica A ranga r ima bar jednu kvadratnu podmatricu M_r dimenzija $r \times r$, takvu da je $detM_r \neq 0$. Vrste i kolone matrice A na čijim se presjecima nalaze elementi matrice M_r nazivaju se bazisnim vrstama i bazisnim kolonama.
Primjer. Posmatrajmo matricu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & -17 & -3 \end{pmatrix}.$$

Najveća kvadratna podmatrica matrice A je dimenzije 3×3. Međutim, direktnim računanjem determinanti možemo vidjeti da su sva četiri minora reda 3 jednaka nuli. Izdvajajući iz A podmatrice dimenzije 2×2, dobijamo minore drugog reda koji nisu jednaki nuli. Kao bazisne vrste i kolone možemo uzeti, recimo, prvu i drugu vrstu i prvu i drugu kolonu. Tada:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, detM_2 = -3 \neq 0.$$

Sada iz definicije slijedi da je rang matrice A jednak 2. Primijetimo da izbor bazisnih vrsta i kolona nije jednoznačan. Na primjer, možemo izabrati drugu i treću vrstu i prvu i četvrtu kolonu i one će takođe biti bazisne. Zaista, na ovaj način smo izabrali podmatricu

$$M_2' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix},$$

čija je determinanta jednaka -1.

Teorema 2.4. *Važe sljedeća tvrđenja:*
1. Bazisne vrste (bazisne kolone) matrice A su linearno nezavisne.
2. Svaka vrsta (kolona) matrice A se može predstaviti kao linearna kombinacija bazisnih vrsta (kolona).

Dokaz
1. Neka je $rankA = r$, i $a_{i_1}, \dots, a_{i_r}$ bazisne vrste matrice A. Tada je podmatrica M_r koja sadrži ove vrste takva da $detM_r \neq 0$. Saglasno Posljedici 2.3 (takođe vidi Zaključak nakon ove Posljedice) vrste matrice M_r su linearno nezavisne. No, tada su i vrste $a_{i_1}, \dots, a_{i_r}$ matrice A linearno nezavisne.
2. Pretpostavimo da je $rankA = r$. Tada su svi minori reda $r+1$ jednaki nuli, tj. $detM_{r+1} = 0$, gdje je:

$$M_{r+1} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rs} \\ a_{p1} & \dots & a_{pr} & a_{ps} \end{pmatrix}, \quad p > r, \quad s > r.$$

Označimo sa $\Delta_{1s}, \Delta_{2s}, \dots, \Delta_{rs}, \Delta_{ps}$ algebarske dopune elemenata $a_{1s}, a_{2s}, \dots, a_{rs}, a_{ps}$ i izračunajmo determinantu M_{r+1}, razlažući po koloni s:

$$detM_{r+1} = a_{1s}\Delta_{1s} + a_{2s}\Delta_{2s} + \dots + a_{rs}\Delta_{rs} + a_{ps}\Delta_{ps} = 0. \tag{2.3}$$

Podijelimo jednačinu (2.3) sa $detM_r \neq 0$:

$$a_{ps} = -\frac{\Delta_{1s}}{detM_r}a_{1s} - \frac{\Delta_{2s}}{detM_r}a_{2s} - \cdots - \frac{\Delta_{rs}}{detM_r}a_{rs}.$$

Ako uvedemo oznake $-\frac{\Delta_{ks}}{detM_r} = \alpha_k, k \in \{1, 2, ..., r\}$ dobijamo:

$$a_{ps} = \alpha_1 a_{1s} + \alpha_2 a_{2s} + \cdots + \alpha_r a_{rs}.$$

Uvrštavajući u prethodnu jednakost redom $s = 1, 2, \ldots, n$ dobijamo:

$$\begin{cases} a_{p1} = \alpha_1 a_{11} + \cdots + \alpha_r a_{r1} \\ \vdots \\ a_{pn} = \alpha_1 a_{1n} + \cdots + \alpha_r a_{rn}. \end{cases}$$

Posljednjih n jednakosti možemo zapisati kao vektorsku jednakost:

$$a_p = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_r a_r.$$

Znači, vrsta a_p je linearna kombinacija bazisnih vrsta $a_1, \ldots, a_r$.

Teorema 2.5. *Ako se svaka vrsta $a_1, a_2, \ldots, a_p$ može predstaviti kao linearna kombinacija vrsta $b_1, b_2, \ldots, b_k$ i $p > k$, tada su vrste $a_1, a_2, \ldots, a_p$ linearno zavisne.*

Dokaz
Po pretpostavci:

$$\begin{cases} a_1 = c_{11} b_1 + \cdots + c_{1k} b_k \\ \vdots \\ a_p = c_{p1} b_1 + \cdots + c_{pk} b_k \end{cases} \tag{2.4}$$

Formirajmo matrice:

$$b = (b_1\, b_2\, \ldots\, b_p) \text{ i } C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \ldots & c_{pk} \end{pmatrix}.$$

Označimo sa $c_1, \ldots, c_p$ vrste matrice C, tada se jednakosti (2.4) mogu zapisati u obliku:

$$\begin{cases} a_1 = bc_1 \\ \vdots \\ a_i = bc_i \\ \vdots \\ a_p = bc_p \end{cases}$$

Jasno je da je $rankC \leq k < p$. Pošto C ima p vrsta, to jedna može biti predstavljena kao linearna kombinacija ostalih. Recimo:

$$c_i = \alpha_1 c_1 + \cdots + \alpha_{i-1} c_{i-1} + \alpha_{i+1} c_{i+1} + \cdots + \alpha_p c_p.$$

Tada:

$$a_i = bc_i = b(\alpha_1 c_1 + \cdots + \alpha_{i-1}c_{i-1} + \alpha_{i+1}c_{i+1} + \cdots + \alpha_p c_p) =$$
$$= \alpha_1(bc_1) + \alpha_2(bc_2) + \cdots + \alpha_{i-1}(bc_{i-1}) + \alpha_{i+1}(bc_{i+1}) + \cdots + \alpha_p(bc_p) =$$
$$= \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{i-1}a_{i-1} + \alpha_{i+1}a_{i+1} + \cdots + \alpha_p a_p,$$

odakle slijedi da su $a_1, a_2, \dots, a_p$ linearno zavisne.

Teorema 2.6. *Neka je $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Rang A je maksimalan broj linearno nezavisnih vrsta (kolona) matrice A.*

Dokaz
Neka je $rankA = r$ i neka su $a_1, a_2, \dots, a_r$ bazisne vrste matrice A. Neka je $a_{i_1}, \dots, a_{i_s}$ proizvoljan skup s vrsta matrice A, gdje je $s > r$. Po Teoremi 2.4, svaka vrsta $a_{i_1}, \dots, a_{i_s}$ se može predstaviti kao linearna kombinacija vrsta $a_1, \dots, a_r$. Pošto je $s > r$, to su po Teoremi 2.5 $a_{i_1}, \dots, a_{i_s}$ linearno zavisne.

Teorema 2.7. *Ako se svaka vrsta (kolona) matrice A može izraziti kao linearna kombinacija vrsta (kolona) matrice B, tada $rankA \leq rankB$.*

Dokaz
Neka su $a_1, a_2, \dots, a_r$ bazisne vrste u matrici A, a $b_1, b_2, \dots, b_s$ bazisne vrste u B. Treba pokazati da je $r \leq s$.
Pretpostavimo suprotno, da je $r > s$. Po uslovu svaka vrsta $a_1, \dots, a_r$ može se predstaviti kao linearna kombinacija $b_1, \dots, b_s$, pa su po Teoremi 2.5 vrste $a_1, \dots, a_r$ linearno zavisne. Ali, to su po pretpostavci bazisne vrste, pa imamo kontradikciju, koja dokazuje da je $r \leq s$, tj. $rankA \leq rankB$.

Teorema 2.8. *Neka je $A \in P^{m\times n}$, $B \in P^{n\times k}$. Tada $rank(A\cdot B) \leq rankA$ i $rank(A\cdot B) \leq rankB$.*

Dokaz
1. Vrste matrice $A\cdot B$ su linearna kombinacija vrsta matrice B (što direktno slijedi iz definicije množenja matrica).
2. Vrste matrice $A\cdot B$ su linearna kombinacija vrsta matrice A (što direktno slijedi iz definicije množenja matrica).
Na osnovu Teoreme 2.7, imamo da je $rank(A\cdot B) \leq rankB$ i $rank(A\cdot B) \leq rankA$. Slično važi i za kolone.

Teorema 2.9. *Neka je $A \in P^{m\times n}$.*
Ako je $B \in P^{m\times m}$ invertibilna matrica, tada $rank(B\cdot A) = rankA$.
Ako je $C \in P^{n\times n}$ - invertibilna matrica, tada $rank(A\cdot C) = rankA$.

Dokaz
Na osnovu prethodne Teoreme je $rank(B\cdot A) \leq rankA$.
Pošto je B invertibilna, to matricu A možemo predstaviti u obliku $A = I\cdot A = (B^{-1}\cdot B)\cdot A = B^{-1}\cdot(B\cdot A)$.
Dakle: $rankA = rank(B^{-1}\cdot(B\cdot A)) \leq rank(B\cdot A)$.
Posljednja nejednakost slijedi iz prethodne Teoreme. Dvije dobijene nejednakosti dokazuju našu Teoremu.

Posljedica 2.4. *Elementarne transformacije vrsta i kolona ne mijenjaju rang matrice.*

Dokaz slijedi iz činjenice da su matrice elementarnih transformacija invertibilne (Teorema 2.3).
Zadatak. Odredimo rang matrice A zadate sa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & -17 & -3 \end{pmatrix}.$$

Primijetimo da treću vrstu možemo izraziti kao linearnu kombinaciju prve i druge. Naime, ako prvu vrstu oduzmemo od druge i dodamo trećoj, imamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 & 1 \\ 0 & -3 & 12 & 1 \\ 0 & 6 & -24 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dodavanjem druge vrste, pomnožene brojem 2, trećoj, dobijamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 & 1 \\ 0 & -3 & 12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Vidimo da je rang posljednje matrice jednak 2, a pošto elementarne transformacije ne mijenjaju rang matrice, to znači i da je rang matrice A jednak 2.

2.7 Singularne i regularne matrice

U ovoj Sekciji ćemo se vratiti kvadratnim matricama.

Definicija 2.7. *Kvadratna matrica A naziva se regularnom, ako je $detA \neq 0$. Ako je $detA = 0$, matrica A se naziva singularnom.*

Tvrđenje 2.6. *Matrica $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je regularna ako i samo ako je $rankA = n$.*

Dokaz
Ukoliko je $rankA < n$, to su njene vrste linearno zavisne, dakle jedna vrsta je linearna kombinacija ostalih. Iz Posljedice 2.3 slijedi da je $detA = 0$, tj. A je singularna.
S druge strane, ako je $rankA = n$, to, po definiciji ranga, postoji minor reda n koji je različit od nule. Pošto je dimenzija matrice $n \times n$, ovo znači da je $detA \neq 0$.

Teorema 2.10. *Svaka regularna matrica se može predstaviti kao proizvod matrica elementarnih transformacija.*

Dokaz
Neka je A regularna. Iz prethodnog Tvrđenja imamo da je $rankA = n$. Prema Tvrđenju 2.1, matrica A se elementarnim transformacijama vrsta i kolona može svesti na jediničnu matricu (ovdje smo osim pomenutog Tvrđenja iskoristili činjenicu da elementarne transformacije vrsta

i kolona ne mijenjaju rang matrice). Podsjetimo da elementarne transformacije vrsta odgovaraju množenju matricama elementarnih transformacija $E_1, \ldots, E_s$ sa lijeve strane. Takođe, elementarne transformacije kolona se mogu zapisati kao množenje matricama elementarnih transformacija $G_1, \ldots, G_q$ sa desne strane. Zapišimo sve rečeno u obliku jednakosti:

$$I = E_s \cdots E_2 \cdot E_1 \cdot A \cdot G_1 \cdot G_2 \cdots G_q, \tag{2.5}$$

Međutim, matrice $E_1, \ldots, E_s, G_1, \ldots, G_q$ su, kao matrice elementarnih transformacija, invertibilne. Sada jednakost (2.5) množimo redom sa $E_s^{-1}, ..., E_1^{-1}$ sa lijeve strane. Imamo:

$$E_1^{-1} \cdots E_s^{-1} = A \cdot G_1 \cdots G_q. \tag{2.6}$$

Dalje množimo (2.6) sa $G_q^{-1}, \ldots, G_1^{-1}$ sa desne strane:

$$E_1^{-1} \cdots E_s^{-1} \cdot G_q^{-1} \cdots G_1^{-1} = A.$$

Po Teoremi 2.3, matrice $E_s^{-1}, \ldots, E_1^{-1}, G_1^{-1}, \ldots, G_q^{-1}$ su matrice elemetarnih transformacija, što čini dokaz kompletnim.
Sada smo u mogućnosti da dokažemo da je determinanta proizvoda matrica jednaka proizvodu determinanti.

Teorema 2.11. *Neka su $A, B \in P^{n \times n}$. Tada je*

$$det(A \cdot B) = detA \cdot detB.$$

Dokaz
Dokaz ćemo podijeliti u tri dijela. Najprije ćemo dokazati Teoremu za slučaj kada je A matrica elementarnih transformacija. Zatim ćemo razmotriti slučaj kada je matrica A singularna i konačno, koristeći prethodnu Teoremu, razmotrićemo slučaj kada je A regularna.
(I) Počnimo od slučaja kada je A matrica elementarnih transformacija.
(Ia) Neka je A matrica elementarnih transformacija prvog tipa. Tada je $A \cdot B$ matrica dobijena iz B množenjem jedne vrste brojem $\lambda \neq 0$. Imajući to u vidu, lako je vidjeti da $det(A \cdot B) = \lambda \cdot detB$ (Tvrđenje 2.4). Prisjetimo se da je determinanta matrice elementarnih transformacija prvog tipa jednaka λ, pa imamo $det(A \cdot B) = \lambda \cdot detB = detA \cdot detB$.
(Ib) Neka je A matrica elementarnih transformacija drugog tipa. Tada je $detA = -1$, a matrica $A \cdot B$ je dobijena zamjenom mjestima dvije vrste u B. Pozovimo se na Posljedicu 2.1 da zaključimo:

$$det(A \cdot B) = -detB = -1 \cdot detB = detA \cdot detB.$$

(Ic) Neka je A matrica elementarnih transformacija trećeg tipa. Tada je $detA = 1$, a matrica $A \cdot B$ dobijena iz B dodavanjem $i-$te vrste, pomnožene brojem α, $j-$ toj vrsti. Poznato je da se determinanta matrice ne mijenja od takve operacije (Posljedica 2.2), prema tome:

$$det(A \cdot B) = detB = 1 \cdot detB = detA \cdot detB.$$

(II) Razmotrimo slučaj kada je A singularna, tada je (Tvrđenje 2.6) $rankA < n$:

$$rank(A \cdot B) \leq rankA < n,$$

odakle zaključujemo da je matrica $A \cdot B$ singularna, tj. $det(A \cdot B) = 0 = 0 \cdot detB = detA \cdot detB$. Dakle, Teorema važi i za slučaj kada je A singularna matrica.
(III) Konačno, ako je matrica A regularna, ona se može predstaviti kao prozivod matrica elementarnih transformacija, tj. $A = E_1 \cdots E_s$. Tada na matrice $E_1, \ldots, E_s$ možemo primijeniti punkt (I) ovog dokaza:

$$detA \cdot B = det(E_1 \cdots E_s \cdot B) = detE_1 \cdot det(E_2 \cdots E_s B) = detE_1 \cdot detE_2 \cdot det(E_3 \cdots E_s \cdot B) =$$

$$= ... = detE_1 \cdot detE_2 \cdots detE_s \cdot detB = det(E_1 \cdot E_2 \cdots E_s) \cdot detB = detA \cdot detB.$$

Teorema 2.12. *Matrica A je invertibilna ako i samo ako je regularna i $detA^{-1} = \frac{1}{detA}$.*

Dokaz
Neka je A singularna, tj. $detA = 0$. Pretpostavimo da postoji matrica A^{-1}. Tada $A^{-1} \cdot A = I$, pa po Teoremi 2.11, imamo $det(A^{-1} \cdot A) = detA^{-1} \cdot detA = 1$. No, kako je $detA = 0$, to je posljednja jednakost nemoguća, što dokazuje da matrica A^{-1} ne postoji.
Neka je A regularna. Ponovo se pozovimo na Teoremu 2.10: $A = E_1 \cdots E_s$, gdje su $E_1, \ldots, E_s$ matrice elementarnih transformacija. Označimo $A^{-1} = E_s^{-1} \cdots E_1^{-1}$. Lako je provjeriti da $A^{-1} \cdot A = I$, dakle A je invertibilna. Dalje, imamo da je $det(A^{-1} \cdot A) = detA^{-1} \cdot detA = detI = 1$ $(detA \neq 0)$. Odavde je $detA^{-1} = \frac{1}{detA}$.
Konačno, kombinujući Tvrđenje 2.6 i Teoremu 2.12 izvodimo sljedeći zaključak o vezi između ranga matrice, njene determinante i invertibilnosti.:
Zaključak. Neka je $A \in P^{n \times n}$. Tada:
1. A je regularna $\Longleftrightarrow$ A je invertibilna $\Longleftrightarrow$ A je punog ranga, tj. $rankA = n$.
2. A je singularna $\Longleftrightarrow$ A nema obratnu matricu $\Longleftrightarrow$ $rankA < n$.

Sada se možemo vratiti metodima provjere da li je sistem vektora u $\mathbb{R}^n$ linearno nezavisan, da li je baza i slično. Kako smo se uvjerili u Glavi 1, zadaci ove vrste se svode na rješavanje sistema linearnih jednačina. Koristeći pojam ranga matrice i metod Gausa, ove zadatke sada možemo efikasnije rješavati.
Zadatak 1. U $\mathbb{R}^n$ je zadat sistem od $m < n$ vektora $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Potrebno je provjeriti da li su vektori $a_1, a_2, \ldots, a_m$ linearno nezavisni.

Od vektora $a_1, \ldots, a_m$ formirajmo matricu A oblika $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Ako je $rankA = m$ tada su vektori linearno nezavisni.
Ako je $rankA < m$ tada su vektori linearno zavisni.

Na primjer, ispitajmo linearnu zavisnost sistema $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -1 \\ 49 \end{pmatrix}$.

Formirajmo matricu čije su vrste koordinate zadatih vektora i na nju primijenimo algoritam Gausa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 8 & -1 & 1 & -7 \\ 0 & 7 & -1 & 49 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & -9 & 1 & -63 \\ 0 & 7 & -1 & 49 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & -9 & 1 & -63 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{9} & 0 \end{pmatrix}.$$

Rang ove matrice je 3, što znači da je ovaj sistem vektora linearno nezavisan.
Zadatak 2. U $\mathbb{R}^n$ zadato n vektora $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Provjeriti da li ovi vektori čine bazu.

Formirajmo matricu $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. A je kvadratna matrica dimenzije $n \times n$.

Provjeru možemo izvršiti na dva načina: računanjem determinante ili ranga matrice A.
Ako je $detA = 0$, tada je $rankA < n$, dakle navedeni vektori su linearno zavisni, pa ne mogu činiti bazu. Ako je $detA \neq 0$ tada vektori $a_1, a_2, \cdots, a_n$ čine bazu prostora $\mathbb{R}^n$.
Primijetimo da je u većini slučajeva brži način za provjeru korištenje metoda Gausa, budući da računanje determinante u opštem slučaju zahtijeva više operacija.
Zadatak 3. U $\mathbb{R}^n$ je zadato m vektora $a_1, a_2, \ldots, a_m$ pri čemu je $m > n$. Provjera linearne zavisnosti ovih vektora se vrši nalaženjem ranga matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, A \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Najveći mogući rang ove matrice je n, a kako je $m > n$, to su ovi vektori sigurno linearno zavisni. Ovo je u skladu sa činjenicom koja nam je već poznata da je sistem od $m > n$ vektora u n-dimenzionalnom prostoru uvijek linearno zavisan, pa ne mogu biti baza.

2.7.1 Determinanta transponovane matrice

Definicija 2.8. *Neka je* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$. *Tada se matrica* $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ *naziva transponovanom matricom k matrici* A.

Tvrđenje 2.7. *Ukoliko se matrice* A *i* B *mogu pomnožiti, to važi:* $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Teorema 2.13. *Neka je* A *matrica dimenzija* $n \times n$. *Tada je* $detA = detA^T$.

Dokaz
Ako je A singularna, tada je $rankA < n$, pa je $rankA^T < n$, pa zaključujemo $detA = 0 = detA^T$. Ako je A regularna matrica tada je možemo predstaviti kao $A = E_1 \cdots E_s$. Tada je $A^T = (E_1 \cdots E_s)^T = E_s^T \cdots E_1^T$. Po Teoremi 2.11 je:

$$detA = detE_1 \cdots detE_s, \quad detA^T = detE_s^T \cdots detE_1^T.$$

Za matrice elementarnih transformacija je lako provjeriti da važi $detE_1 = detE_1^T, \ldots, detE_s = detE_s^T$, pa zaključujemo da je $detA = detA^T$.

2.7.2 Algoritam nalaženja obratne matrice

Sada ćemo na konkretnom primjeru objasniti jedan od algoritama nalaženja obratne matrice. Primijetimo da navedeni algoritam nije jedini, postoji još nekoliko načina da se nađe obratna matrica.
Neka je zadata sljedeća matrica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & -9 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pored matrice A dopišimo jediničnu matricu i nad vrstama nove matrice vršimo elementarne transformacije, sve dok na mjestu gdje se nalazila matrica A ne dobijemo jediničnu matricu:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to IIIv + Iv \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$IIIv{+}IIv; \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to IIv{+}IIIv \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to Iv{+}IIv{\cdot}\frac{7}{9} \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{16}{9} & \frac{14}{9} & \frac{7}{9} \\ 0 & -9 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to IIv \cdot (-\frac{1}{9}) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{16}{9} & \frac{14}{9} & \frac{7}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Matrica koja je dobijena na desnoj strani je obratna k matrici A, dakle:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{16}{9} & \frac{14}{9} & \frac{7}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Primijetimo da je ovaj algoritam moguće dovesti do kraja, osim u slučaju kada je $rankA < n$. tj. kada je matrica A singularna. U tom slučaju nećemo dobiti jediničnu matricu na lijevoj strani (umjesto toga, pojaviće se vrsta u kojoj su svi elementi nule), pa nam algoritam neće dati rezultat. Naravno, to nam ukazuje da matrica A nema obratnu.

2.7.3 Teorema o obratnoj matrici

Teorema 2.14. *Neka je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regularna matrica. Tada je*

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T,$$

gdje je $A_{ij} = (-1)^{i+j} det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-11} & \dots & a_{i-1j-1} & a_{i-1j+1} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & \dots & a_{i+1j-1} & a_{i+1j+1} & \dots & a_{i+1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ *minor koji je nastao izbacivanjem i-te vrste i j-te kolone iz matrice A.*

Dokaz:

Neka je $B = \frac{1}{detA} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$, i $AB = C$. Tada je

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \frac{1}{detA} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \frac{1}{detA} det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j-11} & \dots & a_{j-1n} \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ a_{j+11} & \dots & a_{j+1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{detA} detX.$$

Za $i \neq j$, X je matrica koja ima dvije iste vrste (i-tu i j-tu), pa je $detX = 0$, i $c_{ij} = 0$. Za $i = j$ je $X = A$, pa je $c_{ii} = \frac{1}{detA} detA = 1$. Dakle, matrica C je jedinična matrica, i $AB = I$.

Analogno dobijamo da je $BA = I$, pa zaključujemo da je $B = A^{-1}$, odnosno $A^{-1} = \frac{1}{detA} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$.

2.8 Zamjena baza. Formule prelaska.

Neka je V vektorski prostor, $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ i $e' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ baze u V. Razložimo vektore iz baze e' po bazi e:

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} e_i, \ \forall j \in \overline{1,n},$$

ili

$$e'_j = \alpha_{1j} e_1 + \dots + \alpha_{nj} e_n, \ \forall j \in \overline{1,n}.$$

Formirajmo matrice $e' = (e'_1 \dots e'_n)$ i $e = (e_1 \dots e_n)$ i zapišimo prethodne jednakosti u matričnom obliku:

$$(e'_1 \, e'_2 \dots e'_n) = (e_1 \, e_2 \dots e_n) \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Definicija 2.9. *Matrica* $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ *se naziva matricom prelaska iz baze e u* e'.

Teorema 2.15. *Neka je* $\{e_1, \dots, e_n\}$ *baza u* V, A *regularna matrica dimenzija* $n \times n$. *Tada kolone matrice* $e' = eA$ *čine bazu u* V.

Dokaz
Pošto su $rank\, e = n$, $rank A = n$, to je po Teoremi 2.9 $rank\, e' = n$. To znači da su vektori $\{e_1', e_2', \dots, e_n'\}$ linearno nezavisni, pa oni čine bazu u V.
Primjer. Razmotrimo dvije baze e i e' u $\mathbb{R}^2$:

$$e = \{e_1 = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right), e_2 = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array}\right)\};$$

$$e' = \{e_1{}' = \left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array}\right), e_2{}' = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}\right)\}.$$

Razložimo vektore iz baze e' po bazi e:

$$e_1' = 1 \cdot e_1 - 1 \cdot e_2; e_2' = 1 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2.$$

Dakle, matrica prelaska iz baze e u e' je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Razmotrimo sada vektor x sa koordinatama $\left(\begin{array}{c} 3 \\ -1 \end{array}\right)$ u bazi e_1, e_2. Nađimo koordinate ovog vektora u bazi e_1', e_2':

$$\left(\begin{array}{c} 3 \\ -1 \end{array}\right) = \alpha_1 \left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array}\right) + \alpha_2 \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}\right) \Rightarrow \alpha_1 = \frac{7}{3}, \alpha_2 = \frac{2}{3}.$$

Dakle, koordinate vektora x u bazi e_1', e_2' su $\left(\begin{array}{c} 7/3 \\ 2/3 \end{array}\right)$.
Koristeći matricu prelaska, imamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c} 7/3 \\ 2/3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 3 \\ -1 \end{array}\right).$$

Kao što smo vidjeli na prethodnom primjeru, koordinate vektora u jednoj bazi se mogu dobiti iz koordinata u drugoj uz pomoć matrice prelaska.

Tvrđenje 2.8. *Označimo sa* $x(e)$ *i* $x(e')$ *koordinate vektora* x *u bazama* e *i* e'. *Neka je* A *matrica prelaska iz baze* e *u bazu* e'. *Tada* $x(e) = Ax(e')$.

Teorema 2.16. *Neka je A matrica prelaska iz baze e u e', $e' = eA$. Tada $e = e'A^{-1}$.*

Dokaz
Pošto je A matrica prelaska, to je ona regularna, dakle i invertibilna. Množeći jednakost $e' = eA$ sa A^{-1} s desne strane, dobijamo naše tvrđenje.

Definicija 2.10. *Govorićemo da su baze e i e', gdje je $e' = eA$, jednako orjentisane, ako $detA > 0$. Ako je $detA < 0$, tada kažemo da su baze suprotno orjentisane.*

2.9 Ekvivalentne matrice

Definicija 2.11. *Matrice A i B dimenzija $m \times n$ se nazivaju ekvivalentnima, ako postoje regularne matrice P dimenzije $m \times m$ i Q dimenzije $n \times n$ takve da:*

$$A = PBQ.$$

Teorema 2.17. *Neka je data matrica A dimenzija $m \times n$ i $rankA = r$. Tada postoje regularne matrice P, dimenzije $m \times m$ i Q, dimeznije $n \times n$ takve da:*

$$G = PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0_1 \\ 0_2 & 0_3 \end{pmatrix},$$

gdje je I_r jedinična matrica dimeznija $r \times r$, $0_1, 0_2, 0_3$ nula matrice odgovarajućih dimenzija, $r \times (n - r), (m - r) \times r, (m - r) \times (n - r)$, respektivno.

Dokaz
Pozovimo se na Tvrđenje 2.1 da elementarnim transformacijama vrsta i kolona matricu A svedemo na oblik G. Dakle: $G = E_s \cdots E_1 \cdot A \cdot G_1 \cdots G_q$, gdje su $E_1, \dots E_s, G_1, \dots, G_q$ matrice elementarnih transformacija. Budući da elementarne transformacije ne mijenjaju rang matrice, to će matrica G imati tačno $r = rankA$ jedinica na glavnoj dijagonali.
Sada označimo $P = E_s \cdots E_1$, a $Q = G_1 \cdots G_q$. Očigledno, P i Q su, kao proizvodi matrica elementarnih transformacija, regularne. Ovim je Teorema dokazana.

Teorema 2.18. *Matrice A i B dimeznija $m \times n$ su ekvivalentne ako i samo ako $rankA = rankB$.*

Dokaz
Neka su A i B ekvivalentne. Tada po definiciji postoje regularne matrice P i Q, takve da $A = PBQ$. Pošto množenje regularnim matricama ne mijenja rang (Teorema 2.9), to važi da je $rankA = rankB = r$.
Neka je sada $rankA = rankB = r$. Po prethodnoj Teoremi imamo:

$$G = P_1AQ_1, G = P_2BQ_2,$$

gdje su P_1, P_2, Q_1, Q_2 regularne matrice. Izjednačavajući, dobijamo:

$$P_1AQ_1 = P_2BQ_2 \Longrightarrow A = P_1^{-1}P_2BQ_2Q_1^{-1}.$$

Matrice $P = P_1^{-1}P_2$ i $Q = Q_2Q_1^{-1}$ su regularne. Sada iz definicije slijedi da su A i B ekvivalentne.

Glava 3

Sistemi linearnih jednačina

U prethodnim glavama smo vidjeli da se mnogi konkretni zadaci Linearne algebre svode na rješavanje sistema linearnih jednačina. Zato nam je potrebno da podrobno proučimo taj zadatak. U Glavi 2 smo objasnili metod Gausa kao jedan od metoda rješavanja sistema linearnih jednčina (to je u opštem slučaju i najefikasniji metod). U ovoj glavi ćemo se fokusirati na pitanja o postojanju i jedinstvenosti rješenja ovog zadatka, kao i strukturi skupa rješenja.
Neka je dat sistem od m jednačina i n nepoznatih sa koeficijentima a_{ij} iz polja P:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{3.1}$$

Matrica sistema je:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Vektor desne strane je $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, a vektor nepoznatih promjenljivih $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Sada (3.1) možemo zapisati u matričnom obliku kao:

$$Ax = b. \tag{3.3}$$

3.1 Homogeni sistem linearnih jednačina

Sistem jednačina se naziva homogenim, ako je desna strana nula vektor:

$$Ax = \mathbb{0},\ A \in P^{m\times n}$$

ili:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0; \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Najprije primijetimo da homogeni sistem uvijek ima makar jedno rješenje, to je trivijalno rješenje $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Teorema 3.1. *Neka je S skup rješenja sistema* (3.4). *Tada je S vektorski potprostor.*

Dokaz
1. Neka su $x, y \in S$. Tada važi $Ax = \mathbb{0}$, $Ay = \mathbb{0}$. Tada $A(x+y) = Ax + Ay = \mathbb{0} + \mathbb{0} = \mathbb{0}$, dakle $x + y \in S$.
2. Neka je $x \in S$ i $\alpha \in P$. Tada $Ax = \mathbb{0}$. Odavde $A(\alpha x) = \alpha Ax = \mathbb{0}$. Dakle, $\alpha x \in S$.
Iz 1. i 2. slijedi da je S vektorski potprostor.
Nakon što smo utvrdili da je skup rješenja homogenog sistema vektorski potprostor prirodno je zapitati se čemu je jednaka dimenzija tog potprostora.

Teorema 3.2.

$$dimS = n - rankA.$$

Dokaz

Označimo sa S_1 direktnu dopunu potprostora S u odnosnu na prostor $\mathbb{R}^n$. Imamo da je $S_1 = \{\mathbb{0}\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \neq \mathbb{0}\}$. Neka je $B_1 = \{e_1, ..., e_k\}$ baza potprostora S_1, $B = \{e_{k+1}, ..., e_n\}$ baza potprostora S, i $B_V = B_1 \cup B$ baza u $\mathbb{R}^n$. Iz $\lambda_1 Ae_1 + \lambda_2 Ae_2 + ... + \lambda_k Ae_k = \mathbb{0}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $\forall i$, imamo $A(\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_k e_k) = \mathbb{0}$, odnosno da $\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_k e_k \in S$. Pošto $e_i \in S_1$, $1 \leq i \leq k$,, to $\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_k e_k \in S_1$, pa $\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_k e_k \in S \cap S_1$. Po Teoremi 1.12 važi $S \cap S_1 = \{\mathbb{0}\}$, pa je $\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_k e_k = \mathbb{0}$. Sistem vektora $e_1, ..., e_k$ je linearno nezavisan, kao baza S_1, pa zaključujemo da je $\lambda_1 = ... = \lambda_k = 0$. Dakle, sistem vektora $Ae_1, Ae_2, ..., Ae_k$ je linearno nezavisan.
Dokažimo sada da je $dimS_1 = rankA$. Pretpostavimo suprotno, da je $dimS_1 \neq rankA$.
Posmatrajmo vektore $f_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1(\text{i-ta pozicija}) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $1 \leq i \leq n$. Vektor $Af_i \in \mathbb{R}^m$ predstavlja i-tu kolonu matrice A. Kako je $B_1 \cup B$ baza prostora V, to $f_i \in \mathcal{L}(e_1, ..., e_k, e_{k+1}, ..., e_n)$, pa $Af_i \in \mathcal{L}(Ae_1, ..., Ae_k, Ae_{k+1}, ..., Ae_n)$, odnosno a $Af_i \in \mathcal{L}(Ae_1, ..., Ae_k)$. Dakle, među kolonama $Af_1, ..., Af_n$ matrice A postoji sistem od najviše k linearno nezavisnih kolona, pa je $rankA \leq k = dimS_1$.
Pretpostavimo da je $rankA < dimS_1$. Tada matrica A ima $r < k$ linearno nezavisnih kolona, pa ostale kolone možemo izraziti kao linearnu kombinaciju tih r kolona. Posmatrajmo matricu $B = A \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & ... & e_k \end{pmatrix}$. Po Teoremi 2.8 imamo da je $rankB \leq rankA = r$, odnosno da B ima

najviše $r < k$ linearno nezavisnih kolona. Odavde zakljuǔjemo da je sistem vektora $Ae_1, ..., Ae_k$ linearno zavisan, što je u kontradikciji sa prvim dijelom našeg dokaza. Dakle, $rankA = dimS_1$. Na kraju, kako je $V = S \oplus S_1$, to je $dimV = dimS + dimS_1$, odnosno $dimS = n - rankA$.

Posljedica 3.1. *Neka je u sistemu* (3.4) $m < n$. *Tada sistem* (3.4) *ima netrivijalno rješenje.*

3.1.1 Homogeni sistem linearnih jednačina sa kvadratnom matricom

Razmotrimo sada homogeni sistem od n jednačina sa n nepoznatih:

$$Ax = \mathbb{0},\ A \in P^{n\times n} \tag{3.5}$$

Teorema 3.3. *Sistem* (3.5) *ima netrivijalno rješenje ako i samo ako je matrica* A *singularna.*

Dokaz
Ako je matrica A regularna, tada $rankA = n$ i iz prethodne Teoreme imamo da je $dimS = n - n = 0$. U ovom slučaju skup rješenja sadrži samo trivijalno rješenje $x_1 = \cdots = x_n = 0$.
Ako je matrica A singularna, tada je $rankA < n$, tj. $dimS = n - rankA > 0$. Ovo znači da skup rješenja S sadrži netrivijalno rješenje sistema (3.5).
Primjer. Posmatrajmo sistem od 2 jednačine i 2 nepoznate:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0; \\ 3x_1 - 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Matrica sistema je $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, čiji je rang 1.
Očigledno, ovaj sistem ima netrivijalna rješenja. Skup rješenja ovog sistema S potprostor dimenzije $n - rankA = 2 - 1 = 1$.
S druge strane, sistem

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0; \\ 3x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$

ima samo trivijalno rješenje jer je matrica sistema $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ regularna.

3.2 Nehomogeni sistem linearnih jednačina

Sistem jednačina se naziva nehomogenim, ako desna strana b u toj jednačini nije nula vektor:

$$Ax = b, \quad A \in P^{m\times n}, b \in P^m, x \in P^n. \tag{3.6}$$

Za razliku od homogenog, nehomogeni sistem ne mora uvijek imati rješenje.
Primjer. Sistem

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1; \\ 5x_1 - 5x_2 = 2 \end{cases}$$

nema rješenja.
Uz nehomogeni, razmotrimo i homogeni sistem jednačina sa istom matricom:

$$Ax = \mathbb{0}. \tag{3.7}$$

Teorema 3.4. *Neka je S skup rješenja sistema* (3.7) *i w neko rješenje sistema* (3.6)*. Tada skup rješenja K sistema* (3.6) *ima oblik:*

$$K = \{w\} + S = \{w + s | s \in S\}.$$

Dokaz
Neka je w neko rješenje sistema (3.6) i $z \in K$. Tada $A(z-w) = Az - Aw = b - b = \mathbb{0}$. Dakle, $z - w$ je rješenje sistema (3.7), tj. $z - w \in S$. Dakle, postoji $s \in S$, takav da $z - w = s$. Odavde, $z = w + s \in \{w\} + S$, pa važi $K \subseteq \{w\} + S$.
S druge strane, neka je $z \in \{w\} + S$, tada $z = w + s$ za neko $s \in S$. Ali, tada $Az = A(w+s) = Aw + As = b + \mathbb{0} = b$, pa $z \in K$. Odavde $\{w\} + S \subseteq K$. Znači, $K = \{w\} + S$.

Definicija 3.1. *Skup K se naziva opštim rješenjem sistema* (3.6)*.*

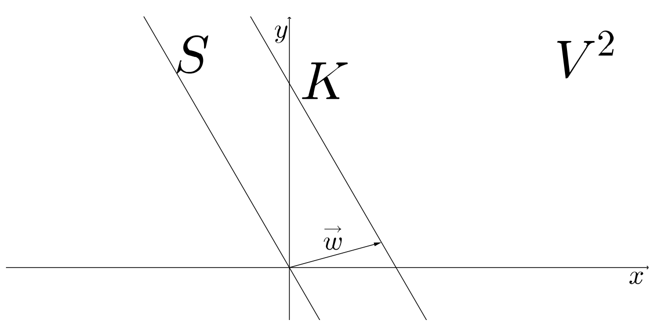
Primjer. Posmatrajmo dva sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 1; \\ -4x_1 + 10x_2 = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 0; \\ -4x_1 + 10x_2 = 0. \end{cases} .$$

Jedno od rješenja nehomogenog sistema je $w = \{x_1, x_2\} = \{3, 1\}$.
S druge strane, lako je naći da je opšte rješenje homogenog sistema oblika $S = \{\frac{5}{2}x_2, x_2\}$, gdje je $x_2 \in \mathbb{R}$ proizvoljno.
Odavde imamo da je opšte rješenje nehomogenog sistema oblika $K = \{w + s | s \in S\} = (3 + \frac{5}{2}x_2, 1 + x_2)$.

Definicija 3.2. *Skup oblika $K = \{w\} + S$, gdje je S potprostor se naziva linearna afina mnogostrukost.*

Primjer. Podsjetimo da su u prostoru V^2 potprostori sve prave koje prolaze kroz koordinatni početak. Ukoliko neku pravu koja prolazi kroz koordinatni početak pomjerimo za vektor $w \neq \mathbb{0}$, dobićemo pravu koja ne prolazi kroz koordinatni početak. Takve prave i jesu linearne afine mnogostrukosti u V^2 (Slika 3.1).



Slika 3.1: S je vektorski potprostor, a $K = \{w\} + S$ je afina mnogostrukost u V^2.

Dakle, opšte rješenje nehomogenog sistema linearnih jednačina ima strukturu linearne afine mnogostrukosti (u slučaju da nije prazan skup).
Sada razmotrimo pitanje kada sistem nehomogenih jednačina ima rješenje. Sa $(A|b)$ označavamo proširenu matricu sistema (3.6) dimenzija $m \times (n+1)$.

Teorema 3.5 (Kroneker-Kapeli). *Sistem linearnih jednačina* (3.6) *ima rješenje ako i samo ako* $rankA = rank(A|b)$.

Dokaz

Neka je sistem (3.6) saglasan. Tada postoje $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ takvi da je $\sum_{j=1}^{n} a_j^i \lambda_j = b_i$, odnosno $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j = b$. Iz ovoga se vidi da je kolona b linearna kombinacija kolona matrice A, pa je $rankA = rank(A|b)$.
Dokažimo tvrđenje i u drugom smjeru. Neka je $rankA = rank(A|b) = k$. Iz ovoga slijedi da postoji k linearno nezavisnih kolona u A, a time i u $(A|b)$. Bez smanjenja opštosti možemo pretpostaviti da se radi o prvih k kolona. Svaka kolona $(A|b)$ je linearna kombinacija baznih, pa je specijalno i $b = \lambda_1 a_1 + ... + \lambda_k a_k$, pri čemu je bar jedno $\lambda_i \neq 0$. Odavde je $b = \lambda_1 a_1 + ... + \lambda_k a_k + 0 \cdot a_{k+1} + ... + 0 \cdot a_n$, odnosno $(\lambda_1, ..., \lambda_k, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$ je rješenje sistema (3.6).
Primjer 1. Razmotrimo nehomogeni sistem linearnih jednačina:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 1; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -1; \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -7. \end{cases}$$

Odredimo rang matrice $(A|b)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & -1 & 3 & -7 \end{array}\right) \to Iv \cdot (-3) + IIv; Iv \cdot (-5) + IIIv \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -12 \end{array}\right)$$

$$IIv \cdot (-1) + IIIv \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right).$$

Sada vidimo da je $rankA = 2$ i $rank(A|b) = 3$, pa po Kroneker-Kapelijevoj teoremi sistem nema rješenja.
Primjer 2. Razmotrimo nehomogeni sistem linearnih jednačina:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 1; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -1; \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 1. \end{cases}$$

Odredimo rang matrice $(A|b)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) \to Iv \cdot (-3) + IIv; Iv \cdot (-5) + IIIv \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

$$IIv \cdot (-1) + IIIv \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Dakle, $rankA = 2$ i $rank(A|b) = 2$, sistem ima rješenje.

3.2.1 Nehomogeni sistem linearnih jednačina sa kvadratnom matricom

Posmatrajmo nehomogeni sistem linearnih jednačina od n jednačina sa n nepoznatih:

$$Ax = b, \text{ gdje je } A \in P^{n\times n}, b \in P^n, x \in P^n. \tag{3.8}$$

Teorema 3.6. *Neka je matrica A u sistemu* (3.9) *regularna. Tada sistem* (3.9) *ima jedinstveno rješenje $x = A^{-1}b$. Obratno, ako sistem* (3.9) *ima jedinstveno rješenje, tada je matrica A regularna.*

Dokaz
Neka je matrica A regularna. Uvrštavajući $x = A^{-1}b$ u (3.9), imamo $A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = b$. Dakle, $A^{-1}b$ je rješenje (3.9). Neka je w proizvoljno rješenje (3.9), tj. $Aw = b$. Množeći posljednju jednakost sa A^{-1} imamo $w = A^{-1}b$. Dakle, sistem ima jedinstveno rješenje $A^{-1}b$.
Obratno, neka sistem (3.9) ima jedinstveno rješenje w. S je skup rješenja homogenog sistema $Ax = \mathbb{0}$. Tada po Teoremi 3.4 imamo da je $\{w\} = \{w\} + S$. To je moguće jedino ako je $S = \{\mathbb{0}\}$. Dakle, sistem $Ax = \mathbb{0}$ ima samo trivijalno rješenje, pa je po Teoremi 3.3 matrica A regularna.

Razmotrimo sada jedan metod rješavanja sistema (3.9) sa regularnom matricom.

Teorema 3.7 (Kramerovo pravilo)**.** *Neka je matrica A u sistemu* (3.9) *regularna. Označimo sa $M_1, M_2, \ldots, M_n$ matrice dobijene iz A zamjenom prve, druge,..., $n-$te kolone kolonom b, redom. Tada je jedinstveno rješenje sistema zadato sa:*

$$x_1 = \frac{detM_1}{detA}, \ldots, x_n = \frac{detM_n}{detA}.$$

Dokaz
Ako je A regularna to sistem $Ax = b$ ima jedinstveno rješenje po Teoremi 3.8. Označimo sa $a_1, \ldots, a_n$ kolone matrice A, a sa X_k označimo matricu dobijenu iz jedinične matrice zamjenom k-te kolone vektorom nepoznatih $x = (x_1 \ldots x_n)$. Tada je lako provjeriti da

$$AX_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & x_1 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & x_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & x_k & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & x_n & \ldots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & \sum_{i=1}^n a_{ki}x_i & \ldots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & \sum_{i=1}^n a_{ni}x_i & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & b_k & \ldots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = M_k.$$

Sada, razlažući po k-toj koloni, nađimo determinantu matrice X_k:

$$detX_k = x_k detI_{n-1} = x_k.$$

U prethodnoj jednakosti smo sa I_{n-1} označili jediničnu matricu dimenzije $n-1$.
Primjenom Teoreme 2.11 dobijamo:

$$detM_k = det(AX_k) = detA \cdot detX_k = x_k detA.$$

Dakle, $x_k = \frac{detM_k}{detA}$ za $k = 1, 2, \dots, n$.

3.2.2 Nehomogeni sistem linearnih jednačina sa kvadratnom matricom

Posmatrajmo nehomogeni sistem linearnih jednačina od n jednačina sa n nepoznatih:

$$Ax = b, \text{ gdje je } A \in P^{n\times n}, b \in P^n, x \in P^n. \tag{3.9}$$

Teorema 3.8. *Neka je matrica A u sistemu* (3.9) *regularna. Tada sistem* (3.9) *ima jedinstveno rješenje $x = A^{-1}b$. Obratno, ako sistem* (3.9) *ima jedinstveno rješenje, tada je matrica A regularna.*

Dokaz
Neka je matrica A regularna. Uvrštavajući $x = A^{-1}b$ u (3.9), imamo $A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = b$. Dakle, $A^{-1}b$ je rješenje (3.9). Neka je w proizvoljno rješenje (3.9), tj. $Aw = b$. Množeći posljednju jednakost sa A^{-1} imamo $w = A^{-1}b$. Dakle, sistem ima jedinstveno rješenje $A^{-1}b$.
Obratno, neka sistem (3.9) ima jedinstveno rješenje w. S je skup rješenja homogenog sistema $Ax = \mathbb{0}$. Tada po Teoremi 3.4 imamo da je $\{w\} = \{w\} + S$. To je moguće jedino ako je $S = \{\mathbb{0}\}$. Dakle, sistem $Ax = \mathbb{0}$ ima samo trivijalno rješenje, pa je po Teoremi 3.3 matrica A regularna.

Razmotrimo sada jedan metod rješavanja sistema (3.9) sa regularnom matricom.

Teorema 3.9 (Kramerovo pravilo)**.** *Neka je matrica A u sistemu* (3.9) *regularna. Označimo sa $M_1, M_2, \dots, M_n$ matrice dobijene iz A zamjenom prve, druge,..., $n-$te kolone kolonom b, redom. Tada je jedinstveno rješenje sistema zadato sa:*

$$x_1 = \frac{detM_1}{detA}, \dots, x_n = \frac{detM_n}{detA}.$$

Dokaz
Ako je A regularna to sistem $Ax = b$ ima jedinstveno rješenje po Teoremi 3.8. Označimo sa $a_1, \dots, a_n$ kolone matrice A, a sa X_k označimo matricu dobijenu iz jedinične matrice zamjenom k-te kolone vektorom nepoznatih $x = (x_1 \dots x_n)$. Tada je lako provjeriti da

$$AX_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & x_1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & x_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_n & \dots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}x_i & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}x_i & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{ki}x_i & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \sum_{i=1}^{n} a_{ni}x_i & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & b_k & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = M_k.$$

Sada, razlažući po k-toj koloni, nađimo determinantu matrice X_k:

$$det X_k = x_k det I_{n-1} = x_k.$$

U prethodnoj jednakosti smo sa I_{n-1} označili jediničnu matricu dimenzije $n-1$.
Primjenom Teoreme 2.11 dobijamo:

$$det M_k = det(AX_k) = det A \cdot det X_k = x_k det A.$$

Dakle, $x_k = \frac{det M_k}{det A}$ za $k = 1, 2, \dots, n$.

Glava 4

Linearni operatori u konačnodimenionalnim vektorskim prostorima

U ovoj glavi ćemo se upoznati sa preslikavanjima jednih vektorskih prostora u druge. Za preslikavanje ćemo korisiti riječ *operator*. Linearna algebra se bavi linearnim operatorima.

4.1 Definicija i osnovna svojstva

Neka su V i W vektorski prostori nad poljem P.

Definicija 4.1. *Preslikavanje $\mathscr{A}$ iz vektorskog prostora V u vektorski prostor W se naziva linearnim operatorom, ako $\forall x, y \in V$ i $\forall \alpha \in P$ važi:*

$$1)\, \mathscr{A}\,(x+y) = \mathscr{A}\,x + \mathscr{A}\,y;$$

$$2)\, \mathscr{A}\,(\alpha x) = \alpha \mathscr{A}\,x.$$

Oznaka: Skup linearnih operatora iz prostora V u prostor W označavamo sa $\mathcal{L}(V \to W)$. Dakle, zapis $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ označava da je $\mathscr{A}$ linearan operator iz prostora V u prostor W.
Oznaka: Linearne operatore ćemo uvijek označavati velikim latinskim pisanim slovima, to jest $\mathscr{A}, \mathscr{B}$, i tako dalje.
Svojstva linearnih operatora
1) Linearni operator preslikava nula vektor u nula vektor: $\mathscr{A}\,\mathbb{0}_V = \mathbb{0}_W$.
Dokaz
$\mathscr{A}\,\mathbb{0}_V = \mathscr{A}\,(x-x) = \mathscr{A}\,x + \mathscr{A}\,(-x) = \mathscr{A}\,x + (-1)\,\mathscr{A}\,x = \mathscr{A}\,x - \mathscr{A}\,x = \mathbb{0}_W$.
2) Operator $\mathscr{A}$ iz V u W je linearan, ako i samo ako za svako $x, y \in V$ i svako $\alpha \in P$ važi $\mathscr{A}(\alpha x + y) = \alpha \mathscr{A}\,x + \mathscr{A}\,y$.
Primjeri linearnih operatora.
1. Razmotrimo linearni operator $\mathscr{A}$ iz prostora $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}^n$ zadat sa $\mathscr{A}\,x = 2x$ za svako $x \in \mathbb{R}^n$. Za svako $x, y \in \mathbb{R}^n$ važi:

$$\mathscr{A}\,(x+y) = 2\,(x+y) = 2x + 2y = \mathscr{A}\,x + \mathscr{A}\,y$$

$$\mathscr{A}(\alpha x) = 2(\alpha x) = \alpha(2x) = \alpha \mathscr{A} x.$$

Dakle, $\mathscr{A}$ je linearni operator, $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$.
2. Razmotrimo operator $\mathscr{P}$ iz prostora $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}^2$ zadat na sljedeći način:

$$\forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \ \mathscr{P}x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tada je:

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \text{ i } \mathscr{P}(x+y) = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathscr{P}x + \mathscr{P}y.$$

Dalje,

$$\alpha x = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix} \text{ i } \mathscr{P}(\alpha x) = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \mathscr{P} x.$$

Dakle, $\mathscr{P}$ je linearni operator iz $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}^2$. Operator $\mathscr{P}$ se naziva operatorom projekcije.
3. Na prostoru geometrijskih duži V^2 razmotrimo operator rotacije za ugao $\frac{\pi}{2}$ suprotno kazaljci na satu. Označimo ovaj operator sa $\mathscr{R}_{\pi/2}$. Možemo provjeriti da je ovo linearni operator, to jest $\mathscr{R}_{\pi/2} \in \mathcal{L}(V^2 \to V^2)$.
4. Na prostoru M_n svih polinoma stepena $\leq n$ razmotrimo operator diferenciranja $\mathscr{D}$. Iz svojstava operacije diferenciranja znamo da za svako $f, g \in M_n$ i svako $\alpha \in \mathbb{R}$ važi:

$$\mathscr{D}(f+g) = \mathscr{D}f + \mathscr{D}g, \ \mathscr{D}(\alpha f) = \alpha \mathscr{D} f.$$

Ovo znači da je $\mathscr{D}$ linearni operator, tj. $\mathscr{D} \in \mathcal{L}(M_n \to M_{n-1})$.

4.2 Jezgro i slika linearnog operatora

Neka su V i W vektorski prostori nad poljem P i $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$.

Definicija 4.2. *Skup* $Ker\mathscr{A} = \{u \in V : \mathscr{A}u = \mathbb{0}\} \subseteq V$ *se naziva jezgrom linearnog operatora.*

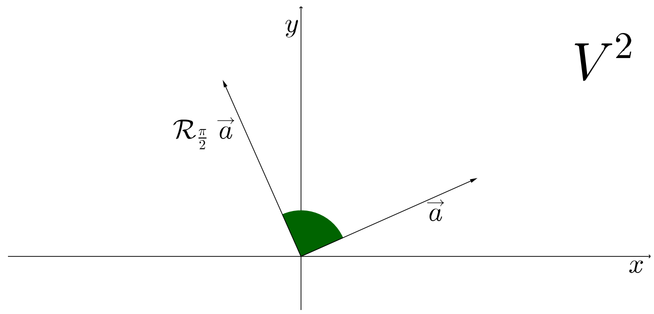
Definicija 4.3. *Skup vektora* $Im\mathscr{A} = \{w \in W$ *takvih da* $\exists u \in V : \mathscr{A}u = w\} \subseteq W$ *se naziva slikom linearnog operatora.*

Drugim riječima, jezgro operatora je skup svih vektora iz V koji se slikaju u nula vektor, dok je slika skup svih vektora iz W u koje se neki vektor iz V slika.
Primjeri
1. Za operator rotacije u ravni za ugao $\pi/2$ imamo:

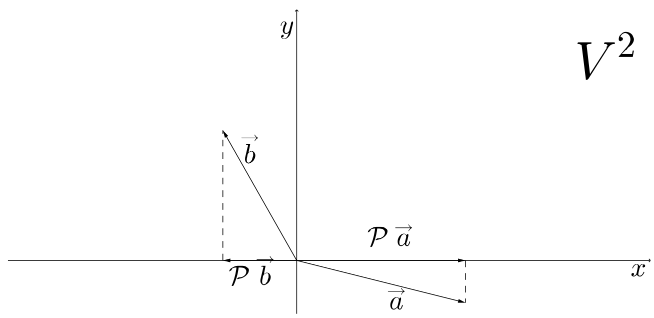
$$Ker\mathscr{R}_{\pi/2} = \{\mathbb{0}\}, \ Im\mathscr{R}_{\pi/2} = V^2.$$

2. Razmotrimo operator projekcije $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$ zadat sa

$$\mathscr{P}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Slika 4.1: Operator rotacije za ugao $\frac{\pi}{2}$



Slika 4.2: Operator projekcije na x- osu.

Lako je vidjeti da je

$$Ker\mathscr{P} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}\},\ Im\mathscr{P} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}\}.$$

3. Jezgro operatora $\mathscr{D} \in \mathcal{L}\,(M_n \to M_{n-1})$ čine svi polinomi konstante, dok su u njegovoj slici svi polinomi stepena $\leq n-1$. Dakle, $Ker\mathscr{D} = \{f = const\}, Im\mathscr{D} = M_{n-1}$.
Ukoliko jezgro operatora sadrži samo nula vektor (kao, na primjer, u slučaju operatora $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}}$), govorićemo da je jezgro trivijalno.

Teorema 4.1. *Jezgro i slika linearnog operatora su vektorski potprostori.*

Dokaz
1. Neka su $u, v \in Ker\mathscr{A}$, tj. $\mathscr{A}u = \mathbb{0}$, $\mathscr{A}v = \mathbb{0}$. Tada $\mathscr{A}(u+v) = \mathscr{A}u + \mathscr{A}v = \mathbb{0} + \mathbb{0} = \mathbb{0}$, pa je $u + v \in Ker\mathscr{A}$.
2. Neka je $u \in Ker\mathscr{A}, \alpha \in P$. Tada $\mathscr{A}u = \mathbb{0}$, pa je $\mathscr{A}(\alpha u) = \alpha\mathscr{A}u = \alpha\mathbb{0} = \mathbb{0}$. Dakle, $\alpha u \in Ker\mathscr{A}$.
Na osnovu 1. i 2. zaključujemo da je $Ker\mathscr{A}$ vektorski potprostor. Sada dokažimo isto i za sliku operatora.
3. Neka su $w, z \in Im\mathscr{A}$. Tada postoje $u, v \in V$ tako da $\mathscr{A}u = w, \mathscr{A}v = z$. Tada $\mathscr{A}u + \mathscr{A}v = w + z$, pa je zbog linearnosti operatora $\mathscr{A}(u+v) = w + z$. Dakle, vektor $u + v \in V$ se slika u $w + z$, pa je $w + z \in Im\mathscr{A}$.
4. Neka je $w \in Im\mathscr{A}, \alpha \in P$. Tada $\exists u \in V$, tako da je $\mathscr{A}u = w$. Odavde $\alpha\mathscr{A}u = \alpha w$. Zbog linearnosti, $\alpha\mathscr{A}u = \mathscr{A}(\alpha u) = \alpha w$, pa se vektor αu slika u αw, pa je $\alpha w \in Im\mathscr{A}$.
Iz 3. i 4. slijedi da je $Im\mathscr{A}$ je vektorski potprostor.

Teorema 4.2. *Neka je* $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$, $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ *baza u* V. *Tada je* $Im\mathscr{A} = Lin\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \ldots, \mathscr{A}u_n\}$.

Dokaz
Neka je $w \in Im\mathscr{A}$. Tada $\exists v \in V : w = \mathscr{A}v$. Razlažući v po bazi, imamo:

$$w = \mathscr{A}v = \mathscr{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) = \alpha_i \sum_{i=1}^{n} \mathscr{A}u_i.$$

Odavde $w \in Lin\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \ldots, \mathscr{A}u_n\}$. Pošto je w proizvoljan vektor iz $Im\mathscr{A}$, odavde zaključujemo da $Im\mathscr{A} \subseteq Lin\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \ldots, \mathscr{A}u_n\}$.
Uzmimo sada proizvoljno $v \in Lin\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \ldots, \mathscr{A}u_n\}$. Tada je

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathscr{A}u_i = \mathscr{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right),$$

tj. $v \in Im\mathscr{A}$. Zbog toga $Lin\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \ldots, \mathscr{A}u_n\} \subseteq Im\mathscr{A}$. Dakle, $Lin\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \ldots, \mathscr{A}u_n\} = Im\mathscr{A}$.

Primjeri.
1. Razmotrimo operator projekcije $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$. U $\mathbb{R}^2$ izaberimo bazu

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Tada

$$\mathscr{P}u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathscr{P}u_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Konačno,

$$Lin\{\mathscr{P}u_1, \mathscr{P}u_2\} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}\} = Im\mathscr{P}.$$

2. Za operator rotacije $\mathscr{R}_{\pi/2} \in \mathcal{L}(V^2 \to V^2)$ razmotrimo standardnu bazu u V^2: $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Primijetimo da

$$\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}}\vec{e}_1 = \vec{e}_2, \mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}}\vec{e}_2 = -\vec{e}_1.$$

No, $Lin\{\vec{e}_2, -\vec{e}_1\} = V^2 = Im\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}}$.
3. Razmotrimo standardnu bazu $1, t, t^2, \ldots, t^n$ u prostoru polinoma M_n. Vidimo da $\mathscr{D}1 = 0, \mathscr{D}t = 1, \mathscr{D}t^2 = 2t, \ldots, \mathscr{D}t^n = nt^{n-1}$. No, $Lin\{0, 1, 2t, \ldots, nt^{n-1}\} = M_{n-1} = Im\mathscr{D}$.

Teorema 4.3. *Neka su vektori* $u_1, \ldots, u_m \in V$ *linearno zavisni. Tada su vektori* $\mathscr{A}u_1, \ldots, \mathscr{A}u_m \in W$ *linearno zavisni.*

Dokaz
Neka su $u_1, u_2, \ldots, u_m \in V$ linearno zavisni, tj. neka $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_m u_m = \mathbb{0}$, pri čemu $\exists \alpha_i \neq 0$. Ako na posljednju jednakost djelujemo operatorom $\mathscr{A}$, imamo:

$$\mathscr{A}(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_m u_m) = \alpha_1 \mathscr{A}u_1 + \alpha_2 \mathscr{A}u_2 + \cdots + \alpha_m \mathscr{A}u_m = \mathbb{0},$$

pri čemu $\exists \alpha_i \neq 0$. Dakle, vektori $\mathscr{A}u_1, \ldots, \mathscr{A}u_m$ su linearno zavisni.

Definicija 4.4. *Rangom linearnog operatora $\mathscr{A}$ nazivamo dimenziju njegove slike: $rank\mathscr{A} = dimIm\mathscr{A}$.*

Definicija 4.5. *Defektom linearnog operatora $\mathscr{A}$ nazivamo dimenziju njegovog jezgra: $defect\mathscr{A} = dimKer\mathscr{A}$.*

Teorema 4.4. *Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$. Tada $rank\mathscr{A} \leq dimV$.*

Dokaz
Neka je $dimV = n$, a sistem vektora $u_1, \ldots, u_n$ baza u V. Po Teoremi 4.2 $Im\mathscr{A} = Lin\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \ldots, \mathscr{A}u_n\}$, pa je:

$$rank\mathscr{A} = dimIm\mathscr{A} = dimLin\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \ldots, \mathscr{A}u_n\} \leq n.$$

Ukoliko su vektori $\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \ldots, \mathscr{A}u_n\}$ linearno nezavisni, ovdje važi znak jednakosti, a ukoliko su linearno zavisni, tada je $rank\mathscr{A} < n$.

Teorema 4.5. *Neka je $u_1, u_2, \ldots, u_n$ baza u V, a $f_1, f_2, ...f_n$ proizvoljni vektori u W. Tada postoji tačno jedan linearan operator $\mathscr{A}$, takav da*

$$\mathscr{A}u_i = f_i,\ i = \overline{1,n}.$$

Dokaz
Neka je $v \in V$ proizvoljan vektor, $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$. Definišimo operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ na sljedeći način:

$$\mathscr{A}v = w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i.$$

Lako je neposredno provjeriti da je operator $\mathscr{A}$, koji je definisan na ovaj način, linearni operator.
Dalje, $\mathscr{A}u_i = \mathscr{A}(0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \cdots + 1 \cdot u_i + \cdots + 0 \cdot u_n) = 0 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 + \cdots + 1 \cdot f_i + \cdots + 0 \cdot f_n = f_i$, za svako $i = \overline{1,n}$.
Konačno, pretpostavimo da postoji linearni operator $\mathscr{B} \in \mathcal{L}(V \to W)$ takav da $\mathscr{B}u_i = f_i$, $i = \overline{1,n}$. Izaberimo proizvoljno $v \in V$, $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$. Tada,

$$\mathscr{B}v = \mathscr{B}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathscr{B}u_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = \mathscr{A}v.$$

Dakle, $\mathscr{A}v = \mathscr{B}v, \forall v \in V$, pa $\mathscr{A} \equiv \mathscr{B}$.

Teorema 4.6. $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$. *Tada:*

$$rank\mathscr{A} + defect\mathscr{A} = dimV.$$

Dokaz
Neka je $dimV = n, dimKer\mathscr{A} = k$. Izaberimo bazu u $Ker\mathscr{A} : u_1, u_2, \ldots, u_k$. Dopunimo ovaj sistem vektora do baze u V: $u_1, u_2, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_n$. Tada vektori $\mathscr{A}u_{k+1}, \ldots, \mathscr{A}u_n$ čine bazu u $Im\mathscr{A}$. Zaista,

$$Im\mathscr{A} = Lin\{\mathscr{A}u_1, \mathscr{A}u_2, \ldots, \mathscr{A}u_k, \mathscr{A}u_{k+1}, \ldots, \mathscr{A}u_n\} =$$

$$Lin\{\mathbb{0}, \ldots, \mathbb{0}, \mathscr{A}u_{k+1}, \ldots, \mathscr{A}u_n\} = Lin\{\mathscr{A}u_{k+1}, \ldots, \mathscr{A}u_n\},$$

pa vektori $\mathscr{A}u_{k+1}, \ldots, \mathscr{A}u_n$ generišu $Im\mathscr{A}$.
Ostaje da se pokaže da su $\mathscr{A}u_{k+1}, \ldots, \mathscr{A}u_n$ linearno nezavisni. Formirajmo njihovu linearnu kombinaciju i izjednačimo sa nula vektorom: $\alpha_{k+1}\mathscr{A}u_{k+1} + \cdots + \alpha_n\mathscr{A}u_n = \mathbb{0}$ ili

$$\mathscr{A}\left(\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i u_i\right) = \mathbb{0}.$$

Odavde: $\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i u_i \in Ker\mathscr{A}$, pa se ovaj vektor može razložiti po bazi u $Ker\mathscr{A}$:

$$\sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^{k} \beta_i u_i.$$

Odavde,

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i u_i - \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i u_i = \mathbb{0}.$$

Ali, vektori $u_i, i = \overline{1,n}$ čine bazu u V, pa su linearno nezavisni, odakle imamo da su svi koeficijenti $\alpha_i = 0, i = \overline{k+1,n}$, $\beta_i = 0, i = \overline{1,k}$. Dakle, vektori $\mathscr{A}u_{k+1}, \ldots, \mathscr{A}u_n$ su linearno nezavisni i čine bazu u $Im\mathscr{A}$. Na osnovu toga, $dimIm\mathscr{A} = n - k$, tj. $rank\,\mathscr{A} = n - k$.

4.3 Operacije na skupu linearnih operatora

1) Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W), \alpha \in P$. Tada operator $\mathscr{A}$ možemo pomnožiti skalarom α:

$$\mathscr{B} = \alpha\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W).$$

Dakle, $\mathscr{B}$ je linearni operator, koji svaki vektor $u \in V$ slika u vektor iz W na sljedeći način:

$$\mathscr{B}u = (\alpha\mathscr{A})u = \alpha(\mathscr{A}u).$$

2) Neka su $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \mathcal{L}(V \to W)$. Tada možemo definisati zbir operatora $\mathscr{A}$ i $\mathscr{B}$:

$$\mathscr{C} = \mathscr{A} + \mathscr{B} \in \mathcal{L}(V \to W).$$

Na svaki vektor $u \in V$ operator $\mathscr{C}$ djeluje na sljedeći način:

$$\mathscr{C}u = (\mathscr{A} + \mathscr{B})u = \mathscr{A}u + \mathscr{B}u \in W.$$

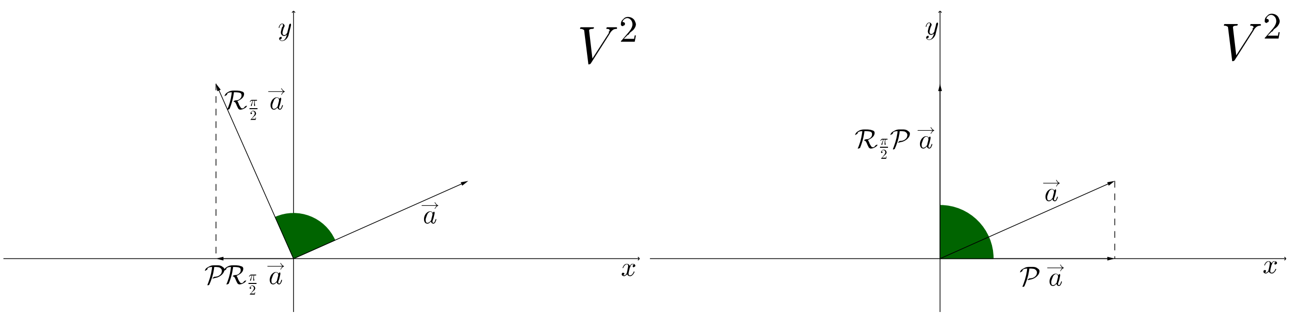
3) Interesantnija i značajnija od prethodnih je operacija množenja dva operatora. Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W), \mathscr{B} \in \mathcal{L}(W \to Z)$. Tada možemo definisati operator $\mathscr{B} \cdot \mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to Z)$ na sljedeći način:
za $\forall u \in V$ označimo $w = \mathscr{A}u \in W$ i $z = \mathscr{B}w \in Z$. Tada $(\mathscr{B}\mathscr{A})u = \mathscr{B}(\mathscr{A}u) = \mathscr{B}w = z \in Z$.
Operator $\mathscr{B}\mathscr{A}$ se naziva proizvodom (ili superpozicijom) operatora $\mathscr{B}$ i $\mathscr{A}$.

Primjer. Neka su $\mathscr{R}_{\pi/2}, \mathscr{P}_{x-osa} \in \mathcal{L}(V^2 \to V^2)$ operatori rotacije za ugao $\frac{\pi}{2}$ i projekcije na $x-$osu. Tada je moguće razmotriti dva proizvoda: $\mathscr{R}_{\pi/2}\mathscr{P}$ i $\mathscr{P}\mathscr{R}_{\pi/2}$.
Provjerite da su za prvi operator jezgro i slika sljedeći:

$$Ker\mathscr{R}_{\pi/2}\mathscr{P} = \{y - \text{osa}\}; \quad Im\mathscr{R}_{\pi/2}\mathscr{P} = \{y - \text{osa}\}.$$

Za drugi operator su jezgro i slika sljedeći:

$$Ker\mathscr{P}\mathscr{R}_{\pi/2} = \{x - \text{osa}\}; \quad Im\mathscr{P}\mathscr{R}_{\pi/2} = \{x - \text{osa}\}.$$



Slika 4.3: Dejstvo operatora $\mathscr{P}\mathscr{R}_{\pi/2}$ i $\mathscr{R}_{\pi/2}\mathscr{P}$.

4.3.1 Rang proizvoda linearnih operatora

Teorema 4.7. *Neka su* $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$, *a* $\mathscr{B} \in \mathcal{L}(W \to Z)$. *Tada:*
1. $rank(\mathscr{B}\mathscr{A}) \leq min(rank\mathscr{A}, rank\mathscr{B})$;
2. $rank\mathscr{A} = dimW \Rightarrow rank(\mathscr{B}\mathscr{A}) = rank\mathscr{B}$;
3. $rank\mathscr{B} = dimZ \Rightarrow rank(\mathscr{B}\mathscr{A}) = rank\mathscr{A}$.

Dokaz
Ovdje ćemo predstaviti jedan od mogućih dokaza ove teoreme, uskoro ćemo moći da dokažemo ovu teoremu koristeći teoreme o rangu matrica 2.8 i 2.9.
1. Znamo da je $Im\mathscr{A} \subseteq W$ i razmotrimo suženje $\mathscr{B}'$ operatora $\mathscr{B}$ na $Im\mathscr{A}$, tj. $\mathscr{B}' = \mathscr{B}|_{Im\mathscr{A}}$.
Primijetimo da $Im(\mathscr{B}|_{Im\mathscr{A}}) = Im(\mathscr{B}\mathscr{A})$, pa imamo

$$dimIm\mathscr{A} \geq dimIm\mathscr{B}' = dimIm(\mathscr{B}\mathscr{A}).$$

Dakle, $rank(\mathscr{B}\mathscr{A}) \leq rank\mathscr{A}$. Druga jednakost $rank(\mathscr{B}\mathscr{A}) \leq rank\mathscr{B}$ slijedi iz toga što $Im(\mathscr{B}\mathscr{A}) \subseteq Im\mathscr{B}$.
2. Neka $rank\mathscr{A} = dimW$. Tada $Im\mathscr{A} = W$ i $Im(\mathscr{B}\mathscr{A}) = Im\mathscr{B} \Rightarrow rank(\mathscr{B}\mathscr{A}) = rank\mathscr{B}$.
3. Neka $rank\mathscr{B} = dimW$. Tada, $W \cong Im\mathscr{B} \subseteq Z$. Ali, operator $\mathscr{B}$ ne mijenja dimenziju, tj. $dimW = dimIm\mathscr{B}$, pa je $Im\mathscr{A} \cong Im(\mathscr{B}\mathscr{A})$.
Odavde dobijamo $rank\mathscr{A} = rank(\mathscr{B}\mathscr{A})$.
Primjer.
$rank(\mathscr{R}_{\pi/2}\mathscr{P}) = 1$, dok je $rank\mathscr{P} = 1, \mathscr{R}_{\pi/2} = 2$.

4.4 Obratni operator

U ovoj sekciji ćemo razmatrati operatore koji slikaju prostor V u isti prostor, dakle $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$.

Definicija 4.6. *Operator $\mathscr{I} \in \mathcal{L}(V \to V)$ se naziva jediničnim operatorom (ili operatorom identiteta), ako za svako $x \in V$ važi $\mathscr{I}x = x$.*

Definicija 4.7. *Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$. Ako postoji linearni operator $\mathscr{Q} \in \mathcal{L}(V \to V)$, takav da $\mathscr{Q}\mathscr{A} = \mathscr{A}\mathscr{Q} = \mathscr{I}$, tada se $\mathscr{Q}$ naziva obratnim operatorom operatoru $\mathscr{A}$.*

Oznaka: $\mathscr{Q} = \mathscr{A}^{-1}$
Ukoliko operator $\mathscr{A}^{-1}$ postoji, govorićemo da je $\mathscr{A}$ invertibilan operator.
Primjeri.
1.) Za operator $\mathscr{R}_{\pi/2} \in \mathcal{L}(V^2 \to V^2)$ rotacije geometrijske ravni za ugao $\frac{\pi}{2}$ je lako vidjeti da je $\mathscr{R}^{-1}_{\pi/2} = \mathscr{R}_{-\pi/2}$.
2.) Operator $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(V^2 \to V^2)$ projekcije vektora na x-osu nema obratni operator, jer nije uzajamno jednoznačan.
3.) Operator $\mathscr{D} \in \mathcal{L}(M_n \to M_n)$ takođe nije invertibilan.

Teorema 4.8. *Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$. Sljedeći uslovi su ekvivalentni:*
1. $\mathscr{A}$ je invertibilan;
2. $\mathscr{A}$ je uzajamno jednoznačan;
3. $Ker\mathscr{A} = \{\mathbb{0}\}$;
4. $Im\mathscr{A} = V$, tj. $rank\mathscr{A} = dimV$.

Dokaz
Ne početku dokažimo implikaciju 1. $\Rightarrow$ 2. Neka je $\mathscr{A}$ invertibilan. Tada $\exists\mathscr{A}^{-1} : \mathscr{A}^{-1}\mathscr{A} = \mathscr{I}$. Neka je $\mathscr{A}x_1 = \mathscr{A}x_2$.
Pomnožimo posljednju jednakost sa $\mathscr{A}^{-1}$:

$$\mathscr{A}^{-1}\mathscr{A}x_1 = \mathscr{A}^{-1}\mathscr{A}x_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Ovo znači da je operator uzajamno jednoznačan.
2. $\Rightarrow$ 4.: $\mathscr{A}$ je uzajamno jednoznačan. Tada svaki vektor $v \in V$ ima jedinstvenu obratnu sliku, pa $Im\mathscr{A} = V$.
4. $\Rightarrow$ 1.: Neka je $Im\mathscr{A} = V$. Tada, $\forall v \in V \exists u : \mathscr{A}u = v$. Definišimo operator $\mathscr{A}^{-1}$ po sljedećem pravilu: $\mathscr{A}^{-1}v = u$. Tada:
a) $\mathscr{A}^{-1}$ je obratan za $\mathscr{A}$, jer $\mathscr{A}^{-1}\mathscr{A}u = \mathscr{A}^{-1}v = u, \forall u \in V$, pa $\mathscr{A}^{-1}\mathscr{A} = \mathscr{I}$.
b) $\mathscr{A}^{-1}$ je linearan operator.
Iz a) i b) slijedi da je $\mathscr{A}$ invertibilan.
2. $\Rightarrow$ 3.: Ako je $\mathscr{A}$ uzajamno jednoznačan, tada svaki vektor ima samo jednu obratnu sliku, pa i nula vektor $\mathbb{0} \in V$. Ovo znači da se samo nula vektor slika u nula vektor, pa je $Ker\mathscr{A} = \{\mathbb{0}\}$.
3. $\Rightarrow$ 2.: Neka je $Ker\mathscr{A} = \{\mathbb{0}\}$. Pretpostavimo da je $\mathscr{A}u = \mathscr{A}v$. Tada, $\mathscr{A}u - \mathscr{A}v = \mathbb{0}$, pa je $\mathscr{A}(u - v) = \mathbb{0}$. Dakle, $u - v \in Ker\mathscr{A}$, pa je $u - v = \mathbb{0} \Longrightarrow u = v$.

Definicija 4.8. *Operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ ćemo nazvati singularnim ako je $Ker\mathscr{A} \neq \{\mathbb{0}\}$. Ako je $Ker\mathscr{A} = \{\mathbb{0}\}$ operator nazivamo regularnim.*

Iz navedenog konačno možemo izvesti sljedeći:
Zaključak.
Operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ je singularan $\iff$ $\mathscr{A}$ nije invertibilan $\iff$ $\mathscr{A}$ nije uzajamno jednoznačan $\iff$ $rank\mathscr{A} < dimV$.

4.5 Matrica linearnog operatora

Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W), e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ baza u V, a $f = \{f_1, \ldots, f_m\}$ baza u W. Vektori $\mathscr{A}e_j$ leže u prostoru W, pa ih možemo predstaviti preko vektora baze tog prostora:

$$\mathscr{A}e_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} f_i, \, \forall j \in \overline{1, n}.$$

Definicija 4.9. *Matricom operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ u bazama e i f naziva se matrica*

$$A(e,f) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Vidimo da su dimenzije matrice linearnog operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ jednake $m \times n = dimW \times dimV$.
Primjer 1
Neka je dat operator projekcije $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$. Primijetimo da će dimenzije matrice ovog operatora biti 2×2.
Izaberimo bazu u prostoru $\mathbb{R}^2$. Neka je $e = \{e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}\}$. Kako bismo našli matricu operatora u ovoj bazi, potrebno je naći slike svih vektora iz baze:

$$\mathscr{P}e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathscr{P}e_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dalje, potrebno je dobijene vektore razložiti po izabranoj bazi:

$$\mathscr{P}e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_{21} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Odavde:

$$\alpha_{11} - 4\alpha_{21} = 1, \, \alpha_{11} + 2\alpha_{21} = 0 \Rightarrow \alpha_{11} = \frac{1}{3}, \, \alpha_{21} = -\frac{1}{6}.$$

Dobijene koeficijente α_{11}, α_{21} možemo upisati u prvu kolonu matrice. Nastavimo sa slikom narednog vektora u bazi:

$$\mathscr{P}e_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_{22} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Tada:

$$\alpha_{12} - 4\alpha_{22} = -4,\ \alpha_{12} + 2\alpha_{22} = 0 \Rightarrow \alpha_{12} = -\frac{4}{3},\ \alpha_{22} = \frac{2}{3}.$$

Sada možemo zapisati matricu operatora $\mathscr{P}$ u bazi e:

$$P(e) = \begin{pmatrix} 1/3 & -4/3 \\ -1/6 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Sada nađimo matricu istog operatora u standardnoj bazi $e' = \{e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ Tada važi: $\mathscr{P}e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e'_1 = 1 \cdot e'_1 + 0 \cdot e'_2$, $\mathscr{P}e'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot e'_1 + 0 \cdot e'_2$. Matrica operatora u bazi e' je:

$$P(e') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Primjer 2

Nađimo matricu operatora rotacije $\mathscr{R}_{\pi/2} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$ u standardnoj bazi $e' = \{e'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ u $\mathbb{R}^2$.

Lako je vidjeti da $\mathscr{R}_{\pi/2}e'_1 = e'_2 = 0 \cdot e'_1 + 1 \cdot e'_2$, $\mathscr{R}_{\pi/2}e'_2 = -e'_1 = -1 \cdot e'_1 + 0 \cdot e'_2$.

Dakle:

$$R_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Primjer 3

Razmotrimo operator diferenciranja $\mathscr{D} \in \mathcal{L}(M_n \to M_n)$, i izaberimo u prostoru M_n bazu $f = \{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$. Tada

$$\begin{aligned}
&\mathscr{D}1 = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + \cdots + 0 \cdot t^n;\\
&\mathscr{D}t = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + \cdots + 0 \cdot t^n;\\
&\mathscr{D}t^2 = 2t = 0 \cdot 1 + 2 \cdot t + 0 \cdot t^2 + \cdots + 0 \cdot t^n;\\
&\mathscr{D}t^3 = 3t^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + +3 \cdot t^2 + \cdots + 0 \cdot t^n\\
&\vdots\\
&\mathscr{D}t^n = nt^{n-1} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + \cdots + n \cdot t^{n-1} + 0 \cdot t^n.
\end{aligned}$$

Uvrštavajući dobijene koeficijente razlaganja redom u kolone, dobićemo matricu operatora $\mathscr{D}$ u bazi f:

$$D(f) = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\
0 & 0 & 2 & 0 & \ldots & 0\\
0 & 0 & 0 & 3 & \ldots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & n\\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0
\end{pmatrix}.$$

Matrica $D(f)$ je dimenzija $(n+1) \times (n+1)$.

Sada napišimo matricu istog operatora u drugoj bazi $g = \{1, t, \frac{t^2}{2!}, \frac{t^3}{3!} \ldots \frac{t^n}{n!}\}$. Nađimo slike vektora baze i njihova razlaganja:

$$
\begin{aligned}
&\mathscr{D}1 = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + \cdots + 0 \cdot \frac{t^n}{n!};\\
&\mathscr{D}t = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + \cdots + 0 \cdot \frac{t^n}{n!};\\
&\mathscr{D}\frac{t^2}{2!} = t = 0 \cdot 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot \frac{t^2}{2!} + \cdots + 0 \cdot \frac{t^n}{n!};\\
&\mathscr{D}\frac{t^3}{3!} = \frac{t^2}{2} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 1 \cdot \frac{t^2}{2!} + \cdots + 0 \cdot \frac{t^n}{n!};\\
&\vdots\\
&\mathscr{D}\frac{t^n}{n!} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + \cdots + 1 \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + 0 \cdot \frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}
$$

Uvrstimo u kolone i dobijemo matricu:

$$
D(g) = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0
\end{pmatrix}.
$$

Napomena
Sada smo našli način da linearne operatore zapišemo uz pomoć matrica. Ovo je važno za nas, budući da matrice možemo jednostavno zapisati i da imamo prilično znanja o njima. Ipak, vidimo da situacija nije tako jednostavna, budući da matrica operatora zavisi od izbora baze. Kako smo vidjeli na primjeru operatora projekcije, u različitim bazama njegove matrice izgledaju potpuno različito.
Oznaka: Podsjetimo da smo se dogovorili da operatore označavamo velikim latinskim pisanim slovima. Njihove matrice ćemo označavati odgovarajućim velikim štampanim slovima. Uz to, u zagradama ćemo pisati oznaku za bazu, kako bi bilo jasno da je matrica upravo u toj bazi. Recimo, ako sa $\mathscr{D}$ označimo operator diferenciranja, sa $D(f)$ ćemo označavati matricu tog operatora u bazi f. Naglasimo da ćemo oznaku za bazu u zagradi izostavljati u slučajevima kada je jasno u kojoj bazi radimo.
Nakon što smo zaključili da matrica operatora zavisi od izbora baze, vidjećemo da matrica operatora ipak zadržava neke osobine tog operatora, bez obzira na izbor baze. Recimo, mogli smo primijetiti da u gore navedenim primjerima matrice istog operatora uvijek imaju isti rang i da je taj rang jednak rangu operatora. Obije matrice operatora projekcije imaju rang 1, matrica operatora rotacije je ranga 2, dok su obije matrice operatora diferenciranja ranga n. To nas navodi da formulišemo sljedeću:

Teorema 4.9. *Rang matrice $A(e, f)$ ne zavisi od izbora baza e i f i jednak je rangu operatora $\mathscr{A}$.*

Dokaz
Saglasno definiciji $rank\mathscr{A} = dimIm\mathscr{A}$, a po Teoremi 4.2 $Im\mathscr{A} = Lin\{\mathscr{A}e_1, \mathscr{A}e_2, \ldots, \mathscr{A}e_n\}$, pa je $rank\mathscr{A} = dimLin\{\mathscr{A}e_1, \mathscr{A}e_2, \ldots, \mathscr{A}e_n\}$.
Međutim, po definiciji matrice linearnog operatora $A(e,f) = (\mathscr{A}e_1(f)\mathscr{A}e_2(f), \ldots, \mathscr{A}e_n(f))$, gdje su sa $\mathscr{A}e_i(f)$ označene koordinate vektora $\mathscr{A}e_i$ u bazi f.
$rankA(e,f)$ je broj linearno nezavisnih kolona, tj. broj linearno nezavisnih vektora među vektorima $\{\mathscr{A}e_1, \mathscr{A}e_2, \ldots, \mathscr{A}e_n\}$.
Odavde, $rankA(e,f) = dimLin\{\mathscr{A}e_1, \ldots, \mathscr{A}e_n\} = rank\mathscr{A}$.

4.5.1 Vektorski prostor linearnih operatora

U Sekciji 4.3 smo uveli operacije sabiranja linearnih operatora i množenja operatora skalarom iz polja P. Sada primijetimo da smo na ovaj način uveli strukturu vektorskog prostora na skupu $\mathcal{L}(V \to W)$.

Teorema 4.10. *Skup svih linearnih operatora $\mathcal{L}(V \to W)$ sa operacijama sabiranja i množenja operatora brojem iz P čini vektorski prostor nad poljem P dimenzija $dimW \cdot dimV$.*

Za dokaz je potrebno prosto provjeriti aksiome vektorskog prostora.
Kada se radi o dimenziji ovog prostora, potrebno je fiksirati baze e u V i f u W. Tada svakom operatoru $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ odgovara tačno jedna matrica $A(e,f)$ dimenzija $dimW \times dimV$. Tada operacije sabiranja operatora i množenja operatora brojem prelaze u operacije sabiranja matrica i množenja matrica brojem. Dakle, skup svih linearnih operatora $\mathcal{L}(V \to W)$ sa ovim operacijama je vektorski prostor izomorfan prostoru matrica dimenzija $dimW \times dimV$.
Odavde slijedi da je skup $\mathcal{L}(V \to W)$ vektorski prostor dimenzije $dimW \cdot dimV$.

4.6 Transformacija matrice linearnog operatora pri prelasku na nove baze

Pošto smo se u prethodnoj sekciji ubijedili da matrica operatora zavisi od izbora baze, vidjeli smo da ipak ne može bilo koja matrica biti matricom datog operatora. Matrice zadržavaju neka svojstva operatora, nezavisno od baze, recimo rang. U ovoj sekciji ćemo se baviti pitanjem kako se mijenja matrica operatora prilikom zamjene baze. Počnimo od slučaja kada se osnovni prostor i prostor slika razlikuju, tj. kada je $dimV \neq dimW$.
Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$, e i e' baze u V, f i f' baze u W, a $A(e,f)$ i $A(e',f')$ su matrice operatora $\mathscr{A}$ u ukazanim bazama.

Teorema 4.11. *Neka je $S \in P^{n\times n}$ matrica prelaska iz e u e' i $Q \in P^{m\times m}$ matrica prelaska iz baze f u f'. Tada:*
$$A(e,f)S = QA(e',f').$$

Dokaz
Neka je $y = \mathscr{A}x$, $x \in V$, $y \in W$. Fiksirajmo baze e u V i f u W i označimo sa $x(e)$ i $y(f)$ koordinate vektora x i y u bazama e i f. Tada je
$$y(f) = A(e,f)x(e), \qquad y(f') = A(e',f')x(e'). \tag{4.1}$$

Pošto su S i Q matrice prelaska, to (po Tvrđenju 2.8) važi:

$$x(e) = Sx(e'), \quad y(f) = Qy(f'). \tag{4.2}$$

Kombinujući (4.1) i (4.2), dobijamo:

$$Qy(f') = A(e, f)Sx(e').$$

Ako u posljednju jednakost uvrstimo drugu jednakost iz (4.1), dobijamo:

$$QA(e', f')x(e') = A(e, f)Sx(e').$$

Pošto je vektor x proizvoljan, to iz posljednje jednakosti imamo

$$QA(e', f') = A(e, f)S.$$

Zaključak. Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$, gdje je $V \neq W$. Tada su sve matrice operatora $\mathscr{A}$ međusobno ekvivalentne i njihov rang je jednak rangu operatora $\mathscr{A}$ (podsjetimo na Teoremu 2.18 prema kojoj ekvivalentne matrice imaju jednak rang).

Teorema 4.12. *Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ i $\operatorname{rank}\mathscr{A} = r$. Tada postoje baze e u V i f u W, takve da matrica $A(e, f) = G = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.*

Dokaz
Dokaz ove teoreme je jednostavan, ako se pozovemo na Teoremu 2.17. Neka je $A(e', f')$ matrica operatora $\mathscr{A}$ u bazama e' i f'. Po Teoremi 2.17 postoje regularne matrice P i Q takve da je:

$$A(e', f') = P \cdot G \cdot Q. \tag{4.3}$$

Izaberimo nove baze na sljedeći način: $e = e'Q^{-1}$ i $f = f'P$. Tada po Teoremi 4.11:

$$A(e, f)Q = P^{-1}A(e', f').$$

Uvrstimo posljednju jednakost u (4.3):

$$A(e, f) = P^{-1}A(e', f')Q^{-1} = P^{-1}PGQQ^{-1} = G.$$

Sada razmotrimo slučaj kada operator djeluje iz V u V. U tom slučaju imamo samo jedan prostor, pa nemamo slobodu izbora dvije baze, već samo jedne.

Teorema 4.13. *Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$, e baza u V, a $e' = e \cdot S$ baza u V. Tada:*

$$A(e') = S^{-1}A(e)S.$$

Dokaz
Neka je x proizvoljan vektor iz V, $y = \mathscr{A}x$. Neka su e i $e' = eS$ dvije baze u V. Tada:

$$y(e) = A(e)x(e), \quad y(e') = A(e')x(e'),$$

a takođe

$$x(e) = Sx(e'), \quad y(e) = Sy(e').$$

Kombinujući prethodne jednakosti dobijamo:

$$S^{-1}A(e)Sx(e') = A(e')x(e').$$

Pošto je $x \in V$ proizvoljan, to iz posljednje jednakosti slijedi tvrđenje teoreme.

Definicija 4.10. *Matrice P i Q dimenzija $n \times n$ se nazivaju sličnima, ako postoji regularna matrica $S \in P^{n\times n}$, takva da $P = S^{-1}QS$.*

Zaključak.
Sve matrice operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ u različitim bazama su međusobno slične.
Svojstva sličnih matrica.
1. Za slične matrice A i A' važi $detA' = detA$.
Dokaz

$$detA' = det(S^{-1}AS) = detA.$$

2. Za svako $t \in P$ važi $det(A - tI) = det(A' - tI)$, gdje je I jedinična matrica.
Dokaz
Iz jednakosti $A' = S^{-1}AS$ slijedi da za svako $t \in P$ $A' - tI = S^{-1}(A - tI)S$.

Definicija 4.11. *Determinantom linearnog operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ se naziva $detA(e)$.*

Definicija je korektna, jer, saglasno svojstvima sličnih matrica, determinanta matrice operatora ne zavisi od izbora baze. Dakle, nije važno koja konkretno baza e je izabrana u prethodnoj definiciji.
Oznaka: $det\mathscr{A}$ označava determinantu operatora $\mathscr{A}$
Konačno, zaključujemo da je, i pored određenih nijansi, situacija sa operatorima iz V u V analogna situaciji sa kvadratnim matricama. Između ostalog, uz Zaključak na kraju Sekcije 4.4 možemo dodati i sljedeće:

Tvrđenje 4.1. *Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$. Tada je $det\mathscr{A} = 0$ ako i samo ako je operator $\mathscr{A}$ singularan.*

Primjeri.
1. Vratimo se na primjer operatora $\mathscr{P}$ iz prethodne sekcije. Jasno, ovaj operator je singularan. Njegove matrice u različitim bazama su međusobno slične. Provjeriti da za matrice

$$P(e) = \begin{pmatrix} 1/3 & -4/3 \\ -1/6 & 2/3 \end{pmatrix}, \quad P(e') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

važi da je $P(e) = S^{-1}P(e')S$, gdje je S matrica prelaska iz baze e u e'.
2. Operator $\mathscr{R}_{\pi/2} \in (V^2 \to V^2)$ je regularan, $det\mathscr{R}_{\pi/2} = 1$.
3. Operator $\mathscr{D} \in (M_n \to M_n)$ je singularan.

Glava 5

Spektralna teorija linearnih operatora u konačnodimenzionalnom prostoru

5.1 Invarijantni potprostori

U čitavoj ovoj glavi ćemo razmatrati operatore koji djeluju iz V u V.

Definicija 5.1. *Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$. Potprostor $U \subseteq V$ se naziva invarijantnim potprostorom operatora $\mathscr{A}$, ako $\forall u \in U : \mathscr{A}u \in U$, tj. $\mathscr{A}(U) \subseteq U$.*

Primjeri
1. $\{\mathbb{0}\}$ i V su invarijantni potrostori svakog operatora. Za ova dva invarijantna potprostora kažemo da su trivijalni.
2. $Ker\mathscr{A}$ je invarijantan potprostor, jer $\forall u \in Ker\mathscr{A} : \mathscr{A}u = \mathbb{0} \in Ker\mathscr{A}$.
3. $Im\mathscr{A}$ je invarijantan potprostor, jer $\forall u \in Im\mathscr{A}$, $\mathscr{A}u \in Im\mathscr{A}$.
Primjeri
1. Provjerite da operator rotacije u geometrijskoj ravni $\mathscr{R}_{\pi/2} \in \mathcal{L}(V^2 \to V^2)$ ima samo dva trivijalna invarijantna potprostora.
2. Operator projekcije na x-osu $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(V^2 \to V^2)$ ima 4 invarijantna potprostora:
- dva trivijalna invarijantna potprostora: $\{\mathbb{0}\}, V^2$;
- x-osa $= Im\mathscr{P}$;
- y-osa $= Ker\mathscr{P}$.
3. Operator rotacije u geometrijskoj ravni za ugao π $\mathscr{R}_\pi \in \mathcal{L}(V^2 \to V^2)$. Za ovaj operator svi potprostori su invarijantni.
4. Operator diferenciranja $\mathscr{D} \in \mathcal{L}(M_n \to M_n)$. Za svako $k = 0, 1, \dots, n$, $M_k \subseteq M_n$ su invarijantni potprostori ovog operatora.
Primjedba.
Neka operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ ima netrivijalni invarijantni potprostor $U \subseteq V$.
Izaberimo bazu $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ u U. Dopunimo je do baze u V : $\{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$. Razmotrimo slike vektora $u_1, \dots, u_n$. Pošto je $u_1 \in U$, a U invarijantni potprostor operatora $\mathscr{A}$, to $\mathscr{A}u_1 \in U$. Tada se ovaj vektor razlaže po bazi $\{u_1, \dots, u_k\}$:

$$\mathscr{A}u_1 = \alpha_{11}u_1 + \dots + \alpha_{k1}u_k + 0 \cdot u_{k+1} + \dots + 0 \cdot u_n.$$

Isto tako, vektori $\mathscr{A}u_2, \ldots, \mathscr{A}u_k$ leže u U. Dakle,

$$\begin{cases} \mathscr{A}u_2 = \alpha_{12}u_1 + \cdots + \alpha_{k2}u_k + 0 \cdot u_{k+1} + \cdots + 0 \cdot u_n \\ \vdots \\ \mathscr{A}u_k = \alpha_{1k}u_1 + \cdots + \alpha_{kk}u_k + 0 \cdot u_{k+1} + \cdots + 0 \cdot u_n \end{cases} \tag{5.1}$$

Za vektore $u_{k+1}, \ldots, u_n$ ne možemo tvrditi isto, jer oni ne leže u invarijantnom potprostoru U. Konačno, matrica operatora $\mathscr{A}$ u bazi e je:

$$A(u) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1k} & \alpha_{1,k+1} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2k} & \alpha_{2,k+1} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \ldots & \alpha_{kk} & \alpha_{k,k+1} & \ldots & \alpha_{kn} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{k+1,k+1} & \ldots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{n,k+1} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Zaključujemo da ukoliko znamo jedan netrivijalni invarijantni potprostor U operatora, to možemo izabrati bazu vektorskog prostora na način da matrica operatora u toj bazi ima jednostavniji oblik. Dobijena matrica $A(u)$ sadrži blok dimenzija $(n-k) \times (n-k)$ koji sastoji od nula. (Ovdje je $n = dimV, k = dimU$.)
Ukoliko čitav prostor V razbijemo u direktnu sumu invarijantnih potprostora $U_1, \ldots, U_s$, to možemo izabrati bazu V tako da matrica ima još jednostavniji oblik. Zaista, neka je $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_s$. Izaberimo baze u prostorima $U_1, \ldots, U_s$ redom:
- neka je $u_1, \ldots u_{p_1}$ baza u U_1;
- $u_{p_1+1}, \ldots, u_{p_2}$ - baza u U_2, itd.
- $u_{p_{s-1}+1}, \ldots, u_{p_s}$ - baza u U_s.

Tada je unija svih ovih sistema vektora:

$$u = \{u_1, \ldots, u_{p_1}, u_{p_1+1}, \ldots, u_{p_2}, \ldots, \ldots, u_{p_{s-1}+1}, \ldots, u_{p_s}\}$$

baza u prostoru V i $p_s = n = dimV$.
Primijetimo da su za $j = 1, \ldots, p_1$ važi $u_j \in U_1$, a U_1 je invarijantan potprostor. Zato za ove vektore važi: $\mathscr{A}u_j \in U_1$. Tada se oni razlažu po bazi u U_1:

$$\mathscr{A}u_j = \alpha_{j1}u_1 + \cdots + \alpha_{jp_1}u_{p_1} + 0 \cdot u_{p_1+1} + \cdots + \cdots + 0 \cdot u_{p_s},$$

za $j = 1, \ldots, p_1$.
Dalje, slično se vektori $u_{p_1+1}, \ldots, u_{p_2} \in U_2$ slikaju u vektore iz U_2, pa se razlažu po bazi tog potprostora:

$$\mathscr{A}u_j = 0 \cdot u_1 + \cdots + 0 \cdot u_{p_1} + \alpha_{j,p_1+1}u_{p_1+1} + \cdots + \alpha_{j,p_2}u_{p_2} + 0 \cdot u_{p_2+1} + \cdots + \cdots + 0 \cdot u_{p_s},$$

za $j = p_1 + 1, \ldots, p_2$.

Nastavljajući ovaj proces, slično nalazimo za potprostore $U_3, \ldots, U_s$. Konačno, zaključujemo da matrica operatora $\mathscr{A}$ u bazi u prostora V ima sljedeći "bločni" oblik:

$$A(u) = \begin{pmatrix} A_1 & O & \ldots & O \\ O & A_2 & \ldots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \ldots & A_s \end{pmatrix}.$$

Ovdje su sa O označene podmatrice koje se sastoje isključivo od nula, dok je, recimo, matrica A_1 zadata sa:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1p_1} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2p_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{p_1 1} & \alpha_{p_1 2} & \ldots & \alpha_{p_1 p_1} \end{pmatrix}.$$

Primjer.
Operator projekcije na x-osu u geometrijskoj ravni V^2 $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(V^2 \to V^2)$ ima dva netrivijalna invarijantna potprostora $U_1 = \{x-\text{osa}\}$ i $U_2 = \{y-\text{osa}\}$. Čitav prostor V^2 je direktna suma ova dva potprostora: $V^2 = \{x - \text{osa}\} \oplus \{y - \text{osa}\}$. Izaberimo baze u ova dva jednodimenzionalna potprostora: $\vec{e}_1 \in \{x - \text{osa}\}$ i $\vec{e}_2 \in \{y - \text{osa}\}$. Za bazu u V^2 uzmimo uniju ove dvije baze $e = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Tada je matrica operatora u bazi e:

$$P(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ovo je bločni oblik matrice, sa dva bloka $A_1 = (1)$ i $A_2 = (0)$.

5.2 Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori linearnog operatora

Neka je V vektorski prostor nad poljem P, $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$.

Definicija 5.2. *Vektor $x \neq \mathbb{0}$ se naziva svojstvenim vektorom operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$, ako $\exists \lambda \in P : \mathscr{A}x = \lambda x$. Broj λ se naziva svojstvenom vrijednošću operatora $\mathscr{A}$.*

Skup svih svojstvenih vrijednosti naziva se spektrom operatora $\mathscr{A}$.
Primjedba
U matematičkoj literaturi na engleskom jeziku se za svojstvene vrijednosti vrijednosti i svojstvene vektore koriste termini *eigenvalues* i *eigenvectors*. (Koristi se njemačka riječ *eigen* = svoj, svojstveni.)
Primjeri
1. Operator rotacije za ugao $\frac{\pi}{2}$ u geometrijskoj ravni $\mathscr{R}_{\pi/2} \in \mathcal{L}(V^2 \to V^2)$ nema svojstvenih vrijednosti u polju $\mathbb{R}$.
2. Operator rotacije za ugao π u V^2 $\mathscr{R}_\pi \in \mathcal{L}(V^2 \to V^2)$ ima svojstvenu vrijednost $\lambda = -1$. Svi vektori su svojstveni vektori ovog operatora.

3. Operator projekcije na x-osu u V^2 $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(V^2 \to V^2)$ ima svojstvenu vrijednost $\lambda = 1$. Svojstveni vektori koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti $\lambda = 1$ su svi vektori na osi $x-$osi. Takođe, $\lambda = 0$ je svojstvena vrijednost ovog operatora, a svojstveni vektori koji joj odgovaraju su svi vektori na y-osi.
4. Operator diferenciranja na prostoru M_n $\mathscr{D} \in \mathcal{L}(M_n \to M_n)$ ima jedinstvenu svojstvenu vrijednost $\lambda = 0$. Svojstveni vektori koji odgovaraju ovoj svojstvenoj vrijednosti su polinomi konstante.

Svojstva

1. Svi vektori iz $Ker\mathscr{A}$ su svojstveni vektori operatora $\mathscr{A}$ koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti $\lambda = 0$, budući da $x \in Ker\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{A}x = \mathbb{0} = 0 \cdot x$.
2. Ako je $x-$ svojstveni vektor operatora $\mathscr{A}$ za svojstvenu vrijednost λ, tada je za svako $\alpha \neq 0 \in P$ vektor αx takođe svojstveni vektor $\mathscr{A}$, za svojstvenu vrijednost λ. Zaista, $\mathscr{A}(\alpha x) = \alpha\mathscr{A}x = \alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x)$.
3. Ako je x svojstveni vektor $\mathscr{A}$, tada je skup $Lin\{x\} = \{\alpha x, \alpha \in P\}$ jednodimenzionalni invarijantan potprostor za $\mathscr{A}$.
4. Ako je x svojstveni vektor operatora $\mathscr{A}$ za svojstvenu vrijednost λ, tada je x takođe svojstveni vektor operatora $\mathscr{A}^2$ za svojstvenu vrijednost λ^2.

Teorema 5.1. *Svojstveni vektori koji odgovaraju različitim svojstvenim vrijednostima operatora su međusobno linearno nezavisni.*

Dokaz

Dokaz ćemo izvesti indukcijom po broju svojstvenih vrijednosti operatora.
1. Neka $\mathscr{A}$ ima jednu svojstvenu vrijednost λ_1 :

$$\mathscr{A}x_1 = \lambda_1 x_1,\ x_1 \neq \mathbb{0}.$$

Jedan nenulti vektor čini linearno nezavisan sistem.
2. Pretpostavimo da je teorema tačna za p različitih svojstvenih vrijednosti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$. Neka su $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \lambda_{p+1}$ različite svojstvene vrijednosti operatora $\mathscr{A}$, a $x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}$ odgovarajući svojstveni vektori:

$$\mathscr{A}x_1 = \lambda_1 x_1, \ldots, \mathscr{A}x_p = \lambda_p x_p,\ \mathscr{A}x_{p+1} = \lambda_{p+1}x_{p+1}. \tag{5.2}$$

Potrebno je dokazati da su vektori $x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}$ linearno nezavisni. Izjednačimo njihovu linearnu kombinaciju s nula vektorom:

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p + \alpha_{p+1}x_{p+1} = \mathbb{0}. \tag{5.3}$$

Pomnožimo jednakost (5.3) operatorom $\mathscr{A}$:

$$\mathscr{A}(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p + \alpha_{p+1}x_{p+1}) = \alpha_1\mathscr{A}x_1 + \cdots + \alpha_p\mathscr{A}x_p + \alpha_{p+1}\mathscr{A}x_{p+1} = \mathbb{0}. \tag{5.4}$$

Koristeći (5.2):

$$\alpha_1\lambda_1 x_1 + \cdots + \alpha_p\lambda_p x_p + \alpha_{p+1}\lambda_{p+1}x_{p+1} = \mathbb{0} \tag{5.5}$$

Pomnožimo jednakost (5.3) sa λ_{p+1} :

$$\alpha_1\lambda_{p+1}x_1 + \cdots + \alpha_p\lambda_{p+1}x_p + \alpha_{p+1}\lambda_{p+1}x_{p+1} = \mathbb{0}. \tag{5.6}$$

Oduzmimo (5.6) od (5.5):

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_{p+1})x_1 + \cdots + \alpha_p(\lambda_p - \lambda_{p+1})x_p = \mathbb{0}. \tag{5.7}$$

Vektori $x_1, x_2, \ldots, x_p$ su linearno nezavisni po pretpostavci indukcije, a pošto su svojstvene vrijednosti različite, to $\lambda_1 - \lambda_{p+1} \neq 0, \lambda_2 - \lambda_{p+1} \neq 0, \ldots, \lambda_p - \lambda_{p+1} \neq 0$, pa iz (5.7) slijedi $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_p = 0$.
Iz (5.3) slijedi $\alpha_{p+1}x_{p+1} = \mathbb{0}$, pa, pošto je $x_{p+1} \neq \mathbb{0}$, to $\alpha_{p+1} = 0$.
Dakle, iz (5.3) smo dobili da su $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_p = 0, \alpha_{p+1} = 0$, što dokazuje da su vektori $x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}$ linearno nezavisni.

Posljedica 5.1. *Linearni operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ može imati najviše $n = dimV$ različitih svojstvenih vrijednosti.*

Primjedba
Pretpostavimo da $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ ima $n = dimV$ linearno nezavisnih svojstvenih vektora $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

$$\mathscr{A}x_1 = \lambda_1 x_1,\ \ldots,\ \mathscr{A}x_n = \lambda_n x_n.$$

Tada:

$$\begin{cases} \mathscr{A}x_1 = \lambda_1 x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \cdots + 0 \cdot x_n; \\ \mathscr{A}x_2 = 0 \cdot x_1 + \lambda_2 x_2 + 0 \cdot x_3 + \cdots + 0 \cdot x_n; \\ \vdots \\ \mathscr{A}x_n = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \cdots + \lambda_n x_n. \end{cases} \tag{5.8}$$

Vidimo da će matrica operatora $\mathscr{A}$ u bazi $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ biti dijagonalna:

$$A(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Definicija 5.3. *Operator $\mathscr{A}$ se naziva dijagonalizibilnim (ili operatorom proste strukture), ako postoji baza od svojstvenih vektora $\mathscr{A}$.*

Primjedba
Iz Teoreme 5.1 slijedi da ukoliko operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ ima $n = dimV$ različitih svojstvenih vrijednosti, to je on dijagonalizibilan.
Primjer
1. Operator $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(V^2 \to V^2)$ je dijagonalizibilan, jer ima dvije različite svojstvene vrijednosti $(2 = dimV^2)$.
2. Operator $\mathscr{R}_\pi \in \mathcal{L}(V^2 \to V^2)$ je takođe dijagonalizibilan, iako ima samo jednu svojstvenu vrijednost.
3. Operator $\mathscr{D} \in \mathcal{L}(M_n \to M_n)$ za $n \geq 1$ nije dijagonalizibilan (ima samo jedan linearno nezavisni svojstveni vektor).

4. Operator $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} \in \mathcal{L}(V^2 \to V^2)$ nije dijagonalizibilan (uopšte nema svojstvenih vektora).

Primjedba

Primijetimo da smo sve gore navedene operatore u primjerima razmatrali u vektorskim prostorima nad poljem realnih brojeva $\mathbb{R}$.

5.3 Karakteristični polinom operatora

U prethodnoj sekciji smo uveli veoma važne pojmove svojstvene vrijednosti i svojstvenog vektora linearnog operatora. Međutim, nismo ukazali način na koji se u opštem slučaju mogu naći svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori. Ova sekcija će biti posvećena tom važnom pitanju. Ipak, da bi se ovaj materijal bolje razumio, potrebno je znati neke činjenice iz Opšte algebre o polinomima, njihovim korijenima i slično. Stoga ćemo se najprije kratko upoznati sa ovim činjenicama.

Definicija 5.4. *Neka je $f(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ polinom sa koeficijentima $1, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ iz nekog polja P. Korijenom, ili nulom polinoma $f(t)$ se naziva rješenje jednačine $f(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0 = 0$.*

Definicija 5.5. *Polje P se naziva kompletnim, ako svaki polinom sa koeficijentima iz P ima korijen u polju P.*

Primjer

Polje $\mathbb{R}$ nije kompletno. Recimo polinom $f(t) = t^2 + 1$ nema korijen u polju $\mathbb{R}$, iako mu koeficijenti $1, 0$ i 1 pripadaju $\mathbb{R}$.

Činjenica da polje $\mathbb{R}$ nije kompletno čini neophodnim da uvedemo kompleksne brojeve. Za nas je važna teorema koja tvrdi da je polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ kompletno. Ova teorema nosi naziv "Osnovna teorema algebre". Ona se može dokazati na različite načine, ali nijedan od tih dokaza nije baš jednostavan. Budući da ova teorema nije predmet proučavanja Linearne algebre, mi ćemo je ovdje samo formulisati bez dokaza.

Teorema 5.2. *(Osnovna teorema algebre) Svaki polinom sa koeficijentima u $\mathbb{C}$ ima korijen u $\mathbb{C}$. Drugim riječima, polje $\mathbb{C}$ je kompletno.*

Primjedba

Ako je $\lambda \in P$ korijen polinoma $f(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ stepena n, tada se polinom $f(t)$ dijeli sa $t - \lambda$ i $\frac{t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0}{t - \lambda}$ je polinom stepena $n - 1$.

Definicija 5.6. *Neka je λ korijen polinoma $t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$. Tada je kratnost korijena λ maksimalan cijeli broj k takav da je $(t - \lambda)^k$ djelilac polinoma $t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$.*

Primjeri

1. Polinom $t^2 - 2t + 1$ ima korijen 1 kratnosti 2.
2. Polinom t^5 ima korijen 0 kratnosti 5.

Tvrđenje 5.1. *Svaki polinom stepena n sa koeficijentima iz $\mathbb{C}$ ima n korijena u $\mathbb{C}$, računajući njihovu kratnost.*

Dokaz
Neka je $f(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ polinom sa koeficijentima $1, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$. Na osnovu Osnovne teoreme algebre, postoji korijen $\lambda \in C$. Ako polinom $f(t)$ podijelimo sa $t - \lambda$, dobijamo polinom $g(t)$ stepena $n-1$. Po Osnovnoj teoremi algebre polinom $g(t)$ takođe ima korijen u $\mathbb{C}$. Produžavajući postupak, dobijamo n korijena u $\mathbb{C}$, računajući njihovu kratnost.
Pošto smo se upoznali sa nekim pojmovima i teoremama iz Opšte algebre, vratimo se pitanju nalaženja svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora linearnog operatora.

Definicija 5.7. *Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$. Karakterističnim polinomom operatora $\mathscr{A}$ se naziva*

$$\chi_{\mathscr{A}}(t) = det(\mathscr{A} - t\mathscr{I}).$$

Primjedba
Izaberimo neku bazu e u V. Tada su $A(e)$ i I matrice operatora $\mathscr{A}$ i $\mathscr{I}$ u bazi e. Tada je $det(\mathscr{A} - t\mathscr{I}) = det(A(e) - tI)$. Iz svojstava sličnih matrica znamo da ova determinanta ne zavisi od izbora baze e. Dakle, kako bismo našli karakteristični polinom operatora $\mathscr{A}$, potrebno je zapisati matricu ovog operatora u bilo kojoj bazi, oduzeti od nje matricu tI i izračunati determinantu dobijene matrice.

Tvrđenje 5.2. *Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$. Karakteristični polinom $\chi_{\mathscr{A}}(t)$ je polinom stepena $n = dimV$.*

Ovo tvrđenje očigledno slijedi iz definicije determinante.

Teorema 5.3. *Neka je V vektorski prostor nad poljem P. $\lambda \in P$ je svojstvena vrijednost operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$, ako i samo ako je λ korijen karakterističnog polinoma $\chi_{\mathscr{A}}(t)$ operatora $\mathscr{A}$, tj. λ je rješenje jednačine $\chi_{\mathscr{A}}(\lambda) = 0$.*

Dokaz
Neka je λ svojstvena vrijednost $\mathscr{A}$, tj. $\mathscr{A}x = \lambda x$, $x \neq 0$. Tada $\mathscr{A}x - \lambda x = \mathbb{0}$, pa $(\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I})x = \mathbb{0}$, odnosno $x \in Ker(\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I})$. Dakle, $defect(\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I}) > 0$.
Ovo znači da je operator $\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I}$ singularan, to jest $\chi_{\mathscr{A}}(\lambda) = det(\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I}) = 0$, pa je λ korijen karakterističnog polinoma.
Ovaj dokaz se u potpunosti može okrenuti unatrag kako bi se teorema dokazala i u suprotnom smjeru.
Primjeri
1. Počnimo sa operatorom projekcije $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$. Tada je matrica operatora $\mathscr{P}$ u standardnoj bazi $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, pa je $P - tI = \begin{pmatrix} 1-t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}$.
Dakle, karakteristični polinom operatora $\mathscr{P}$ je $\chi_{\mathscr{P}}(t) = det(P - tI) = t^2 - t$.
Svojstvene vrijednosti operatora $\mathscr{P}$ su korijeni njegovog karakterističnog polinoma, tj. rješenja jednačine $t^2 - t = 0$. Odavde nalazimo da $\mathscr{P}$ ima dvije svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$.
2. Na redu je operator rotacije $\mathscr{R}_{\pi/2} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$. Matrica ovog operatora u standardnoj bazi je $R_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, pa je $R_{\pi/2} = \begin{pmatrix} -t & -1 \\ 1 & -t \end{pmatrix}$.
Tada je $det(R_{\pi/2} - tI) = t^2 + 1$. Dakle, $\chi_{\mathscr{R}}(t) = t^2 + 1$ je karakteristični polinom operatora $\mathscr{R}_{\pi/2}$.

Pošto jednačina $t^2+1=0$ nema realnih rješenja, to operator $\mathscr{R}_{\pi/2}$ nema realnih svojstvenih vrijednosti.
3. Konačno, za operator diferenciranja $\mathscr{D} \in \mathcal{L}(M_n \to M_n)$,

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \text{ pa je } D - tI = \begin{pmatrix} -t & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -t & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -t \end{pmatrix}.$$

Odavde, $\chi_{\mathscr{D}}(t) = (-t)^{n+1} = 0$.
Dakle, $\mathscr{D}$ ima jedinstvenu svojstvenu vrijednost $\lambda = 0$.
Teorema 5.3 nam djelimično daje odgovor na pitanje s početka ove sekcije. Pozivajući se na ovu teoremu, možemo naći svojstvene vrijednosti bilo kojeg linearnog operatora (pod uslovom da umijemo računati korijene polinoma). Dakle, dobili smo sistematski odgovor na ovo pitanje, kojim vjerovatno možemo biti zadovoljni, posebno ako imamo u vidu da u složenijim slučajevima korijene polinoma možemo lako naći uz pomoć računara. Sada ostaje drugi dio pitanja s početka sekcije: kako naći svojstvene vektore linearnog operatora? Pokazuje se da se ovaj zadatak, nakon nalaženja svojstvenih vrijednosti, svodi na zadatak koji nam je veoma dobro poznat: homogeni sistem linearnih jednačina.

5.3.1 Metod nalaženja svojstvenog vektora

Pretpostavimo da smo za linearni operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ našli njegovu svojstvenu vrijednost λ. Pogledajmo na koji način možemo naći svojstveni vektor x operatora $\mathscr{A}$, koji odgovara sopstvenoj vrijednosti λ.
Iz jednakosti $\mathscr{A}x = \lambda x$ slijedi $(\mathscr{A} - \lambda \mathscr{I})x = \mathbb{0}$.
Izaberimo neku bazu e u V, tada prethodnu jednakost možemo zapisati u koordinatnom obliku:

$$(A(e) - \lambda I)x = \mathbb{0}, \tag{5.9}$$

gdje je I jedinična matrica, $A(e)$ poznata matrica, a λ poznat broj. Dakle, pitanje nalaženja svojstvenog vektora x smo sveli na rješavanje homogenog sistema linearnih jednačina (5.9). Naravno, ovaj zadatak uvijek ima trivijalno rješenje $x = \mathbb{0}$, ali je nama potrebno netrivijalno rješenje, jer je svojstveni vektor (po definiciji) različit od nule.
Sada se postavlja važno pitanje da li sistem (5.9) uvijek ima netrivijalno rješenje. Kako bismo odgovorili na to pitanje, podsjetimo se da smo svojstvenu vrijednost λ našli iz uslova $det(A(e) - \lambda I) = 0$, tj. tako da matrica $A(e) - \lambda I$ bude singularna. Sada iz Teoreme 3.3 slijedi da sistem (5.9) uvijek ima netrivijalno rješenje. To rješenje i jeste svojstveni vektor x operatora $\mathscr{A}$. Dakle, sistem (5.9) ima netrivijalno rješenje samim tim što je λ svojstvena vrijednost $\mathscr{A}$, ili, obratno, ako sistem (5.9) nema netrivijalno rješenje, to λ nije svojstvena vrijednost $\mathscr{A}$.
Primjeri
1. Za $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, i $\chi_{\mathscr{P}}(t) = t^2 - t$.

Kako bismo našli svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = 1$, riješimo sistem $(P - 1 \cdot I)x = \mathbb{0}$, tj.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dobijamo da su svojstveni vektori koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = 1$ svi vektori oblika $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, tj. vektori sa x-ose.

Za drugu svojstvenu vrijednost, $\lambda = 0$ potrebno je riješiti sistem $(P - 0 \cdot I)x = Px = \mathbb{0}$, tj.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Svojstveni vektori koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2 = 0$ su oblika $x = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$, tj. vektori sa y-ose.

2. Za operator $D \in \mathcal{L}(M_n \to M_n)$ imamo jedinstvenu svojstvenu vrijednost $\lambda = 0$, pa je za nalaženje svojstvenog vektora potrebno riješiti sistem linearnih jednačina:

$$(D - 0 \cdot I)a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rješenje ovog sistema su vektori sa koordinatama $a = \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, tj. polinomi oblika $f(t) = a_0 = const.$

Primjedba

Još jednom naglasimo da smo u svim primjerima u ovoj sekciji mogli izabrati bilo koje druge baze i raditi sa matricama operatora u tim bazama, to ne bi uticalo na svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore, zahvaljujući svojstvima sličnih matrica. Mi smo birali standardne baze isključivo iz razloga što je računanje u tim bazama lakše.

5.4 Svojstveni potprostor linearnog operatora

Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$, λ^* - svojstvena vrijednost operatora $\mathscr{A}$. Označimo sa $W_{\lambda^*} = \{v \in V : \mathscr{A}v = \lambda^* v\}$ - skup svih svojstvenih vektora operatora $\mathscr{A}$, koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti λ^* (ovom skupu svojstvenih vektora smo dodali i nula vektor).

Teorema 5.4. *Skup W_{λ^*} je vektorski potprostor, invarijantan u odnosu na operator $\mathscr{A}$.*

Dokaz
1. Neka su $v, w \in W_{\lambda^*}$, tada $\mathscr{A}v = \lambda^* v$, $\mathscr{A}w = \lambda^* w$. Odavde $\mathscr{A}(v+w) = \mathscr{A}v + \mathscr{A}w = \lambda^* v + \lambda^* w = \lambda^*(v+w)$, pa $v + w \in W_{\lambda^*}$.
2. Neka je $v \in W_{\lambda^*}, \alpha \in P$. Tada $\mathscr{A}(\alpha v) = \alpha \mathscr{A} v = \alpha(\lambda^* v) = \lambda^*(\alpha v)$, pa $\alpha v \in W_{\lambda^*}$.
Iz 1. i 2. slijedi da je W_{λ^*} potprostor.
Neka je $v \in W_{\lambda^*}$. Tada je $\mathscr{A}v = \lambda^* v \in W_{\lambda^*}$, pa je W_{λ^*} invarijantan potprostor za operator $\mathscr{A}$.

Definicija 5.8. *Skup W_{λ^*} se naziva svojstvenim potprostorom operatora $\mathscr{A}$ koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ^*.*

Teorema 5.5. *Neka je λ^* korijen karakterističnog polinoma operatora $\mathscr{A}$ kratnosti k. Tada:*

$$dim W_{\lambda^*} \leq k.$$

Dokaz
Neka je $dim W_{\lambda^*} = l$. Izaberimo bazu $f_1, f_2, \ldots, f_l$ u W_{λ^*}. Dopunimo je do baze čitavog prostora $V : f_1, f_2, \ldots, f_l, f_{l+1}, \ldots, f_n$. Matrica operatora $\mathscr{A}$ u bazi f ima oblik (vidi Primjedbu iz Sekcije 5.1):

$$A(f) = \begin{pmatrix} P & Q \\ O & R \end{pmatrix},$$

gdje je matrica P zadata sa:

$$P = \begin{pmatrix} \lambda^* & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda^* & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda^* \end{pmatrix}.$$

Odavde vidimo da je karakteristični polinom operatora $\mathscr{A}$ zadat sa:

$$\chi_{\mathscr{A}}(t) = det(A(f) - tI) = (\lambda^* - t)^l \cdot det(R - tI) = (\lambda^* - t)^l \cdot \phi(t),$$

gdje je $\phi(t) = det(R - tI)$ - polinom stepena $n - l$.
S druge strane, λ^* je korijen kratnosti k, pa je $\chi_{\mathscr{A}}(t) = (\lambda^* - t)^k \cdot \psi(t)$, pri čemu $\psi(\lambda^*) \neq \mathbb{0}$.
Dakle, imamo da $(\lambda^* - t)^l \phi(t) = (\lambda^* - t)^k \psi(t)$, pri čemu $\psi(\lambda^*) \neq 0$, dok $\phi(\lambda^*)$ može biti nula, pa zaključujemo da $l \leq k$.
Neka je λ^* svojstvena vrijednost operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$. Tada je λ^* korijen karakterističnog polinoma $\chi_{\mathscr{A}}(t)$.

Definicija 5.9. *Kratnost korijena λ^* polinoma $\chi_{\mathscr{A}}(t)$ se naziva algebarskom kratnošću svojstvene vrijednosti λ^*.*
Dimenzija svojstvenog potprostora W_{λ^*} koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ^* se naziva geometrijskom kratnošću svojstvene vrijednosti λ^*.

Koristeći terminologiju iz prethodne definicije, možemo reći da Teorema 5.5 glasi da je geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti manja ili jednaka od algebarske. U narednim primjerima ćemo vidjeti da je u nekim slučajevima geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti jednaka algebarskoj, dok je u drugim strogo manja.

Primjeri

1. Za operator projekcije $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$. Njegove svojstvene vrijednosti su $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$. Obije svojstvene vrijednosti su kratnosti 1.

Svojstveni vektori, koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = 0$, su zadati sa: $\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$, pa je $dimW_{\lambda_1} = 1$. Svojstveni vektori, koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2 = 0$ su: $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, pa je $dimW_{\lambda_2} = 1$.

Tako su u ovom slučaju geometrijske i algebarske kratnosti obije svojstvene vrijednosti jednake.

2. Razmotrimo operator rotacije za ugao π: $\mathscr{R}_\pi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$. Matrica ovog operatora u standardnoj bazi je:

$$R_\pi(e) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

njegov karakteristični polinom je $\chi_{\mathscr{R}}(t) = (-1-t)^2$, pa je $\lambda_0 = -1$ - svojstvena vrijednost kratnosti 2.

Svojstveni vektori koji odgovaraju ovoj svojstvenoj vrijednosti su svi vektori u $\mathbb{R}^2$, pa je $dimW_{\lambda_0} = 2$.

Dakle, i algebarska i geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti -1 su jednake 2.

3. Za operator diferenciranja $\mathscr{D} \in \mathcal{L}(M_n \to M_n)$, karakteristični polinom je $\chi_{\mathscr{D}}(t) = (-t)^{n+1}$, pa on ima jedinstvenu svojstvenu vrijednost $\lambda_0 = 0$. Algebarska kratnost ove svojstvene vrijednosti je $n+1$, a njoj odgovaraju svojstveni vektori oblika $f(t) = const$, pa je $dimW_{\lambda_0} = 1$. Dakle, geometrijska kratnost ove svojstvene vrijednosti je 1.

Ovaj primjer pokazuje da geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti može biti strogo manja od algebarske.

Teorema 5.6. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ i $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$. Tada postoji invarijantan za $\mathscr{A}$ potprostor prostora V, dimenzije 1 ili 2.*

Dokaz

Razmotrimo dva slučaja:

1. Najprije pretpostavimo da $\mathscr{A}$ ima realnu svojstvenu vrjednost λ. Označimo sa x svojstveni vektor koji odgovara λ. Tada je $L = \{\alpha x, \alpha \in \mathbb{R}\}-$ invarijantan potprostor operatora $\mathscr{A}$ i $dimL = 1$.

2. Sada pretpostavimo da $\mathscr{A}$ nema realnih svojstvenih vrijednosti. Tada, po Osnovnoj teoremi algebre, $\mathscr{A}$ ima kompleksnu svojstvenu vrijednost $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$. Fiksirajmo bazu $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ u V. Označimo sa A matricu operatora $\mathscr{A}$ u bazi e, a sa $\xi + i\eta$ svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\alpha + i\beta$, tada:

$$(A - (\alpha + i\beta)I)(\xi + i\eta) = \mathbb{0}.$$

Razdijelimo u prethodnoj jednakosti realni i imaginarni dio:

$$A\xi - \alpha I\xi + \beta I\eta = \mathbb{0},\ A\eta - \beta I\xi - \alpha I\eta = \mathbb{0},$$

ili
$$A\xi = \alpha\xi - \beta\eta,\ A\eta = \beta\xi + \alpha\eta. \tag{5.10}$$
Primijetimo da iz jednakosti $\xi + i\eta \neq \mathbb{0}$ slijedi da $\xi \neq \mathbb{0}$ i $\eta \neq \mathbb{0}$. Zaista, ako pretpostavimo da je $\xi = \mathbb{0}$, tada iz prve jednakosti u (5.10) imamo $\beta\eta = \mathbb{0}$, a pošto je $\beta \neq 0$, to $\eta = \mathbb{0}$.
Po nenultim koordinatnim kolonama $\xi = (\xi_1 \dots \xi_n)^T, \eta = (\eta_1 \dots \eta_n)^T$ formirajmo nenulte vektore:
$$x = e\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i,\ y = e\eta = \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i.$$
Tada:
$$\sum_{i=1}^{n} \mathscr{A} e_i \xi_i = \mathscr{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i\right) = \mathscr{A}x; \tag{5.11}$$
$$\sum_{i=1}^{n} \mathscr{A} e_i \eta_i = \mathscr{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i\right) = \mathscr{A}y. \tag{5.12}$$
Pomnoživši jednakosti (5.10) s lijeve strane matricom $e = (e_1\, e_2 \dots e_n)$ i koristeći formulu:
$$eA = (\mathscr{A}e_1 \dots \mathscr{A}e_n),$$
dobijamo dvije vektorske jednakosti:
$$\mathscr{A}x = \alpha x - \beta y,\ \mathscr{A}y = \beta x + \alpha y. \tag{5.13}$$
Razmotrimo potprostor $Lin\{x, y\}$:
a) $Lin(x, y)$ je invarijantan u odnosu na $\mathscr{A}$.
Zaista:
$$\mathscr{A}(\mu x + \nu y) = \mu\mathscr{A}x + \nu\mathscr{A}y = \mu(\alpha x - \beta y) + \nu(\alpha y + \beta x) = (\alpha\mu + \beta\nu)x + (\alpha\nu - \beta\mu)y \in Lin\{x, y\}.$$
b) $dimLin\{x, y\} = 2$.
Zaista, dokažimo da su vektori x i y linearno nezavisni. Izjednačimo njihovu linearnu kombinaciju sa nulom:
$$\mu x + \nu y = \mathbb{0}.$$
Djelujemo operatorom $\mathscr{A}$ na ovu jednakost, koristeći (5.13):
$$\mathscr{A}(\mu x + \nu y) = \mu\mathscr{A}x + \nu\mathscr{A}y = (\alpha\mu + \beta\nu)x + (\alpha\nu - \beta\mu)y = \mathbb{0}.$$
Kombinujući prethodne dvije jednakosti, možemo isključiti vektor y:
$$[-(\alpha\nu - \beta\mu)\mu + \nu(\alpha\mu + \beta\nu)]x = \mathbb{0},$$
ili $\beta(\mu^2 + \nu^2)x = \mathbb{0}$.
Pošto je $\beta \neq 0$ i $x \neq \mathbb{0}$, to $\mu^2 + \nu^2 = 0$, pa je $\mu = \nu = 0$. Odavde slijedi da su x i y linearno nezavisni, dakle $dimLin\{x, y\} = 2$.
Ovim je teorema dokazana. U slučaju kada operator $\mathscr{A}$ ima realnu svojstvenu vrijednost našli smo invarijantni potprostor dimenzije 1, a kompleksnoj svojstvenoj vrijednosti odgovara invarijantni potprostor dimenzije 2.

5.5 Polinom od linearnog operatora. Teorema Hamiltona-Kejli.

Neka je V vektorski prostor nad poljem P, $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$.

Definicija 5.10. *Izraz oblika* $p(\mathscr{A}) = \mathscr{A}^n + \alpha_{n-1}\mathscr{A}^{n-1} + \cdots + \alpha_2\mathscr{A}^2 + \alpha_1\mathscr{A} + \alpha_0\mathscr{I}$ *se naziva polinomom stepena* n *od linearnog operatora* $\mathscr{A}$.

Primijetimo da je polinom od operatora takođe linearni operator, tj. ako je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$, onda je i $p(\mathscr{A}) \in \mathcal{L}(V \to V)$.

Teorema 5.7. *(Hamilton-Kejli) Operator je korijen svog karakterističnog polinoma.*

Dokaz
Neka je

$$\chi_{\mathscr{A}}(t) = det(\mathscr{A} - t\mathscr{I}) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_{n-1}t^{n-1} + (-1)^n t^n$$

karakteristični polinom opertora $\mathscr{A}$. Treba pokazati da $\chi(\mathscr{A}) = \mathscr{O}$ ($\mathscr{O}$ je nula operator).
Izaberimo neku bazu u V i formirajmo matricu A operatora $\mathscr{A}$. Razmotrimo

$$(A - tI) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} - t & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - t & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - t \end{pmatrix}.$$

Formirajmo pridruženu (adjugovanu) matricu matrici $A - tI$:

$$B(t) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{21}(t) & \dots & A_{n1}(t) \\ A_{12}(t) & A_{22}(t) & \dots & A_{n2}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n}(t) & A_{2n}(t) & \dots & A_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Ovdje je $A_{ij}(t)$ algebarska dopuna elementa sa indeksima j, i matrice $A - tI$. Lako je zaključiti da su $A_{ij}(t)$ polinomi od t stepena $n-1$. Dakle, elementi matrice $B(t)$ su polinomi stepena $n-1$, pa se matrica $B(t)$ može zapisati na sljedeći način:

$$B(t) = C_0 + C_1 t + \cdots + C_{n-1}t^{n-1},$$

gdje su $C_k \in P^{n\times n}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ - matrice sastavljene od koeficijenata pored k-tih stepena polinoma $A_{ij}(t)$.
No, iz svojstava pridruženih matrica (teorema 2.14):

$$(A - tI)B(t) = det(A - tI)I,$$

ili

$$(A - tI)(C_0 + C_1 t + \cdots + C_{n-1}t^{n-1}) = (\alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_{n-1}t^{n-1} + (-1)^n t^n)I.$$

Posljednja jednakost dva polinoma stepena n se može zapisati kao $n+1$ jednakosti koeficijenata pored svih stepena t^k, $k = 0, 1, \ldots, n$:

$$\begin{aligned} AC_0 \qquad &= \alpha_0 I && [0] \\ AC_1 - C_0 &= \alpha_1 I && [1] \\ AC_2 - C_1 &= \alpha_2 I && [2] \\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ AC_{n-1} - C_{n-2} &= \alpha_{n-1} I && [n-1] \\ -C_{n-1} &= (-1)^n I. && [n] \end{aligned}$$

Sada $[k]$-tu jednakost množimo s lijeve strane sa A^k, $k = 0, 1, \ldots, n$ i sve saberemo:

$$O = AC_0 + A^2C_1 - AC_0 + A^3C_2 - A^2C_1 + \cdots + A^nC_{n-1} - A^nC_{n-1} =$$

$$\alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \cdots + \alpha_{n-1}A^{n-1} + (-1)^n A^n = \chi_{\mathscr{A}}(A).$$

Dakle, pokazali smo da je $\chi_{\mathscr{A}}(A)$ nula matrica. Jednakost $\chi_{\mathscr{A}}(\mathscr{A}) = \mathscr{O}$ slijedi iz činjenice da je $rank\chi_{\mathscr{A}}(\mathscr{A}) = rank\chi_{\mathscr{A}}(A)$.

Primjer

Za operator projekcije $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(V^2 \to V^2)$ karakteristični polinom je $\chi_{\mathscr{P}}(t) = t^2 - t$.

Teorema Hamiltona-Kejli govori da važi $\mathscr{P}^2 - \mathscr{P} = \mathscr{O}$, tj. $\mathscr{P}^2 = \mathscr{P}$. Nije teško vidjeti da operator projekcije zaista zadovoljava ovu jednakost.

Takođe, možemo zapisati matricu P operatora $\mathscr{P}$ u nekoj bazi i uvjeriti se da važi jednakost $P^2 - P = O$.

Glava 6

Žordanova forma linearnog operatora

Sve teoreme, definicije i tvrđenja u ovom paragrafu podrazumijevaju da je V vektorski prostor nad poljem kompleksnih brojeva (skraćeno: kompleksan vektorski prostor).

6.1 Žordanova forma nilpotentnog operatora

Definicija 6.1. *Linearni operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ se naziva nilpotentnim, ako $\mathscr{A}^q = \mathcal{O}$, za neki prirodan broj q. (Oznaka $\mathcal{O}$ stoji za nula-operator, tj. preslikavanje koje sve vektore slika u nula-vektor.)*

Primjer.
Za operator diferenciranja $\mathscr{D} \in \mathcal{L}\left(M_n \to M_n\right)$ važi $\mathscr{D}^{n+1} = \mathcal{O}$.

Definicija 6.2. *Kvadratna matrica oblika*

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

se naziva Žordanovom ćelijom dimenzije k.

Primjer.
$J_k(0)$ je nilpotentna matrica.

Teorema 6.1. *Neka je V kompleksan vektorski prostor i operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ nilpotentan operator. Tada $\mathscr{A}$ ima jedinstvenu svojstvenu vrijednost $\lambda = 0$.*

Dokaz
Ovu teoremu je lako dokazati u jednu stranu, tj. da nilpotentni operator ne može imati svojstvenih vrijednosti različitih od nule. Zaista, neka je x svojstveni vektor operatora $\mathscr{A}$ i λ odgovarajuća svojstvena vrijednost, tada:

$$\mathscr{A}^q x = \lambda^q x.$$

Međutim, $\mathscr{A}^q = \mathcal{O}$, pa je $\lambda = 0$ (pošto $x \neq \mathbb{0}$).
Drugi dio dokaza (da je svaki operator čija je jedinstvena svojstvena vrijednost nula nilpotentan) je nešto teži i ovdje ga nećemo navoditi.

Teorema 6.2. *Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ nilpotentan operator. Tada u prostoru V postoji baza h, takva da matrica operatora $\mathscr{A}$ ima sljedeći oblik:*

$$A(h) = \begin{pmatrix} J_{k_1}(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{k_p}(0) \end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

gdje su $J_{k_1}(0), \dots, J_{k_p}(0)$ Žordanove ćelije dimenzija $k_1, \dots k_p$ respektivno, $k_1 + k_2 + \dots + k_p = dim V$.

Dokaz
Neka je $\mathscr{A}$ nilpotentan. Tada postoji prirodan broj m, tako da $\mathscr{A}^m = \mathcal{O}$ i $\mathscr{A}^{m'} \neq \mathcal{O}$, za $m' < m$. Razmotrimo niz operatora:

$$\mathscr{I} = \mathscr{A}^0, \mathscr{A} = \mathscr{A}^1, \mathscr{A}^2, \dots, \mathscr{A}^{m-1}, \mathscr{A}^m = \mathcal{O}.$$

Tada za potprostore $V_j = Ker\, \mathscr{A}^j$, $j = 0, 1, \dots, m$ važi:
1^+ $V_{j-1} \subseteq V_j$, $j = 1, \dots, m$.
Zaista, ako je $x \in V_{j-1}$, tj. $\mathscr{A}^{j-1}x = \mathbb{0}$, to $\mathscr{A}^j = \mathscr{A}(\mathscr{A}^{j-1}x) = \mathscr{A}\mathbb{0} = \mathbb{0}$, pa $x \in Ker\, \mathscr{A}^j = V_j$.
2^+ V_j je invarijantan za $\mathscr{A}$.
Zaista, ako je $x \in V_j$, tada $\mathscr{A}^j x = \mathbb{0} \Rightarrow \mathscr{A}^{j-1}(\mathscr{A}x) = \mathbb{0} \Rightarrow \mathscr{A}x \in Ker\, \mathscr{A}^{j-1} = V_{j-1} \subseteq V_j \Rightarrow \mathscr{A}x \in V_j$.
Razmotrimo niz potprostora: $\{\mathbb{0}\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots \subseteq V_{m-1} \subseteq V_m = V$.
Korak I. Razmotrimo trojku $V_{m-2} \subseteq V_{m-1} \subseteq V_m$. Razložimo:

$$V_m = V_{m-1} \oplus V'_{m-1},$$

gdje je V'_{m-1} dopuna potprostora V_{m-1} do prostora V_m. Pošto važi $\mathscr{A}^m = \mathcal{O}, \mathscr{A}^{m-1} \neq \mathcal{O}$, to $V_{m-1} \neq V_m$ i, dakle, $V'_{m-1} \neq \{\mathbb{0}\}$.
Izaberimo $\{e_1, e_2, \dots, e_s\}$ za bazu u V'_{m-1}. Tada, prema 1^+ vektori $\mathscr{A}e_1, \mathscr{A}e_2, \dots, \mathscr{A}e_s$ leže u V_{m-1}. Pokažimo da su $\mathscr{A}e_1, \mathscr{A}e_2, \dots, \mathscr{A}e_s$ linearno nezavisni i

$$Lin\{\mathscr{A}e_1, \mathscr{A}e_2, \dots, \mathscr{A}e_s\} \cap V_{m-2} = \{\mathbb{0}\}.$$

Neka je $\alpha_1\mathscr{A}e_1 + \alpha_2\mathscr{A}e_2 + \dots + \alpha_s\mathscr{A}e_s = a \in V_{m-2}$. Pokazaćemo da je tada $\alpha_1 = \dots = \alpha_s = 0$ i $a = \mathbb{0}$.
Pošto je $V_{m-2} = Ker\, \mathscr{A}^{m-2}$, to $\mathscr{A}^{m-2}a = \mathbb{0}$, to jest $\mathscr{A}^{m-2}(\alpha_1\mathscr{A}e_1 + \dots + \alpha_s\mathscr{A}e_s) = \mathscr{A}^{m-2}a = \mathbb{0}$.
Odavde, $\alpha_1\mathscr{A}^{m-1}e_1 + \dots + \alpha_s\mathscr{A}^{m-1}e_s = \mathbb{0}$, to jest $\mathscr{A}^{m-1}(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_s e_s) = \mathbb{0}$, pa imamo:

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_s e_s \in V_{m-1}.$$

Pošto vektori $e_1, \dots, e_s$ leže u V'_{m-1}, to

$$\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_s e_s \in V'_{m-1}.$$

No, $V_{m-1} \cap V'_{m-1} = \{\mathbb{0}\}$, pa $\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_s e_s = \mathbb{0}$. Dalje, iz linearne nezavisnosti sistema vektora $\{e_1, e_2, \ldots, e_s\}$ slijedi $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_s = 0$, dakle i $a = \mathbb{0}$.
Primijetimo da je sistem vektora:

$$\begin{array}{c|l} V'_{m-1} & e_1 \ldots e_s \\ V_{m-1} & \mathscr{A} e_1 \ldots \mathscr{A} e_s \end{array}$$

linearno nezavisan, pošto su podsistemi $\{e_1, e_2, \ldots, e_s\}$ i $\{\mathscr{A} e_1, \mathscr{A} e_2, \ldots, \mathscr{A} e_s\}$ linearno nezavisni i leže respektivno u prostorima V'_{m-1} i V_{m-1}, čija je suma prostor $V = V_{m-1} \oplus V'_{m-1}$.
Korak II. Razmotrimo trojku potprostora $V_{m-3} \subseteq V_{m-2} \subseteq V_{m-1}$.
Vektori $\mathscr{A} e_1, \mathscr{A} e_2, \ldots, \mathscr{A} e_s$ leže u V_{m-1} i ne leže u V_{m-2}, pa $V_{m-1} \neq V_{m-2}$, znači

$$V_{m-1} = V_{m-2} \oplus V'_{m-2},$$

gdje je $V'_{m-2} \neq \{\mathbb{0}\}$ dopuna potprostora V_{m-2} do prostora V_{m-1}. Pri tome je V'_{m-2} izabran tako da sadrži vektore $\mathscr{A} e_1, \mathscr{A} e_2, \ldots, \mathscr{A} e_s$.
Dopunimo (ako je potrebno) ovaj linearno nezavisan sistem vektora do baze u V'_{m-2}. Imamo $\mathscr{A} e_1, \mathscr{A} e_2, \ldots, \mathscr{A} e_s, e_{s+1}, ..., e_r$ - baza u V'_{m-2}. Prema svojstvu 1^+ vektori

$$\mathscr{A}^2 e_1, \mathscr{A}^2 e_2, \ldots, \mathscr{A}^2 e_s, \mathscr{A} e_{s+1}, \ldots, \mathscr{A} e_r$$

leže u V_{m-2}. Pokažimo da su oni linearno nezavisni i da:

$$Lin\{\mathscr{A}^2 e_1, \ldots, \mathscr{A}^2 e_s, \mathscr{A} e_{s+1}, \ldots, \mathscr{A} e_r\} \cap V_{m-3} = \{\mathbb{0}\}.$$

Neka je $\beta_1 \mathscr{A}^2 e_1 + \cdots + \beta_s \mathscr{A}^2 e_s + \beta_{s+1} \mathscr{A} e_{s+1} + \cdots + \beta_r \mathscr{A} e_r = b \in V_{m-3}$. Pokazaćemo da $\beta_1 = \cdots = \beta_r = 0$ i $b = \mathbb{0}$.
Pošto je $V_{m-3} = Ker \mathscr{A}^{m-3}$, to $\mathscr{A}^{m-3} b = \mathbb{0}$. Odavde:

$$\mathscr{A}^{m-2}(\beta_1 \mathscr{A} e_1 + \cdots + \beta_s \mathscr{A} e_s + \beta_{s+1} e_{s+1} + \cdots + \beta_r e_r = \mathscr{A}^{m-3} b = \mathbb{0}.$$

Dakle,

$$\beta_1 \mathscr{A} e_1 + \cdots + \beta_s \mathscr{A} e_s + \beta_{s+1} e_{s+1} + \cdots + \beta_r e_r \in V_{m-2}.$$

S druge strane,

$$\beta_1 \mathscr{A} e_1 + \cdots + \beta_s \mathscr{A} e_s + \beta_{s+1} e_{s+1} + \cdots + \beta_r e_r \in V'_{m-2},$$

jer vektori $\mathscr{A} e_1, \ldots, \mathscr{A} e_s, e_{s+1}, \ldots, e_r$ leže u V'_{m-2}.
Pošto je $V_{m-2} \cap V'_{m-2} = \{\mathbb{0}\}$, to imamo:

$$\beta_1 \mathscr{A} e_1 + \cdots + \beta_s \mathscr{A} e_s + \beta_{s+1} e_{s+1} + \cdots + \beta_r e_r = \mathbb{0}.$$

Pošto su vektori $\mathscr{A} e_1, \ldots, \mathscr{A} e_s, e_{s+1}, \ldots, e_r$ linearno nezavisni, to $\beta_1 = \cdots = \beta_s = \beta_{s+1} = \cdots = \beta_r = 0$ i $b = \mathbb{0}$.
Primijetimo da je sistem vektora:

$$\begin{array}{c|l} V'_{m-1} & e_1 \ldots e_s \\ V'_{m-2} & \mathscr{A} e_1 \ldots \mathscr{A} e_s \, e_{s+1} \ldots e_r \\ V_{m-2} & \mathscr{A}^2 e_1 \ldots \mathscr{A}^2 e_s \, \mathscr{A} e_{s+1} \ldots \mathscr{A} e_r \end{array}$$

linearno nezavisan, budući da su podsistemi $\{e_1, \ldots, e_s\}$, $\{\mathscr{A} e_1, \ldots, \mathscr{A} e_s, e_{s+1}, \ldots, e_r\}$ i $\{\mathscr{A}^2 e_1, \ldots, \mathscr{A}^2 e_s, \mathscr{A} e_{s+1}, \ldots, \mathscr{A} e_r\}$ linearno nezavisni i leže respektivno u potprostorima V'_{m-1}, V'_{m-2} i V_{m-2}, čija je suma V: $V = V_{m-2} \oplus V'_{m-2} \oplus V'_{m-1}$.

Korak III. Razmotrimo trojku potprostora $V_{m-4} \subseteq V_{m-3} \subseteq V_{m-2}$ i nastavimo isti algoritam kao u prethodnim koracima.
Broj ovakvih koraka je konačan, jer je prostor V konačnodimenzionalan. Nakon konačnog broja koraka doći ćemo do baze u prostoru V, koja je predstavljena u sljedećoj tablici:

$V_m = V$		
$V_{m-1} \oplus V'_{m-1} = V_m$	V'_{m-1}	$e_1 \dots e_s$
$V_{m-2} \oplus V'_{m-2} = V_{m-1}$	V'_{m-2}	$\mathscr{A} e_1 \dots \mathscr{A} e_s \, e_{s+1} \dots e_r$
$V_{m-3} \oplus V'_{m-3} = V_{m-2}$	V'_{m-3}	$\mathscr{A}^2 e_1 \dots \mathscr{A}^2 e_s \, \mathscr{A} e_{s+1} \dots \mathscr{A} e_r \, e_{r+1} \dots e_t$
$\dots$	$\dots$	$\dots$
$V_0 \oplus V'_0 = V_1$	V'_0	$\mathscr{A}^{m-1} e_1 \dots \mathscr{A}^{m-1} e_s \, \mathscr{A}^{m-2} e_{s+1} \dots \mathscr{A}^{m-2} e_r \, \mathscr{A}^{m-3} e_{r+1} \dots \mathscr{A}^{m-3} e_t \dots$
$\{\mathbb{0}\} = V_0$		

Razmotrimo neka svojstva sistema vektora iz posljednje tablice.
1. Svaki vektor iz posljednje vrste tablice se pod dejstvom operatora $\mathscr{A}$ slika u nula-vektor. Drugim riječima, u posljednjoj vrsti se nalaze svojstveni vektori operatora $\mathscr{A}$ (podsjetimo da je jedina svojstvena vrijednost operatora $\mathscr{A}$ nula.)
2. Izaberimo proizvoljnu kolonu tablice. Neka je indeks izabrane kolone i i neka ona sadrži k vektora. Numerišimo vektore iz ove kolone redom odozdo prema gore:

$$h_1 = \mathscr{A}^{k-1} e_i, \; h_2 = \mathscr{A}^{k-2} e_i, \dots, h_{k-1} = \mathscr{A} e_i, h_k = e_i.$$

Tada važi:
a) Sistem vektora $h_1, \dots, h_k$ je linearno nezavisan.
b) $\mathscr{A} h_1 = \mathbb{0}$, $\mathscr{A} h_2 = h_1, \dots, \mathscr{A} h_k = h_{k-1}$.
c) Potprostor $W = Lin\{h_1, \dots, h_k\}$ je invarijantan za operator $\mathscr{A}$.
d) Matrica suženja operatora $\mathscr{A}|_W$ u bazi $h_1, \dots, h_k$ ima oblik $J_k(0)$.
Sada numerišimo vektore tablice počevši od prve kolone redom, odozdo prema gore. Ovaj sistem h je baza u kojoj matrica nilpotentnog operatora $\mathscr{A}$ ima oblik (6.1). Teorema je dokazana.
Primjedba
1. Iz prethodnog dokaza, prema konstrukciji baze h, slijedi da svakoj koloni u tablici odgovara jedna Žordanova ćelija $J_k(0)$.
2. Prilikom konstrukcije baze h moguće su različite numeracije kolona, tj. različite numeracije svojstvenih vektora u posljednjoj vrsti. Iz dokaza je jasno da ovakve različite numeracije kolona dovode do zamjene Žordanovih ćelija mjestima.
Prethodna primjedba nam dozvoljava da izvučemo sljedeći zaključak:

Tvrđenje 6.1. *Žordanova forma operatora je jedinstvena s tačnošću do zamjene Žordanovih ćelija mjestima.*

Ovo tvrđenje nas navodi na dodatni zaključak o sličnim matricama:

Tvrđenje 6.2. *Matrice su slične* $\iff$ *imaju istu Žordanovu formu (s tačnošću do zamjene ćelija mjestima).*

Naglasimo da prethodna dva tvrđenja važe za slučaj opšteg (ne obavezno nilpotentnog) operatora $\mathscr{A}$.

6.2 Žordanova forma opšteg linearnog operatora

Sada se osvrnimo na opšti slučaj, tj. situaciju kada operator $\mathscr{A}$ nije obavezno nilpotentan. Najprije razmotrimo lakšu situaciju kada operator ima jedinstvenu svojstvenu vrijednost.

Lema 6.1. *Neka je V kompleksan vektorski prostor i λ jedinstvena svojstvena vrijednost operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$. U prostoru V postoji baza h u kojoj matrica operatora $\mathscr{A}$ ima oblik:*

$$A(h) = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{k_p}(\lambda) \end{pmatrix},$$

Dokaz
Primijetimo da je operator $\mathscr{B} = \mathscr{A} - \lambda\mathscr{I}$ nilpotentan. Prema prethodnoj teoremi postoji baza h u kojoj matrica operatora $\mathscr{B}$ ima oblik (6.1). Tada iz jednakosti:

$$A(h) = B(h) + \lambda I,$$

slijedi tvrđenje Leme.

Teorema 6.3. *Neka je V kompleksan vektorski prostor i $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ operator čiji je karakteristični polinom zadat sa:*

$$\chi_{\mathscr{A}}(t) = (-1)^n (t-\lambda_1)^{l_1} (t-\lambda_2)^{l_2} \dots (t-\lambda_k)^{l_k},$$

gdje su $l_1, \dots, l_k$ algebarske kratnosti svojstvenih vrijednosti, $l_1 + l_2 + \dots + l_k = n$.
Tada u V postoji baza h, takva da

$$A(h) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{pmatrix},$$

gdje kvadratne matrice $A_1, \dots, A_k$ imaju sljedeći oblik:

$$A_i = \begin{pmatrix} J_{i_1}(\lambda_i) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{i_2}(\lambda_i) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{i_p}(\lambda_i) \end{pmatrix},$$

$i_1 + \dots + i_m = l_i$, $i = 1, \dots, k$.

Dokaz ove teoreme ćemo propustiti.

Definicija 6.3. *Bazu h, u kojoj matrica operatora ima oblik Žordanove forme ćemo nazivati kanonskom bazom.*

Primjeri.

1. Naći kanonsku bazu i Žordanovu formu matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Karakteristični polinom je zadat sa $\chi_A(t) = det(A - tI) = -(t-3)(t-2)^2$, pa su svojstvene vrijednosti matrice $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$. Prva svojstvena vrijednost ima algebarsku kratnost 1, a druga kratnost 2.
Pošto je svojstvena vrijednost $\lambda_1 = 3$ algebarske kratnosti 1, to možemo tvrditi da njoj odgovara tačno jedan linearno nezavisni svojstveni vektor zadat jednakošću $Ah_1 = 3h_1$. Ovom svojstvenom vektoru će odgovarati jedna (jednodimenzionalna) Žordanova ćelija.
S druge strane, svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2 = 2$ može odgovarati jedan ili dva linearno nezavisna svojstvena vektora. Ove dvije moguće situacije možemo prikazati u obliku sljedećih dijagrama:

$$\begin{array}{cc} & \cdot h_3 \\ h_1\cdot & \cdot h_2 \end{array} \qquad \textit{ili} \qquad \begin{array}{ccc} h_1 & h_2 & h_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Tačkice u donjim vrstama stoje umjesto svojstvenih vektora.
U drugom slučaju, matrica A ima tri linearno nezavisna svojstvena vektora, pa je to matrica proste strukture (baza od svojstvenih vektora) i njena Žordanova forma će biti dijagonalnog oblika (imaće tri jednodimenzionalne Žordanove ćelije). Pri tome će kanonsku bazu činiti svojstveni vektori h_1, h_2, h_3.
U prvom slučaju, matrica će imati dva svojstvena vektora h_1, h_2, a treći vektor iz kanonske baze ćemo tražiti iz jednakosti $(A - \lambda_2 I)h_3 = h_2$.
Kako bismo razjasnili koji od ova dva slučaja ima mjesto, dovoljno je provjeriti rang matrice $A - \lambda_2 I$. Ukoliko je rang ove matrice 1, to bi značilo da svojstvenoj vrijednosti λ_2 odgovaraju $3-1 = 2$ linearno nezavisna svojstvena vektora h_2 i h_3, pa bi imao mjesto drugi slučaj. Ukoliko, naprotiv, $rank(A - \lambda_2 I) = 2$, to ima mjesto prvi slučaj.
Lako je provjeriti da $rank(A - 2I) = 2$, što znači da ima mjesto lijevi dijagram i Žordanova forma sadrži dvije ćelije:

$$A\,(h) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Prva dva vektora u kanonskoj bazi su svojstveni vektori matrice A: $(A-3I)h_1 = 0$, $(A-2I)h_2 = 0$. Vektor h_3 ćemo dobiti iz jednakosti $(A - 3I)h_3 = h_2$.

Iz jednakosti $(A - 3I)h_1 = 0$ nalazimo $h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Dalje, iz $(A - 2I)h_2 = 0$ imamo $h_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Konačno jednakost $(A - 2I)h_3 = h_2$ vodi nehomogenom sistemu linearnih jednačina

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {h_3}^1 \\ {h_3}^2 \\ {h_3}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rješavanjem ovog sistema dobijamo $h_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Primijetimo da je moguća i drugačija numeracija vektora baze, u kojoj bi ćelije u Žordanovoj formi matrice zamijenile mjesta:

$$A(h) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Neka je $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(M_2 \to M_2)$ zadat sa $\mathcal{T}f = -f - f'$. Naći Žordanovu formu $T(h)$ matrice operatora $\mathcal{T}$.
Najprije zapišimo matricu operatora u odnosu na bazu $g = \{1, t, t^2\}$. Imamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}1 &= -1; \\ \mathcal{T}t &= -t - 1; \\ \mathcal{T}t^2 &= -t^2 - 2t, \end{aligned}$$

pa je matrica operatora

$$T = T(g) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Karakteristični polinom operatora je $\chi_{\mathcal{T}}(t) = (-1-t)^3$, pa je $\lambda_1 = -1$ svojstvena vrijednost algebarske kratnosti 3. Dakle, operator $\mathcal{T}$ može imati 1, 2 ili 3 linearno nezavisna svojstvena vektora. Ovim trima situacijama odgovaraju sljedeći dijagrami:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdot h_3 & & & & & & \\ \cdot h_2 & & & \cdot h_3 & & & h_1 \quad h_2 \quad h_3 \\ \cdot h_1 & \textit{ili} & h_1\cdot & \cdot h_2 & \textit{ili} & & \cdot \quad\ \ \cdot \quad\ \ \cdot \end{array}$$

U zavisnosti od toga koja od ovih situacija ima mjesto, Žordanova forma se može sadržati 1, 2 ili 3 ćelije:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{ili} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lako je izračunati da $rank(A - (-1)I) = 2$ odakle slijedi da ima mjesto prva situacija.

Glava 7

Euklidski i unitarni prostori

7.1 Skalarni proizvod. Euklidski prostor.

Primijetimo da smo u prethodnom izlaganju koristili isključivo one operacije nad vektorima koje su uvedene u definiciji vektorskog prostora: sabiranje dva vektora i množenje vektora brojem (skalarom). Na ovaj način smo razvili sadržajnu teoriju, ali nismo dotakli neke važne pojmove. Na primjer, sve do sada ne raspolažemo pojmom dužine vektora ili ugla između dva vektora.
U ovom poglavlju ćemo definisati operaciju množenja dva vektora, uz pomoć koje ćemo obogatiti strukturu u vektorskom prostoru. Koristeći tu bogatiju strukturu, uvešćemo nove pojmove i razviti sadržajniju teoriju u narednim poglavljima.

Definicija 7.1. *Skalarnim proizvodom dva elementa vektorskog prostora V nad poljem realnih brojeva, naziva se operacija:*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

takva da su zadovoljene sljedeće aksiome:

1. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle,\ \forall x, y \in V.$
2. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle,\ \forall x, y \in V,\ \alpha \in \mathbb{R}.$
3. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle,\ \forall x, y, z \in V.$
4. $\langle x, x\rangle \geq 0,\ \forall x \in V,$ *pri čemu* $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = \mathbb{0}.$

Definicija 7.2. *Vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ u kome je uvedena operacija skalarnog proizvoda se naziva euklidskim prostorom.*

Oznaka. Kada budemo željeli naglasiti da je u nekom prostoru uveden skalarni proizvod, tj. da je taj prostor euklidski, onda ćemo ga označavati sa E.
Nakon gore uvedenih definicija se postavlja pitanje da li se u svakom konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru može uvesti operacija skalarnog proizvoda i na koji način.
Primjer 1.
Razmotrimo trodimenzionalni prostor geometrijskih vektora V^3. Za $\vec{a}, \vec{b} \in V^3$ uvedimo operaciju množenja na sljedeći način:

$$\langle \vec{a}, \vec{b}\rangle = \mid \vec{a} \mid \cdot \mid \vec{b} \mid \cdot cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

Lako je provjeriti da ova operacija zadovoljava sve četiri aksiome skalarnog proizvoda. Stoga, uvodeći skalarni proizvod na ovaj način, vektorski prostor V^3 možemo pretvoriti u euklidski prostor.

Primjer 2. Neka su $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.
Uvedimo operaciju množenja vektora x i y na sljedeći način:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i. \tag{7.1}$$

Tada:

1. $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot x_i = \langle y, x\rangle$.
2. $\langle \alpha x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha \cdot x_i \cdot y_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = \alpha\langle x, y\rangle$.
3. $\langle x + y, z\rangle = \sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) \cdot z_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot z_i + \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot z_i = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.
4. $\langle x, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$, $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = \mathbb{0}$.

Tako smo se ubijedili da operacija (7.1) zadovoljava sve četiri aksiome skalarnog proizvoda. Ovo je standardan način da se prostor $\mathbb{R}^n$ pretvori u euklidski prostor, koji ponekad označavamo sa E^n.

Zadatak.

Neka su u $\mathbb{R}^3$ zadati vektori $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.
Tada je njihov skalarni proizvod jednak $\langle x, y\rangle = 1 \cdot 7 + 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 4 = 3$.

Svojstva.

1. $\langle \mathbb{0}, x\rangle = 0$.
2. $\langle x, \alpha y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$.
3. $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$.

7.2 Dužina i ugao

Teorema 7.1. *(Nejednakost Švarca ili nejednakost Koši-Bunjakovskog)*
Za proizvoljne $x, y \in E$ važi:

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle, \tag{7.2}$$

pri čemu jendakost ima mjesto ako i samo ako $x = ty$.

Dokaz:
Ukoliko je $x = \mathbb{0}$, to nejednakost (7.2) očigledno važi.
Sada razmotrimo slučaj kada $x \neq \mathbb{0}$. Za proizvoljno $t \in R$ važi

$$0 \leq \langle tx - y, tx - y \rangle = t^2 \langle x, x \rangle - 2t \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle, \forall t \in R. \tag{7.3}$$

(7.3) je kvadratna nejednakost po promjenljivoj t. Da bi kvadratna funkcija sa desne strane bila pozitivna za svako t, diskriminanta ove funkcije treba da bude negativna:

$$4\langle x, y\rangle^2 - 4\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq 0,$$

tj.

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle.$$

Ako je $\langle x, y\rangle^2 = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \iff y = tx$. Dakle, ukoliko su dva vektora kolinearna, (7.2) se pretvara u jednakost.

Definicija 7.3. *Dužinom vektora $x \in E$ se naziva broj $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.*

Primjedba. $|x| \geq 0$, pri čemu $|x| = 0 \iff x = \mathbb{0}$.
Primjedba. Lako je primijetiti da se nejednakost (7.2) može zapisati u obliku:

$$det \begin{pmatrix} \langle x, x\rangle & \langle x, y\rangle \\ \langle y, x\rangle & \langle y, y\rangle \end{pmatrix} \geq 0.$$

Teorema 7.2. *(Nejednakost trougla) Za bilo koja dva vektora x i y važi nejednakost: $|x| + |y| \geq |x + y|$.*

Dokaz:
Imamo da:

$$0 \leq |x + y|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + 2\langle x, y\rangle + \langle y, y\rangle.$$

Dakle,

$$0 \leq |x|^2 + |y|^2 + 2\langle x, y\rangle \leq |x|^2 + |y|^2 + 2|\langle x, y\rangle|.$$

Odavde,

$$|x + y|^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2.$$

Iz posljednje nejednakosti slijedi Teorema.

Definicija 7.4. *Uglom između vektora $x, y \in E$ se naziva broj $\phi, 0 \leq \phi \leq \pi$, takav da je:*

$$cos\phi = \frac{\langle x, y\rangle}{|x|\,|y|}.$$

7.3 Ortogonalni vektori

Definicija 7.5. *Vektori x i y se nazivaju ortogonalnim, ako $\langle x, y\rangle = 0$.*

Tvrđenje 7.1. *Neka je vektor x ortogonalan svakom vektoru u E. Tada je $x = \mathbb{0}$.*

Dokaz ovog tvrđenja je očigledan (slijedi iz četvrte aksiome skalarnog proizvoda).

Definicija 7.6. *Sistem vektora $f_1, f_2, \ldots, f_m$ se naziva ortogonalnim ako:*

$$\langle f_i, f_j\rangle = 0,\ \forall i, j,\ 1 \leq i, j \leq m,\ i \neq j.$$

Definicija 7.7. *Sistem vektora $e_1, e_2, \ldots, e_m$ se naziva ortonormiranim ako:*

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j. \\ 1, & i = j, \end{cases}$$

Primjedba. Simbol δ_{ij} se naziva simbolom Kronekera.

Teorema 7.3. *Ortonormirani sistem vektora je linearno nezavisan.*

Dokaz: Neka je $e_1, e_2, \ldots, e_m$ ortonormiran sistem. Posmatrajmo jednačinu:

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_m e_m = \mathbb{0}. \tag{7.4}$$

Pomnožimo jednačinu (7.4) skalarno sa e_1 :

$$\alpha_1\langle e_1, e_1\rangle + \alpha_2\langle e_2, e_1\rangle + \cdots + \alpha_m\langle e_m, e_1\rangle = \langle \mathbb{0}, e_1\rangle. \tag{7.5}$$

Iz ove jednačine slijedi da je $\alpha_1 = 0$. Ukoliko dalje pomnožimo (7.4) vektorima $e_2, \ldots, e_m$ redom dobijamo $\alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$. Ovo znači da je sistem $e_1, e_2, \ldots, e_m$ linearno nezavisan.

Teorema 7.4. *U svakom konačnodimenzionalnom euklidskom prostoru E postoji ortonormirana baza.*

Dokaz:
Dokaz ćemo izvesti indukcijom po dimenziji prostora $dim\,E = n$.
Neka je $dim\,E = 1$. Tada nenulti vektor $\{x\}$ čini bazu prostora E, a vektor $e = \frac{x}{|x|}$ ortonormiranu bazu u E.
Sada pretpostavimo da teorema važi za $(n-1)-$dimenzionalni prostor i dokažimo da važi kada je $dim\,E = n$.
Neka je $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ neka baza u E, a E_1 potprostor u E, tako da je $dim\,E_1 = n-1$. U prostoru E_1 po induktivnoj pretpostavci postoji ortonormirana baza $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}$. Pretpostavimo da $f_n \notin E_1 = Lin\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}\}$. Definišimo:

$$g_n = f_n - \alpha_1 e_1 - \cdots - \alpha_{n-1} e_{n-1} \neq \mathbb{0}.$$

Koeficijente α_i možemo izabrati tako da:

$$\langle g_n, e_i\rangle = 0,\ i = 1, \ldots, n-1.$$

Zaista:

$$0 = \langle g_n, e_1 \rangle = \langle f_n, e_1 \rangle - \alpha_1 \langle e_1, e_1 \rangle - \alpha_2 \langle e_2, e_1 \rangle - \cdots - \alpha_{n-1} \langle e_{n-1}, e_1 \rangle.$$

Koristeći ortonormiranost sistema $\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$, imamo $\alpha_1 = \langle f_n, e_1 \rangle$.
Slično iz $0 = \langle g_n, e_2 \rangle$, dobijamo da je $\alpha_2 = \langle f_n, e_2 \rangle$, odnosno iz $0 = \langle g_n, e_{n-1} \rangle$ da je $\alpha_{n-1} = \langle f_n, e_{n-1} \rangle$. Konačno, definišimo $e_n = \frac{g_n}{|g_n|}$. Tada je $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza u E.
Primjedba. Neka je $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza u E. Tada se proizvoljni vektor $x \in E$ može razložiti po toj bazi:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$

Tada je lako provjeriti da za koeficijente α_i važi:

$$\langle x, e_1 \rangle = \alpha_1, \langle x, e_2 \rangle = \alpha_2, \ldots, \langle x, e_n \rangle = \alpha_n.$$

7.4 Matrica Grama

Definicija 7.8. *Neka je dat sistem vektora $f = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$. Matricom Grama ovog sistema vektora naziva se sljedeća matrica:*

$$\Gamma(f) = \begin{pmatrix} \langle f_1, f_1 \rangle & \langle f_1, f_2 \rangle & \ldots & \langle f_1, f_m \rangle \\ \langle f_2, f_1 \rangle & \langle f_2, f_2 \rangle & \ldots & \langle f_2, f_m \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle f_m, f_1 \rangle & \langle f_m, f_2 \rangle & \ldots & \langle f_m, f_m \rangle \end{pmatrix}.$$

Svojstva:
1. Razmotrimo matricu f, čije su kolone vektori $f_1, f_2, \ldots, f_m$ redom: $f = (f_1\, f_2 \ldots f_m)$. Tada je transponovana matrica zadata sa $f^T = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$. Matrica Grama sistema f se može zapisati u sljedećem obliku: $\Gamma(f) = f^T \cdot f$.
2. Matrica Grama je simetrična matrica, tj. $\Gamma(f)^T = \Gamma(f)$.

Teorema 7.5. *Sistem vektora $f = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ je linearno zavisan ako i samo ako det* $\Gamma(f) = 0$.

Dokaz:
Neka su $f_1, f_2, \ldots, f_m$ linearno zavisni. Tada:

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \cdots + \alpha_m f_m = \mathbb{0}, \tag{7.6}$$

pri čemu postoji $\alpha_i \neq 0$, za i $= \overline{1, m}$.

Ukoliko jednačinu (7.6) pomnožimo redom sa $f_1, f_2, \ldots, f_m$ skalarno, dobijamo sistem linearnih jednačina:

$$\begin{cases} \alpha_1\langle f_1, f_1\rangle + \alpha_2\langle f_1, f_2\rangle + \cdots + \alpha_m\langle f_1, f_m\rangle = 0; \\ \alpha_1\langle f_1, f_2\rangle + \alpha_2\langle f_2, f_2\rangle + \cdots + \alpha_m\langle f_2, f_m\rangle = 0; \\ \vdots \\ \alpha_1\langle f_1, f_m\rangle + \alpha_2\langle f_2, f_m\rangle + \cdots + \alpha_m\langle f_m, f_m\rangle = 0. \end{cases}$$

Ovo je sistem jednačina sa m nepoznatih $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$. Iz (7.6) znamo da ovaj sistem ima netrivijalno rješenje. Matrica sistema je:

$$\begin{pmatrix} \langle f_1, f_1\rangle & \langle f_1, f_2\rangle & \ldots & \langle f_1, f_m\rangle \\ \langle f_2, f_1\rangle & \langle f_2, f_2\rangle & \ldots & \langle f_2, f_m\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle f_m, f_1\rangle & \langle f_m, f_2\rangle & \ldots & \langle f_m, f_m\rangle \end{pmatrix}.$$

Ovo je matrica Grama $\Gamma(f)$. Iz teorije sistema linearnih jednačina znamo da je matrica $\Gamma(f)$ singularna.
Obrnuto, pretpostavimo da je $det\,\Gamma(f) = 0$. Tada su kolone matrice $\Gamma(f)$ linearno zavisne, pa se jedna npr. kolona m može izraziti kao linearna kombinacija ostalih:

$$\langle f_j, f_m\rangle = \beta_1\langle f_j, f_1\rangle + \cdots + \beta_{m-1}\langle f_j, f_{m-1}\rangle, \forall j = \overline{1, m}.$$

Odavde:

$$\langle f_j, \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \cdots + \beta_{m-1} f_{m-1} - f_m\rangle = 0,\ \forall j = \overline{1, m},$$

pa je vektor $\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \cdots + \beta_{m-1} f_{m-1} - f_m$ ortogonalan sa vektorima $f_1, f_2, \ldots, f_m$. Ovo je moguće samo ako

$$\beta_1 f_1 + \beta_2 f_2 + \cdots + \beta_{m-1} f_{m-1} - f_m = \mathbb{0}. \tag{7.7}$$

Linearna kombinacija (7.7) je netrivijalna, jer je skalar uz f_m jednak -1. Ovo znači da je sistem vektora $\{f_1, \ldots, f_m\}$ linearno zavisan.

Teorema 7.6. *Za svaki sistem vektora $f = \{f_1, \ldots, f_m\}$ važi $det\,\Gamma(f) \geq 0$, pri čemu je $det\,\Gamma(f) = 0$ ako i samo ako je sistem $f = \{f_1, \ldots, f_m\}$ linearno zavisan.*

Dokaz
Ukoliko je sistem $f = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ linearno zavisan, to iz prethodne teoreme $det\,\Gamma(f) = 0$. Razmotrimo slučaj kada je sistem $f = \{f_1, \ldots, f_m\}$ linearno nezavisan. Možemo smatrati da je f baza u $E^m = Lin\{f_1, \ldots, f_m\}$. Neka je $\widetilde{f} = f \cdot S$ druga baza u E^m, a S matrica prelaska sa baze f na bazu $\widetilde{f}$. Tada,

$$\widetilde{\Gamma} = \Gamma(\widetilde{f}) = \Gamma(f \cdot S) = (fS)^T \cdot fS = S^T f^T f S = S^T \Gamma(f) S. \tag{7.8}$$

Sada možemo pretpostaviti da je $\widetilde{f}$ ortonormirana baza. Tada je njena matrica Grama jedinična matrica I. Iz prethodne jednakosti izvodimo:

$$I = S^T \Gamma(f) S.$$

Uzimajući determinante matrica u prethodnoj jednakosti, imamo:

$$1 = (detS)^2 det\Gamma(f),$$

pa zbog $(det\,S)^2 > 0$, slijedi da je $det\,\Gamma(f) > 0$.
Primjedba. Ako su obije baze ortonormirane, tada za matricu prelaska S važi $S^T S = I$.

Definicija 7.9. *Matrica S za koju važi $S^T S = I$ se naziva ortogonalnom.*

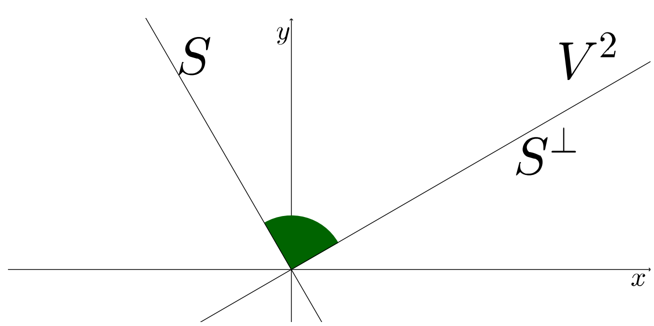
Primjedba. Nejednakost Koši-Bunjakovskog možemo razmatrati kao parcijalni slučaj Teoreme 7.6 za sistem koji sadrži $n = 2$ vektora.

7.5 Ortogonalna dopuna skupa

Definicija 7.10. *Ortogonalnom dopunom skupa $X \subseteq E$ se naziva skup vektora*

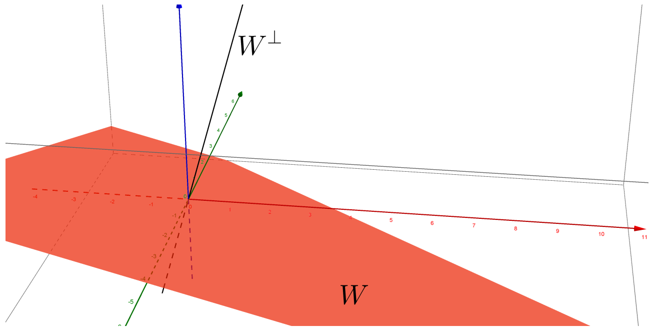
$$X^{\perp} = \{y \in E | \langle x, y\rangle = 0,\ \forall x \in X\}.$$

Svojstva:
1. $X^{\perp}$ je potprostor u E. Zaista, neka su $y_1, y_2 \in X^{\perp}$. Tada, $\langle x, y_1 + y_2\rangle = 0, \forall x \in X$, tj. $\langle x, y_1\rangle + \langle x, y_2\rangle = 0$, $\forall x \in X$, pa je $y_1 + y_2 \in X^{\perp}$.
Dalje, neka je $y_1 \in X^{\perp}$, tada je lako vidjeti da $\alpha y_1 \in X^{\perp}$, $\forall \alpha \in P$.
2. Ako je $W \subset E$ potprostor, tada je $W \oplus W^{\perp} = E$.
3. Ako je W potprostor, tada je $(W^{\perp})^{\perp} = W$.
4. Ako je W potprostor u E i $dim\,W = k$, tada u E postoji sistem vektora $a_1, a_2, \ldots, a_k$, takav da je $W^{\perp} = \{x | \langle a_i, x\rangle = 0, \forall i = \overline{1,k}\}$.
Primjer 1. Posmatrajmo potprostor S (pravu koja prolazi kroz koordinatni početak) prostora V^2. Ortogonalna dopuna ovog potprostora je prava $S^{\perp}$, koja sadrži koordinatni početak i koja sa pravom S zaklapa ugao od 90° (Slika 7.1)



Slika 7.1

Primjer 2. Posmatrajmo potprostor W (ravan koja prolazi kroz koordinatni početak) prostora V^3. Ortogonalna dopuna ovog potprostora je prava $W^{\perp}$, koja sadrži koordinatni početak i koja sa svakom pravom $S \subset W$, $O(0,0,0) \in S$ zaklapa ugao od 90° (Slika 7.2)



Slika 7.2

7.6 Unitarni prostori

Definicija 7.11. *Unitarnim prostorom U nazivamo vektorski prostor nad poljem $\mathbb{C}$ u kojem je uvedena operacija skalarnog proizvoda*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : U \times U \to \mathbb{C},$$

tako da važe sljedeće aksiome:
1. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;
2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;
3. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$;
4. $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R} \geq 0$, *pri čemu* $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = \mathbb{0}$.

Naglasimo da oznaku $\overline{\langle y, x \rangle}$ koristimo za kompleksnu konjugaciju broja iz $\mathbb{C}$.

Primjer. Neka su $\xi, \eta \in \mathbb{C}^n$, $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$.

Skalarni proizvod u prostoru $\mathbb{C}^n$ se može uvesti na sljedeći način:

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\eta}_i.$$

Provjerite da su sve aksiome skalarnog proizvoda zadovoljene. Uvodeći na ovaj način operaciju skalarnog proizvoda, u prostoru $\mathbb{C}$ uvodimo strukturu unitarnog prostora.

7.6.1 Razlika između euklidskog i unitarnog prostora

Većina svojstava i tvrđenja koja važe za euklidski prostor, se mogu primijeniti i na unitarni prostor. Zato ćemo ovdje kratko navesti samo nekoliko osnovnih razlika.
1. $\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle$.
2. Nejednakost Koši-Bunjakovskog u unitarnom prostoru se formuliše na sljedeći način:

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle.$$

Dokaz
Ako je $x = \mathbb{0}$, dokaz je trivijalan. Za $x \neq \mathbb{0}$ imamo $\langle tx - y, tx - y\rangle \geq 0, \forall x, y \in U, \forall t \in \mathbb{C}$. Odavde:

$$0 \leq \langle tx - y, tx - y\rangle = t\bar{t}\langle x, x\rangle - t\langle x, y\rangle - \bar{t}\langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle.$$

Izaberimo $t = \frac{\langle y,x\rangle}{\langle x,x\rangle}$ i uvrstimo u prethodnu nejednakost:

$$-\frac{\langle x, y\rangle\overline{\langle y, x\rangle}}{\langle x, x\rangle} + \langle y, y\rangle \geq 0,$$

tj.

$$-\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \leq -\langle x, y\rangle\overline{\langle y, x\rangle},$$

odnosno:

$$\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle \geq |\langle x, y\rangle|^2.$$

3. U unitarnom prostoru ne postoji sadržajan pojam ugla između dva vektora.
4. Neka je $f = \{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ sistem vektora u unitarnom prostoru. Matrica Grama $\Gamma(f)$ nije simetrična, za njene elemente važi $\alpha_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}$. Ovakva matrica se naziva ermitskom.

Glava 8

Kvadratne forme u euklidskom prostoru

8.1 Definicija i primjeri

Definicija 8.1. *Kvadratnom formom u Euklidovom prostoru E^n se naziva funkcija $\mathcal{A} : E^n \to \mathbb{R}$ koja je data formulom*

$$\mathcal{A}(x) = \langle Ax, x \rangle,$$

gdje je A simetrična matrica $n \times n$.

Primjer. Neka su $x \in E^3$ i neka je $\mathcal{A}(x) = {x_1}^2 - x_1x_3 - 3x_2x_3 + {x_3}^2$.
Matrica ove kvadratne forme je:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Zaista, vektor $Ax \in E^3$ je:

$$Ax = \begin{pmatrix} x_1 - \frac{1}{2}x_3 \\ -\frac{3}{2}x_3 \\ -\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2 + x_3 \end{pmatrix},$$

pa je:

$$\mathcal{A}(x) = \langle Ax, x \rangle = {x_1}^2 - \frac{1}{2}x_1x_3 - \frac{3}{2}x_2x_3 - \frac{1}{2}x_1x_3 - \frac{3}{2}x_2x_3 + {x_3}^2 = {x_1}^2 - x_1x_3 - 3x_2x_3 + {x_3}^2$$

Iz prethodnog primjera je lako primijetiti da svakoj kvadratnoj formi odgovara tačno jedna simetrična matrica i obratno. Dakle, postoji 1-1 relacija između kvadratnih formi i simetričnih matrica. Zbog ovoga ćemo ponekad poistovjećivati kvadratnu formu sa njenom matricom.

8.2 Svođenje kvadratne forme na sumu kvadrata

Teorema 8.1. *(Metod Lagranža)*
Neka je na prostoru E^n zadata kvadratna forma $\mathcal{A}(x) = \langle Ax, x \rangle$. Tada u E^n postoji baza h tako

da je matrica $A(h)$ dijagonalna:

$$\mathcal{A}(h)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

Umjesto dokaza ove teoreme, predstavićemo algoritam svođenja na sumu kvadrata na nekoliko primjera. Ovaj algoritam se naziva metodom Lagranža.

Primjer 1. Neka je na E^3 zadata kvadratna forma:

$$\mathcal{A}(x)={x_1}^2-x_1x_3-3x_2x_3+{x_3}^2.$$

Najprije grupišimo sve sabirke koji sadrže promjenljivu x_1:

$$\mathcal{A}(x)=(x_1^2-x_1x_3)-3x_2x_3+x_3^2,$$

zatim dodajmo i oduzmimo neophodne sabirke, kako bismo izraz u zagradi dopunili do potpunog kvadrata:

$$\mathcal{A}(x)=(x_1^2-x_1x_3+\frac{1}{4}{x_3}^2)-\frac{1}{4}{x_3}^2-3x_2x_3+{x_3}^2=(x_1-\frac{1}{2}x_3)^2-3x_2x_3+\frac{3}{4}x_3^2.$$

Dalje uvodimo linearnu zamjenu promjenljivih $\xi_1=x_1-\frac{1}{2}x_3$ i dopunimo ostale sabirke do potpunog kvadrata:

$$\mathcal{A}=\xi_1^2+(-3x_2x_3+\frac{3}{4}x_3^2+3x_2^2)-3x_2^2=\xi_1^2+(\sqrt{3}x_2-\frac{\sqrt{3}}{2}x_3)^2-3x_2^2.$$

Sada uvodimo smjene $\xi_2=\sqrt{3}x_2-\frac{\sqrt{3}}{2}x_3$ i $\xi_3=x_2$.
Dakle, koristeći ukazane zamjene promjenljivih, kvadratnu formu $\mathcal{A}$ smo sveli na sumu kvadrata:

$$\mathcal{A}=\xi_1^2+\xi_2^2-3\xi_3^2.$$

Primjer 2. Razmotrimo sada sljedeću kvadratnu formu na prostoru E^4:

$$\mathcal{A}(x)=3x_1^2-x_1x_2+4x_2^2-x_1x_4-x_2x_4+3x_3^2-x_4^2.$$

Kao i u prethodnom primjeru, najprije grupišimo sve sabirke koji sadrže x_1, a zatim ih dopunimo neophodnim sabircima do potpunog kvadrata:

$$\mathcal{A}(x)=(3x_1^2-x_1x_2-x_1x_4)+4x_2^2-x_2x_4+3x_3^2-x_4^2=$$

$$=(3x_1^2-x_1x_2-x_1x_4+\frac{1}{12}x_2^2+\frac{1}{12}x_4^2+\frac{1}{6}x_2x_4)-\frac{1}{12}x_2^2-\frac{1}{12}x_4^2-\frac{1}{6}x_2x_4+4x_2^2-$$

$$-x_2x_4+3x_3^2-x_4^2=(\sqrt{3}x_1-\frac{\sqrt{3}}{6}x_2-\frac{\sqrt{3}}{6}x_4)^2+\frac{47}{12}x_2^2-\frac{7}{6}x_2x_4+3x_3^2-\frac{13}{12}x_4^2=$$

$$=(\sqrt{3}(x_1-\frac{1}{6}x_2-\frac{1}{6}x_4))^2+\frac{47}{12}(x_2^2-\frac{14}{47}x_2x_4+\frac{49}{47}x_4^2)-\frac{49}{12}x_4^2+3x_3^2-\frac{13}{12}x_4^2=$$

$$= 3(x_1 - \frac{1}{6}x_2 - \frac{1}{6}x_4)^2 + \frac{47}{12}(x_2 - \frac{7}{\sqrt{47}}x_4)^2 + 3x_3^2 - \frac{31}{6}x_4^2.$$

Uvođenjem smjena $\xi_1 = x_1 - \frac{1}{6}x_2 - \frac{1}{6}x_4$, $\xi_2 = x_2 - \frac{7}{\sqrt{47}}x_4$, $x_3 = \xi_3$, $x_4 = \xi_4$ dobijamo:

$$\mathcal{A}(\xi) = 3\xi_1^2 + \frac{47}{12}\xi^2 + 3\xi_3^2 - \frac{31}{6}\xi_4^2.$$

Dakle, kvadratna forma je svedena na sumu kvadrata sa dijagonalnom matricom:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{47}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{31}{6} \end{pmatrix}$$

Primjer 3.

$$\mathcal{A}(x) = x_1x_2 - x_2x_3 - x_2^2 + 4x_3^2 =$$

$$-(x_2^2 - x_1x_2 + x_2x_3 + \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{4}x_3^2 - \frac{1}{2}x_1x_3) + \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{4}x_3^2 - \frac{1}{2}x_1x_3 + 4x_3^2 =$$

$$= -(x_2 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3)^2 + \frac{1}{4}x_1^2 - \frac{1}{2}x_1x_3 + \frac{17}{4}x_3^2 =$$

$$= -\xi_1^2 + \frac{1}{4}(x_1^2 - 2x_1x_3 + x_3^2) + 4x_3^2 = -\xi_1^2 + \frac{1}{4}(x_1 - x_3)^2 + 4x_3^2 = -\xi_1^2 + \xi_2^2 + 4\xi_3^2.$$

Primjer 4. Razmotrimo sada kvadratnu formu zadatu sa:

$$\mathcal{A}(x) = -x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Ovdje se srijećemo sa situacijom kada nema nijednog kvadratnog člana, pa je nemoguće formirati potpun kvadrat. U ovoj situaciji ćemo najprije uvesti smjenu: $x_1 = x_3 + t$ kako bismo stvorili makar jedan kvadratni sabirak. Tada:

$$\mathcal{A}(x) = -(x_3 + t)x_3 + 2x_2x_3 = -tx_3 - x_3^2 + 2x_2x_3 =$$

$$= -(x_3^2 + \frac{1}{4}t^2 + tx_3 + x_2^2 - 2x_2x_3 - tx_2) + \frac{1}{4}t^2 + x_2^2 - tx_2 =$$

$$= -(x_3 + \frac{1}{2}t - x_2)^2 + (\frac{1}{2}t - x_2)^2 = -\xi 1^2 + \xi 3^2$$

gdje su uvedene smjene:

$$\xi_1 = x_3 + \frac{1}{2}t - x_2 = x_3 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 - x_2 = \frac{1}{2}x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_3,\ \xi_2 = \frac{1}{2}t - x_2 = \frac{1}{2}x_1 - x_2 - \frac{1}{2}x_3.$$

Predstavljeni algoritam svođenja kvadratne forme na sumu kvadrata se naziva metodom Lagranža. Dalje ćemo predstaviti još jedan metod koji se zasniva na svođenju matrice kvadratne forme na dijagonalni oblik.

Teorema 8.2. *(Metod Jakobi)*
Neka su svi glavni minori matrice A različiti od nule, tj.

$$\Delta_k \neq 0,\ k = 1, \ldots, n.$$

Tada u prostoru E^n postoji baza f, takva da se kvadratna forma svodi na sumu kvadrata s dijagonalnom matricom oblika:

$$A(f) = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_0}{\Delta_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{\Delta_1}{\Delta_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} \end{pmatrix},$$

gdje je $\Delta_0 = 1$.

Dokaz ove teoreme ćemo takođe propustiti. Umjesto dokaza, razmotrimo primjer.
Primjer 1. Neka je zadata kvadratna forma:

$$\mathcal{A}(x) = x_1x_2 - 3x_2^2 - 4x_1x_3 - x_2x_3 + 2x_3^2 + x_1^2.$$

Matrica ove forme je:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & -3 & -\frac{1}{2} \\ -2 & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix},$$

pa su glavni minori: $\Delta_0 = 1\,, \Delta_1 = 1\,, \Delta_2 = -\frac{13}{4}, \Delta_3 = \frac{25}{4}$.
Saglasno Teoremi Jakobi kanonski oblik forme je:

$$\mathcal{A}(\xi) = \xi_1^2 - \frac{1}{3}\xi_2^2 - \frac{13}{25}\xi_3^2,$$

a njena matrica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{25} \end{pmatrix}.$$

8.3 Znak i indeks kvadratne forme

Definicija 8.2. *Kvadratna forma $\langle Ax, x\rangle$ se naziva pozitivno definitnom, ako*

$$\langle Ax, x\rangle > 0, \forall x \in E^n, x \neq \mathbb{0}.$$

Definicija 8.3. *Kvadratna forma $\langle Ax, x\rangle$ se naziva negativno definitnom, ako*

$$\langle Ax, x\rangle < 0, \forall x \in E^n, x \neq \mathbb{0}.$$

Definicija 8.4. *Kvadratna forma $\langle Ax, x\rangle$ se naziva nenegativno definitnom, ako*

$$\langle Ax, x\rangle \geq 0, \forall x \in E^n.$$

Definicija 8.5. *Kvadratna forma $\langle Ax, x\rangle$ se naziva nepozitivno definitnom, ako*

$$\langle Ax, x\rangle \le 0, \forall x \in E^n.$$

Ukoliko forma nije ni nepozitivno, ni nenegativno definitna, onda kažemo da ona mijenja znak. Pošto kvadratne forme u tačnosti odgovaraju simetričnim matricama, to ćemo govoriti i o pozitivno (negativno) definitnim matricama.

Primjeri.

1. $x \in E^2$, $\mathcal{A}(x) = x_1^2 + 4x_2^2$. Očigledno je da $\mathcal{A}(x) > 0$ za svako $x \neq \mathbb{0}$, pa je ova kvadratna forma je pozitivno definitna.
2. $x \in E^2$, $\mathcal{A}(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ je nenegativno definitna kvadratna forma (ali nije pozitivno definitna).
3. $x \in E^2$, $\mathcal{A}(x) = x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2$ nije definitna(mijenja znak).
4. $x \in E^2$, $\mathcal{A}(x) = -3x_1^2 + 3x_1x_2 - x_2^2$ je negativno definitna.
5. $x \in E^2$, $\mathcal{A}(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_3 + 5x_2x_4 + 2x_3^2 + 14x_4^2$ nije definitna(mijenja znak).

Iz posljednjeg primjera možemo vidjeti da nije uvijek očigledno da li kvadratna forma (matrica) ima određen znak, posebno ako je ona definisana na prostoru veće dimenzije (tj. zavisi od mnogih promjenljivih). Zato ćemo sada formulisati kriterijum za ispitivanje da li je kvadratna forma pozitivno definitna.

Teorema 8.3. *(Kriterijum Silvestra)*
Kvadratna forma $\langle Ax, x\rangle$ je pozitivno definitna ako i samo ako $\Delta_k > 0$, $\forall k = \overline{1, n}$.

Podsjetimo da je sa Δ_k označen glavni minor matrice A reda k.

Dokaz

Neka su $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k > 0$. Tada po teoremi 8.2 postoji baza f, takva da:

$$\langle Ax, x\rangle = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}\eta_k^2,$$

gdje je $x = \sum_{k=1}^{n} \eta_k f_k$. Pošto je $\lambda_k = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k} > 0$, to $\langle Ax, x\rangle \ge 0$, za svako $x \in E^n$. Treba još pokazati da $\langle Ax, x\rangle > 0$, za $x \neq \mathbb{0}$. Pretpostavimo da za neko $x \in E^n$, $\langle Ax, x\rangle = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}\eta_k^2 = 0$. Tada, $\eta_1 = \eta_2 = \cdots = \eta_k = 0$, pa je $x = \mathbb{0}$.

Obrnuto, neka je $\langle Ax, x\rangle$ pozitivno definitna. Pretpostavimo da $\Delta_k = 0$ za neko $k = \overline{1, n}$. To znači:

$$\Delta_k = det\begin{pmatrix} \langle Ae_1, e_1\rangle & \langle Ae_1, e_2\rangle & \ldots & \langle Ae_1, e_k\rangle \\ \langle Ae_2, e_1\rangle & \langle Ae_2, e_2\rangle & \ldots & \langle Ae_2, e_k\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle Ae_k, e_1\rangle & \langle Ae_k, e_2\rangle & \ldots & \langle Ae_k, e_k\rangle \end{pmatrix} = 0$$

Odavde slijedi da su kolone matrice linearno zavisne, pa postoje netrivijalni $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ tako da:

$$\mu_1\langle Ae_i, e_1\rangle + \cdots + \mu_k\langle Ae_i, e_k\rangle = 0,\ i = \overline{1, k},$$

tj.

$$\langle Ae_i, \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \cdots + \mu_k e_k \rangle = 0,\ i = \overline{1,k}.$$

Na ovaj način smo dobili k jednakosti. Pomnožimo $i-$tu jednakost sa μ_i i saberimo sve jednakosti:

$$\langle A(\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \cdots + \mu_k e_k),\ \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \cdots + \mu_k e_k \rangle = 0.$$

Kako je A pozitivno definitna, to važi $\mu_1 e_1 + \mu_2 e_2 + \cdots + \mu_k e_k = \mathbb{0}$. Pošto su koeficijenti $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$ netrivijalni, to iz posljednje jednakosti slijedi da su vektori $e_1, e_2, \ldots, e_k$ linearno zavisni. Ovo je kontradikcija sa činjenicom da oni čine bazu. Ova kontradikcija pokazuje da, $\Delta_1 \neq 0, \ldots, \Delta_n \neq 0$. Po teoremi 8.2 postoji baza f, tako da $\langle Ax, x\rangle = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k}\eta_k^2$, gdje je $x = \sum_{k=1}^{n} \eta_k f_k$, i $\lambda_k = \frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k} = \langle Af_k, f_k\rangle > 0$. Pri tome, $\Delta_0 = 1$, pa je $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0$, tj. $\Delta_k > 0$. za svako $k = 1, \ldots, n$.

Primjer. Provjerimo da li je kvadratna forma $\langle Ax, x\rangle = x_1^2 - x_1x_2 + 3x_1x_3 + 3x_2^2 + x_3^2$ pozitivno definitna.

Matrica ove kvadratne forme je:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 3 & 0 \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pa je lako izračunati njene glavne minore: $\Delta_1 = 1 > 0$, $\Delta_2 = \frac{11}{4}$, $\Delta_3 = -4 < 0$.

Pošto je glavni minor reda 3 manji od nule, to iz kriterijuma Silvestra slijedi da ova forma nije pozitivno definitna.

Teorema 8.4. *Kvadratna forma $\langle Ax, x\rangle$ je negativno definitna $\iff$ $\Delta_{k-1}\Delta_k < 0$, za $k = \overline{1,n}$; $\Delta_0 = 1$.*

Dokaz

Kvadratna forma $\langle Ax, x\rangle$ je negativno definitna ako i samo ako je $\langle -Ax, x\rangle$ pozitivno definitna. Lako je uočiti da su minori matirce $-A$ parnog reda jednaki minorima matrice A, dok minori neparnog reda imaju suprotan znak. Odavde slijedi da je $\frac{\Delta_{k-1}}{\Delta_k} < 0$, za svako $k = \overline{1,n}$, tj. $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, $\Delta_4 > 0, \ldots$.

Primjer. Kvadratna forma je zadata sa: $\langle Ax, x\rangle = -3x_1^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 2x_2^2 - 5x_3^2$.

Njena matrica je:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -5 \end{pmatrix},$$

pa su glavni minori $\Delta_1 = -3 < 0, \Delta_2 = 2 > 0, \Delta_3 = -1 < 0$.

Saglasno prethodnoj teoremi, ova kvadratna forma je negativno definitna.

Primjedba. Kriterijum Silvestra može poslužiti i da se utvrdi da li je kvadratna forma nepozitivno (nenegativno) definitna. Iz dokaza je jasno da je za nepozitivnu definitnost kvadratne forme neophodno i dovoljno da važi $\Delta_1 \geq 0, \ldots, \Delta_n \geq 0$.

Definicija 8.6. *Indeksom kvadratne forme se naziva maksimalna dimenzija potprostora na kome je forma negativno definitna.*

Oznaka: Indeks kvadratne forme $\mathcal{A}(x) = \langle Ax, x\rangle$ se označava sa $ind\mathcal{A}$ ili $indA$.
Iz definicije je jasno da ako je A nenegativno definitna, to $indA = 0$.
Ako je A negativno definitna, $indA = n$.
Ukoliko A mijenja znak, to $0 < indA < n$.
Primjer. Indeks kvadratne forme $\mathcal{A}(x) = x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2$ je jednak 1, jer je ona negativno definitna na jednodimenzionalnom potprostoru svih vektora oblika $\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Definicija 8.7. *Normalnim oblikom kvadratne forme $\langle Ax, x\rangle$ se naziva oblik*

$$\langle A(f)x, x\rangle = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_q^2 - \xi_{q+1}^2 - \cdots - \xi_{q+s}^2,$$

gdje je $x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$, tj. kvadratna forma sa dijagonalnom matricom oblika:

$$A(f) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & O & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & O & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Dakle, matrica $A(f)$ sadrži q jedinica na dijagonali, s jedinica sa znakom "-" i $n - s - q$ nula.

Teorema 8.5. *(Zakon inercije)*
Neka su e i f baze u prostoru E^n, u kojima kvadratna forma $\langle Ax, x\rangle$ ima normalan oblik. Tada je $A(e) = A(f)$.

Dokaz
Neka je

$$\langle A(f)\xi, \xi\rangle = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_q^2 - \xi_{q+1}^2 - \cdots - \xi_{q+s}^2,$$

$$\langle A(e)\nu, \nu\rangle = \nu_1^2 + \nu_2^2 + \cdots + \nu_p^2 - \nu_{p+1}^2 - \cdots - \nu_{p+r}^2.$$

Treba dokazati da je $p = q$, $s = r$.
Jednakost $p + r = q + s$ slijedi iz toga što rang matrice A ne zavisi od izbora baze, pa je $rankA(f) = rankA(e)$.
Preostaje nam dokazati da je $p = q$. Pretpostavimo da je $p > q$. Razmotrimo dva potprostora:

$$W_e = Lin\{e_1, e_2, \ldots, e_p\},\ W_f = Lin\{f_{q+1}, f_{q+2}, \ldots, f_n\},$$

dimenzija p i $n-q$ respektivno. Iz pretpostavke $n-q+p>n$, slijedi da postoji nenulti vektor $x_0 \in W_e \cap W_f$. Ovo znači da se vektor x_0 može predstaviti kao linearna kombinacija vektora $e_1, \ldots, e_p$, a takođe vektora $f_{q+1}, \ldots, f_n$:

$$x_0 = \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_p e_p = \nu_{q+1} f_{q+1} + \cdots + \nu_n f_n.$$

Tada:

$$\langle Ax_0, x_0 \rangle = \langle A(\xi_1 e_1 + \cdots + \xi_p e_p), \xi_1 e_1 + \cdots + \xi_p e_p \rangle = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_p^2 > 0$$

$$\langle Ax_0, x_0 \rangle = \langle A(\nu_{q+1} f_{q+1} + \cdots + \nu_n f_n), \nu_{q+1} f_{q+1} + \cdots + \nu_n f_n \rangle = -\nu_{q+1}^2 - \nu_{q+2}^2 - \cdots - \nu_{q+s}^2 \leq 0.$$

Dobijene kontradiktorne nejednakosti pokazuju da je slučaj $p > q$ nemoguć. Nemogućnost nejednakosti $p > q$ se dokazuje na isti način. Dakle $p = q$.

Primjedba. Iz dokazane teoreme slijedi da je broj pozitivnih, negativnih i nenultih sabiraka pri svođenju kvadratne forme na sumu kvadrata uvijek isti.

Primjedba. Indeks kvadratne forme je broj negativnih sabiraka u njenom normalnom obliku.

Definicija 8.8. *Rangom kvadratne forme se naziva broj nenultih sabiraka u njenom normalnom obliku.*

Zaključak. Rang i indeks kvadratne forme su invarijantni u odnosu na promjenu baze. Rang i indeks kvadratne forme jednoznačno određuju njen normalni oblik, baza u kojoj forma ima normalni oblik nije jednoznačno određena.

Primjer.

Naći indeks kvadratne forme:

$$\langle Ax, x \rangle = x_1^2 - x_1 x_2 - x_2^2 - 3x_3^2 + x_2 x_4 - 5x_4^2.$$

Matrica ove forme je sljedeća:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Glavni minori su $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = -\frac{5}{4}$, $\Delta_3 = \frac{15}{4}$, $\Delta_4 = -18$ različiti od nule. Dakle, kvadratnu formu možemo svesti na sumu kvadrata metodom Jakobi.

Elementi na dijagonali su $\frac{\Delta_0}{\Delta_1} = 1$, $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = -\frac{4}{5}$, $\frac{\Delta_2}{\Delta_3} = -\frac{1}{3}$, $\frac{\Delta_3}{\Delta_4} = -\frac{5}{24}$. Pošto imamo tri negativna koeficijenta, to je indeks forme 3.

Glava 9

Linearni operatori u unitarnom prostoru

9.1 Konjugovani operator

Neka su V i W unitarni prostori i $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$.

Definicija 9.1. *Linearni operator $\mathscr{A}^* \in \mathcal{L}(W \to V)$ se naziva konjugovanim k operatoru $\mathscr{A}$, ako $\forall x \in V$ i $\forall y \in W$ važi:*

$$\langle \mathscr{A} x, y \rangle = \langle x, \mathscr{A}^* y \rangle.$$

Primijetimo da se u gornjoj jednakosti prvi skalarni proizvod uzima u prostoru W, a drugi u V.

Teorema 9.1. *Konjugovani operator $\mathscr{A}^* \in \mathcal{L}(W \to V)$ uvijek postoji i jednoznačno je određen.*

Dokaz
Najprije pretpostavimo da $\mathscr{A}^*$ postoji i dokažimo jedinstvenost. Uzmimo proizvoljno $y \in W$, tada je $\mathscr{A}^* y \in V$. Uzmimo ortonormiranu bazu $e_1, e_2, \ldots, e_n$ u V i razložimo vektor $\mathscr{A}^* y$ po toj bazi:

$$\mathscr{A}^* y = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathscr{A}^* y, e_i \rangle e_i.$$

Primijetimo da je $\langle \mathscr{A}^* y, e_i \rangle = \overline{\langle e_i, \mathscr{A}^* y \rangle} = \langle y, \mathscr{A} e_i \rangle$, pa imamo:

$$\mathscr{A}^* y = \sum_{i=1}^{n} \langle y, \mathscr{A} e_i \rangle e_i.$$

Dakle, slika svakog vektora $y \in W$ pri preslikavanju $\mathscr{A}^*$ je jednoznačno određena time gdje operator $\mathscr{A}$ slika vektore $e_1, \ldots, e_n$ iz baze prostora V. Odavde slijedi da je $\mathscr{A}^*$ jednoznačno određen.
Sada dokažimo postojanje konjugovanog operatora. Definišimo operator $\mathscr{A}^*$ na sljedeći način:

$$\mathscr{A}^* : y \in W \to \sum_{i=1}^{n} \langle y, \mathscr{A} e_i \rangle e_i \in V,$$

gdje je $e_1, \ldots, e_n$ ortonormirana baza.

Pokažimo da je operator $\mathscr{A}^*$ linearan:

$$\mathscr{A}^*(\lambda y_1+\mu y_2) = \sum_{i=1}^{n}\langle \lambda y_1+\mu y_2, \mathscr{A} e_i\rangle e_i = \lambda \sum_{i=1}^{n}\langle y_1, \mathscr{A} e_i\rangle e_i+\mu \sum_{i=1}^{n}\langle y_2, \mathscr{A} e_i\rangle e_i = \lambda\mathscr{A}^* y_1+\mu\mathscr{A}^* y_2.$$

Ostaje nam da pokažemo da je $\mathscr{A}^*$ zaista konjugovan k operatoru $\mathscr{A}$. Uzmimo proizvoljne vektore $x \in V$ i $y \in W$ i izračunajmo sljedeće skalarne proizvode:

$$\langle \mathscr{A} x, y\rangle = \langle \mathscr{A}(\sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle e_i), y\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle\langle \mathscr{A} e_i, y\rangle$$

i

$$\langle x, \mathscr{A}^* y\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle e_i, \sum_{j=1}^{n}\langle y, \mathscr{A} e_j\rangle e_j\rangle = \sum_{i,j=1}^{n}\langle x, e_i\rangle\overline{\langle y, \mathscr{A} e_j\rangle}\langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle\overline{\langle y, \mathscr{A} e_i\rangle} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\langle x, e_i\rangle\langle \mathscr{A} e_i, y\rangle.$$

U posljednjem lancu jednakosti smo koristili da je $e_1, \dots, e_n$ ortonormirana baza, kako bismo od duple sume po i, j prešli k sumi po i. (Dupla suma po i, j sadrži n^2 sabiraka, ali su samo n od njih različiti od nule, oni za koje je $i = j$.)
Pošto gornje jednakosti važe za proizvoljne vektore $x \in V$ i $y \in W$, to iz definicije slijedi da je operator $\mathscr{A}^*$ konjugovan operatoru $\mathscr{A}$.

9.2 Svojstva operacije konjugacije. Matrica konjugovanog operatora.

Svojstva operacije konjugacije
1. $(\mathscr{A}^*)^* = \mathscr{A}$;
2. $(\alpha\mathscr{A})^* = \overline{\alpha}\mathscr{A}^*$;
Dokaz
Zaista, za svako $x \in V$ i svako $y \in W$ važi:

$$\langle(\alpha\mathscr{A})x, y\rangle = \alpha\langle \mathscr{A} x, y\rangle = \alpha\langle x, \mathscr{A}^* y\rangle = \langle x, \overline{\alpha}\mathscr{A}^* y\rangle.$$

3. $(\mathscr{A} + \mathscr{B})^* = \mathscr{A}^* + \mathscr{B}^*$;
4. Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$, $\mathscr{B} \in \mathcal{L}(W \to Z)$, tada $(\mathscr{B}\mathscr{A})^* = \mathscr{A}^*\mathscr{B}^*$.
5. Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ i $det\mathscr{A} \neq 0$. Tada $det\mathscr{A}^* \neq 0$.
Dokaz
Zaista, neka je $det\mathscr{A}^* = 0$, tada $\exists y \neq \mathbb{0}$ takav da $\mathscr{A}^* y = \mathbb{0}$. Pomnoživši obije strane posljednje jednakosti sa x imamo: $\langle x, \mathscr{A}^* y\rangle = \langle x, \mathbb{0}\rangle = 0$ ili $\langle \mathscr{A} x, y\rangle = 0$.
Koristeći to da je $\mathscr{A}$ regularan, imamo $Im\mathscr{A} = V$, dakle postoji x takvo da $\mathscr{A} x = y$. Odavde i iz prethodne jednakosti imamo $\langle y, y\rangle = 0$. Dakle, $y = \mathbb{0}$. Dobijena kontradikcija dokazuje da je konjugovani operator $\mathscr{A}^*$ takođe regularan.

6. Ako je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ i $\mathscr{A}$ regularan, tada $(\mathscr{A}^{-1})^* = (\mathscr{A}^*)^{-1}$.
Dokaz
Po definiciji konjugovanog operatora:

$$\langle \mathscr{A}^{-1}x, y\rangle = \langle x, (\mathscr{A}^{-1})^* y\rangle.$$

S druge strane, operator $\mathscr{A}^*$ je invertibilan (svojstvo 5.), pa iz jednakosti $\mathscr{A}^*(\mathscr{A}^*)^{-1} = \mathscr{I}$, imamo:

$$\langle \mathscr{A}^{-1}x, y\rangle = \langle \mathscr{A}^{-1}x, \mathscr{I}y\rangle = \langle \mathscr{A}^{-1}x, \mathscr{A}^*(\mathscr{A}^*)^{-1}y\rangle = \langle \mathscr{A}\mathscr{A}^{-1}x, (\mathscr{A}^*)^{-1}y\rangle = \langle \mathscr{I}x, (\mathscr{A}^*)^{-1}y\rangle.$$

Dakle,

$$\langle \mathscr{A}^{-1}x, y\rangle = \langle x, (\mathscr{A}^*)^{-1}y\rangle, \forall x \in V, \forall y \in V.$$

Odavde iz proizvoljnosti vektora x i y slijedi da je $(\mathscr{A}^{-1})^* = (\mathscr{A}^*)^{-1}$.
Neka su V i W unitarni prostori i $dimV = n, dimW = m$. Neka su $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ i $\mathscr{A}^* \in \mathcal{L}(W \to V)$ linearni operatori. Izaberimo ortonormirane baze e i f u prostorima V i W respektivno, tada su matrice operatora $\mathscr{A}$ i $\mathscr{A}^*$:

$$A(e, f) = \{a_{ij}\}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n};$$

$$A^*(f, e) = \{a^*_{ji}\}, j = \overline{1, n}, i = \overline{1, m}.$$

Tada važi:

$$a_{ij} = \langle \mathscr{A}e_j, f_i\rangle;\ a^*_{ji} = \langle \mathscr{A}^* f_i, e_j\rangle,\ i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$$

kao i:

$$\langle \mathscr{A}e_j, f_i\rangle = \langle e_j, \mathscr{A}^* f_i\rangle.$$

Dakle, $\langle \mathscr{A}e_j, f_i\rangle = \overline{\langle \mathscr{A}^* f_i, e_j\rangle}$, tj. $a^*_{ji} = \overline{a}_{ij}$.

Definicija 9.2. *Matrica $B = \{b_{ji}\} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ se naziva konjugovanom matrici $A = \{a_{ij}\} \in \mathbb{C}^{m\times n}$, ako $b_{ji} = \overline{a_{ij}}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.*

Iz prethodnog razmatranja slijedi:

Tvrđenje 9.1. *Matrice međusobno konjugovanih operatora u ortonormiranim bazama su međusobno konjugovane.*

Tvrđenje 9.2. *$rank\mathscr{A} = rank\mathscr{A}^*$.*

Primjedba. U slučaju euklidskog prostora konjugovane matrice su transponovane matrice.

9.3 Jezgro i slika konjugovanog operatora

Posmatramo linearni operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$ i njemu konjugovani operator $\mathscr{A}^* \in \mathcal{L}(W \to V)$. Jasno je da važe inkluzije:

$$Ker\mathscr{A} \subseteq V, Im\mathscr{A} \subseteq W,\ Ker\mathscr{A}^* \subseteq W, Im\mathscr{A}^* \subseteq V.$$

Teorema 9.2.

$$V = Ker\mathscr{A} \oplus Im\mathscr{A}^*,\ W = Ker\mathscr{A}^* \oplus Im\mathscr{A}.$$

Dokaz

Neka je $x \in Ker\mathscr{A}$, tada je $\mathscr{A}x = \mathbb{0}$, dakle za svako $y \in W$ važi: $\langle \mathscr{A}x, y\rangle = \langle x, \mathscr{A}^*y\rangle = 0$. Pošto su $x \in Ker\mathscr{A}, y \in W$ proizvoljni, to znači da $Ker\mathscr{A} \perp Im\mathscr{A}^*$.
Koristeći jednakost $rank\mathscr{A} = rank\mathscr{A}^*$,

$$rank\mathscr{A} + defect\mathscr{A} = dimV \Rightarrow rank\mathscr{A}^* + defect\mathscr{A} = dimV.$$

Zaključujemo da potprostori $Ker\mathscr{A}$ i $Im\mathscr{A}^*$ zadovoljavaju sljedeća svojstva:
1. međusobno su ortogonalni;
2. presjek im je trivijalan (tj. samo nula vektor);
3. važi $dimKer\mathscr{A} + dimIm\mathscr{A}^* = dimV$.

Iz navedenih svojstava:

$$V = Ker\mathscr{A} \oplus Im\mathscr{A}^*.$$

Jednakost $W = Ker\mathscr{A}^* \oplus Im\mathscr{A}$ se dokazuje na isti način.
Zadatak. Naći konjugovane operatore operatorima: a) $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$ projekcije na osu x; b) Operatoru rotacije za $\frac{\pi}{2}$, tj. $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$ na dva načina:
1. po definiciji konjugovanog operatora;
2. preko matrica operatora.

9.4 Normalni operator

Definicija 9.3. *Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$. Operator $\mathscr{A}$ se naziva normalnim, ako je $\mathscr{A}\mathscr{A}^* = \mathscr{A}^*\mathscr{A}$.*

Lema 9.1. *Neka su operatori $\mathscr{A}, \mathscr{B} \in \mathcal{L}(V \to V)$ komutativni, tj. $\mathscr{A}\mathscr{B} = \mathscr{B}\mathscr{A}$. Tada oni imaju zajednički svojstveni vektor, tj:*

$$\exists x_0 \in V, x_0 \neq \mathbb{0}: \quad \mathscr{A}x_0 = \lambda x_0, \mathscr{B}x_0 = \mu x_0.$$

Dokaz

Neka je $W(\lambda)$ svojstveni potprostor operatora $\mathscr{A}$, koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ:

$$W(\lambda) = \{x \in V | \mathscr{A}x = \lambda x\}.$$

Uzmimo proizvoljan vektor $x \in W(\lambda)$, tada:

$$\mathscr{A}(\mathscr{B}x) = (\mathscr{A}\mathscr{B}x) = (\mathscr{B}\mathscr{A})x = \mathscr{B}(\mathscr{A}x) = \mathscr{B}\lambda x = \lambda\mathscr{B}x.$$

Zaključujemo da je $\mathscr{B}x \in W(\lambda)$, tj. da je $\mathscr{B}x$ svojstveni vektor operatora $\mathscr{A}$. Kako je $x \in W(\lambda)$ proizvoljan vektor, to je $W(\lambda)$ invarijantan potprostor operatora $\mathscr{B}$. Razmotrimo suženje operatora $\mathscr{B}$ na taj potprostor:

$$\mathscr{B}|_{W(\lambda)} \in \mathcal{L}(W(\lambda) \to W(\lambda)).$$

Pošto je $W(\lambda)$ kompleksni potprostor, to operator $\mathscr{B}|_{W(\lambda)}$ ima svojstvenu vrijednost, tj. $\exists x_0 \in W(\lambda) \quad \mathscr{B}|_{W(\lambda)}x_0 = \mu x_0$, tj. $\mathscr{B}x_0 = \mu x_0$. Kako je $x_0 \in W(\lambda)$, to je $\mathscr{A}x_0 = \lambda x_0$.

Teorema 9.3. *Operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ je normalan ,ako i samo ako u prostoru V postoji ortonormirana baza od svojstvenih vektora operatora $\mathscr{A}$.*

Dokaz
Neka je $\mathscr{A}$ normalan, tj. komutira sa svojim konjugovanim operatorom:

$$\mathscr{A}\mathscr{A}^* = \mathscr{A}^*\mathscr{A}.$$

Po Lemi 9.1 $\exists e_1 \in V$, takav da:

$$\mathscr{A}e_1 = \lambda_1 e_1 \quad \mathscr{A}^* e_1 = \mu_1 e_1, \quad |e_1| = 1.$$

u prethodnoj jednakosti smo pretpostavili da je svojstveni vektor e_1 normiran. Označimo sa V_{n-1} ortogonalnu dopunu vektora e_1 do čitavog prostora V. V_{n-1} je invarijantan za operatore $\mathscr{A}$ i $\mathscr{A}^*$. Zaista, za proizvoljan $x \in V_{n-1}$ važi:

$$\langle \mathscr{A}x, e_1 \rangle = \langle x, \mathscr{A}^* e_1 \rangle = \langle x, \mu_1 e_1 \rangle = \overline{\mu}_1 \langle x, e_1 \rangle = 0 \Rightarrow \mathscr{A}x \in V_{n-1}.$$

Dalje:

$$\langle \mathscr{A}^* x, e_1 \rangle = \langle x, \mathscr{A}e_1 \rangle = \langle x, \lambda_1 e_1 \rangle = \overline{\lambda_1} \langle x, e_1 \rangle = 0 \Rightarrow \mathscr{A}^* x \in V_{n-1}.$$

Sad možemo razmatrati suženje operatora $\mathscr{A}$ i $\mathscr{A}^*$ na V_{n-1}:

$$\mathscr{A}|_{V_{n-1}} \quad \mathscr{A}^*|_{V_{n-1}}.$$

Operatori $\mathscr{A}|_{V_{n-1}}$ i $\mathscr{A}^*|_{V_{n-1}}$ komutiraju, pa po prethodnoj Lemi imaju zajednički svojstveni vektor $e_2 \in V_{n-1} : (|e_2| = 1)$:

$$\mathscr{A}|_{V_{n-1}} e_2 = \lambda_2 e_2, \quad \mathscr{A}^*|_{V_{n-1}} e_2 = \mu_2 e_2,$$

tj:

$$\mathscr{A}e_2 = \lambda_2 e_2, \quad \mathscr{A}^* e_2 = \mu_2 e_2.$$

Takođe, pošto je V_{n-1} ortogonalna dopuna vektora e_1, to važi $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$. Dalje razmotrimo ortogonalnu dopunu V_{n-2} vektora e_2 u prostoru V_{n-1}. Na gore opisani način pokažimo da je V_{n-2} invarijantan za operatore $\mathscr{A}$ i $\mathscr{A}^*$ i razmotrimo suženja:

$$\mathscr{A}|_{V_{n-2}}, \quad \mathscr{A}^*|_{V_{n-2}}.$$

Dovodeći ovaj postupak do kraja, dobijamo bazu $\{e_1, \ldots, e_n\}$, u kojoj su matrice operatora $\mathscr{A}$ i $\mathscr{A}^*$ dijagonalne. Pokažimo da je $\lambda_k = \overline{\mu_k}, k = \overline{1,n}$:

$$\lambda_k = \lambda_k |e_k|^2 = \lambda_k \langle e_k, e_k \rangle = \langle \lambda_k e_k, e_k \rangle = \langle \mathscr{A}e_k, e_k \rangle = \langle e_k, \mathscr{A}^* e_k \rangle = \langle e_k, \mu_k e_k \rangle = \overline{\mu_k} \langle e_k, e_k \rangle = \overline{\mu}_k |e_k|^2 = \overline{\mu}_k.$$

Dakle, matrica operatora $\mathscr{A}$ je dijagonalna u bazi e, tj. ima elemente $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ na glavnoj dijagonali, a matrica operatora $\mathscr{A}^*$ u istoj bazi ima elemente $\{\overline{\lambda}_1, \ldots, \overline{\lambda}_n\}$.
Pretpostavimo sada da u prostoru V postoji ortonormirana baza $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ od svojstvenih vektora operatora $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}e_i = \lambda_i e_i, i = \overline{1,n}$. Definišimo operator $\mathscr{B} \in \mathcal{L}(V \to V)$ sljedećom formulom:

$$\mathscr{B}e_i = \overline{\lambda}_i e_i, i = \overline{1,n}.$$

Neka su $x, y \in V$:

$$\langle \mathscr{A}x, y\rangle = \langle \mathscr{A}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i), y\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathscr{A} e_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j\rangle =$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \overline{\beta}_j \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \overline{\beta}_i;$$

$$\langle x, \mathscr{B}y\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \mathscr{B}(\sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j)\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mathscr{B} e_j\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j \overline{\lambda}_j e_j\rangle =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta}_j \lambda_j \langle e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\beta}_i \lambda_i.$$

Zaključujemo da je $\forall x, y \in V$ važi: $\langle \mathscr{A}x, y\rangle = \langle x, \mathscr{B}y\rangle \Rightarrow \mathscr{B} = \mathscr{A}^*$. Dakle, $\mathscr{A}^* e_i = \overline{\lambda}_i e_i, i = \overline{1, n}$.
Neka je $x \in V$ proizvoljan vektor, $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Tada:

$$\mathscr{A}\mathscr{A}^* x = \mathscr{A}\mathscr{A}^*(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i) = \mathscr{A}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathscr{A}^* e_i) = \mathscr{A}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\lambda}_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\lambda}_i \mathscr{A} e_i =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overline{\lambda}_i \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |\lambda_i|^2 e_i.$$

S druge strane:

$$\mathscr{A}^* \mathscr{A} x = \mathscr{A}^* \mathscr{A}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i) = \mathscr{A}^*(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathscr{A} e_i) = \mathscr{A}^*(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \mathscr{A}^* e_i =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i \overline{\lambda}_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |\lambda_i|^2 e_i.$$

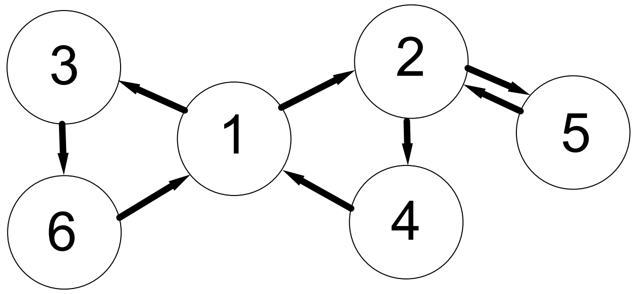
Iz prethodne dvije jednakosti, iz proizvoljnosti vektora x izvodimo jednakost operatora: $\mathscr{A}\mathscr{A}^* = \mathscr{A}^*\mathscr{A}$.

9.5 Unitarni operator

Neka je V unitarni prostor.

Definicija 9.4. *Operator $\mathscr{U} \in \mathcal{L}(V \to V)$ se naziva unitarnim, ako je $\mathscr{U}^*\mathscr{U} = \mathscr{I}$.*

Teorema 9.4. *Neka je $\mathscr{U} \in \mathcal{L}(V \to V)$ operator, gdje je V unitarni prostor. Tada su sljedeća tvrđenja ekvivalentna:*
1. $\mathscr{U}$ je unitaran operator.
2. Za svako $x, y \in V$ važi $\langle \mathscr{U}x, \mathscr{U}y\rangle = \langle x, y\rangle$.
3. $\mathscr{U}\mathscr{U}^* = \mathscr{I}$.
4. $\mathscr{U}$ preslikava svaki ortonormirani skup vektora iz V u ortonormirani skup.
5. $\mathscr{U}$ je izometrija, tj.: $|\mathscr{U}x| = |x|, \forall x \in V$.
6. $\mathscr{U}$ je normalan operator i sve svojstvene vrijednosti operatora $\mathscr{U}$ su po modulu jednake 1.



Dokaz

Za dokaz ekvivalentnosti šest tvrđenja dovoljno je da dokažemo implikacije koje su ukazane strelicama na slici.

Dokažimo najprije implikaciju 1. $\Rightarrow$ 2:

$$\langle \mathscr{U} x, \mathscr{U} y\rangle = \langle x, \mathscr{U}^*\mathscr{U} y\rangle = \langle x, \mathscr{I} y\rangle = \langle x, y\rangle, \forall x, y \in V.$$

Dokažimo implikaciju 2. $\Rightarrow$ 4.

Neka je $f = \{f_1, \ldots, f_m\}$ ortonormirani sistem od m vektora. Tada

$$\langle \mathscr{U} f_i, \mathscr{U} f_j\rangle = \langle f_i, f_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Dakle, sistem vektora $\{\mathscr{U} f_1, \ldots, \mathscr{U} f_m\}$ je ortonormiran.

Dokažimo 1. $\Rightarrow$ 3.

Neka je $\mathscr{U}^*\mathscr{U} = \mathscr{I}$. Odavde zaključujemo da je $\mathscr{U}$ invertibilan i $\mathscr{U}^* = \mathscr{U}^{-1}$ pa imamo:

$$\mathscr{U}^*\mathscr{U} = \mathscr{U}^{-1}\mathscr{U} = \mathscr{U}\mathscr{U}^* = \mathscr{I}.$$

Dokažimo 3. $\Rightarrow$ 6.

Važi $\mathscr{U}^*\mathscr{U} = \mathscr{U}\mathscr{U}^* = \mathscr{I}$, odakle zaključujemo da je $\mathscr{U}$ normalan operator. Neka je λ svojstvena vrijednost operatora $\mathscr{U}$ i x odgovarajući svojstveni vektor,$|x| = 1$. Tada:

$$1 = \langle x, x\rangle = \langle \mathscr{U}^*\mathscr{U} x, x\rangle = \langle \mathscr{U} x, \mathscr{U} x\rangle = \langle \lambda x, \lambda x\rangle = \lambda\overline{\lambda}\langle x, x\rangle = |\lambda|^2.$$

Dokažimo 6. $\Rightarrow$ 1.

Kako je $\mathscr{U}^*\mathscr{U} = \mathscr{U}\mathscr{U}^*$, to po Teoremi 9.3 u V postoji ortonormirana baza $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$, koju čine svojstveni vektori operatora $\mathscr{U}$. Tada matrice operatora $\mathscr{U}$ i $\mathscr{U}^*$ u ovoj bazi imaju oblik:

$$U(e) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}; \quad U^*(e) = \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \overline{\lambda_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

Množenjem matrica $U(e)$ i $U^*(e)$ dobijamo:

$$U(e)U^*(e) = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & |\lambda_2|^2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix} = I.$$

Pošto su $|\lambda_1| = ... = |\lambda_n| = 1$, to je ovo matrica I. Iz jednakosti matrica u ortonormiranoj bazi, koristeći Tvrđenje 9.1 izvodimo jednakost operatora: $\mathscr{U}^*\mathscr{U} = \mathscr{I}$.
Dokažimo 4. $\Rightarrow$ 1.
Neka su $e_1, \ldots, e_n$ i $f_1 = \mathscr{U} e_1, \ldots, f_n = \mathscr{U} e_n$ ortonormirane baze. Uzmimo proizvoljne vektore $x, y \in V$, $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^n \beta_j e_j$.
Imamo $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{\beta}_i$, kao i:

$$\mathscr{U} x = \mathscr{U}(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i, \quad \mathscr{U} y = \sum_{j=1}^n \beta_j f_j.$$

Dalje:

$$\langle \mathscr{U} x, \mathscr{U} y \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i, \sum_{j=1}^n \beta_j f_j \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{\beta}_i = \langle x, y \rangle.$$

$$\langle \mathscr{U} x, \mathscr{U} y \rangle = \langle x, \mathscr{U}^*\mathscr{U} y \rangle$$

S druge strane: $\langle x, \mathscr{U}^*\mathscr{U} y \rangle = \langle x, y \rangle$, pa je $\mathscr{U}^*\mathscr{U} = \mathscr{I}$.
Dokažimo 2. $\Rightarrow$ 5. Za sve vektore $x, y \in V$ važi $\langle \mathscr{U} x, \mathscr{U} y \rangle = \langle x, y \rangle$. Ova jednakost u slučaju $x = y$ daje:

$$\langle \mathscr{U} x, \mathscr{U} x \rangle = \langle x, x \rangle \Rightarrow |\mathscr{U} x| = |x|.$$

Dokažimo 5. $\Rightarrow$ 2.
Koristeći identitet (provjeriti):

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(|x+y|^2 - |x-y|^2 + i|x+iy|^2 - i|x-iy|^2).$$

za $\mathscr{U} x, \mathscr{U} y$ imamo:

$$\langle \mathscr{U} x, \mathscr{U} y \rangle = \frac{1}{4}(|\mathscr{U} x + \mathscr{U} y|^2 - |\mathscr{U} x - \mathscr{U} y|^2 + i|\mathscr{U} x - i\mathscr{U} y|^2 - i|\mathscr{U} x - i\mathscr{U} y|^2) =$$

$$= \frac{1}{4}(|\mathscr{U}(x+y)|^2 - |\mathscr{U}(x-y)|^2 + i|\mathscr{U}(x+iy)|^2 - i|\mathscr{U}(x-iy)|^2) =$$

$$= \frac{1}{4}(|x+y|^2 - |x-y|^2 + i|x+iy|^2 - i|x-iy|^2) = \langle x, y \rangle.$$

Definicija 9.5. *Matrica* $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *se naziva unitarnom ako*

$$UU^* = U^*U = I.$$

Primjedba 1. Matrica unitarnog operatora u ortonormiranoj bazi je unitarna. Ovo slijedi iz činjenice da su matrice uzajamno konjugovanih operatora u ortonormiranoj bazi uzajamno konjugovane.
Primjedba 2. Iz prethodne Teoreme slijedi da unitarni operator ima ortnormiranu bazu od svojstvenih vektora u kojoj matrica operatora ima dijagonalni oblik. Pri tome na dijagonali stoje svojstvene vrijednosti operatora, koje su kompleksni brojevi po modulu ravni jedinici

(dakle, leže na jediničnoj kružnici u kompleksnoj ravni). Koristeći polarno predstavljanje kompleksnog broja, zaključujemo da postoji ortonormirana baza e u kojoj matrica unitarnog operatora ima sljedeći oblik za uglove $0 \le \phi_1, \dots, \phi_n \le 2\pi$:

$$U(e) = \begin{pmatrix} e^{i\phi_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i\phi_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{i\phi_n} \end{pmatrix}.$$

9.6 Ermitski operator

Definicija 9.6. *Linearni operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ se naziva samokonjugovanim ako $\mathscr{A} = \mathscr{A}^*$.*
Ako je V unitarni prostor, samokonjugovani operator se naziva ermitskim.
Ako je V euklidski prostor, samokonjugovani operator se naziva simetričnim.

U ovom paragrafu ćemo razmatrati slučaj kada je V unitaran prostor, a $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ unitarni operator.

Teorema 9.5. *Linearni operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ je ermitski operator ako i samo ako za $\forall x \in V$ važi*

$$\langle \mathscr{A}x, x\rangle \in \mathbb{R}.$$

Dokaz
Ako je $\mathscr{A} = \mathscr{A}^*$ tada važi:

$$\langle \mathscr{A}x, x\rangle = \langle x, \mathscr{A}x\rangle = \overline{\langle \mathscr{A}x, x\rangle}.$$

Svojstva ermitskog operatora
1. Ermitski operator je normalan.
2. Svojstvene vrijednosti ermitskog operatora su realne.
Dokaz
Neka je $\mathscr{A}x = \lambda x, |x| = 1$. Tada:

$$\lambda = \lambda \cdot 1 = \lambda\langle x, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \langle \mathscr{A}x, x\rangle = \langle x, \mathscr{A}x\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \overline{\lambda}\langle x, x\rangle = \overline{\lambda}.$$

3. Svojstveni vektori ermitskog operatora, koji odgovaraju različitim svojstvenim vrijednostima, su međusobno ortogonalni.
Dokaz
Neka je $\mathscr{A}x = \lambda_1 x$ i $\mathscr{A}y = \lambda_2 y$ i $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Treba pokazati za nenulte vektore x i y da $\langle x, y\rangle = 0$. Imamo:

$$\langle \mathscr{A}x, y\rangle = \lambda_1\langle x, y\rangle,\ \langle x, \mathscr{A}y\rangle = \overline{\lambda}_2\langle x, y\rangle = \lambda_2\langle x, y\rangle.$$

Oduzimajući drugu jednakost od prve i koristeći da $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle x, y\rangle = 0 \Rightarrow \langle x, y\rangle = 0.$$

4. Matrica ermitskog operatora u ortonormiranoj bazi je ermitska (samokonjugovana) matrica.

Dokaz
Neka je $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormirana baza i $\mathscr{A} e_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} e_j, i = \overline{1,n}$. Pomnožimo ovu jednakost skalarno sa e_k:

$$\langle \mathscr{A} e_i, e_k \rangle = \langle \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} e_j, e_k \rangle = \alpha_{ik}.$$

Takođe imamo:

$$\alpha_{ki} = \langle \mathscr{A} e_k, e_i \rangle = \langle e_k, \mathscr{A} e_i \rangle = \overline{\langle \mathscr{A} e_i, e_k \rangle} = \overline{\alpha_{ik}}.$$

Zaključujemo da je $A(e) = A^*(e)$.
5. Ako je matrica operatora u ortonormiranoj bazi ermitska,onda je i sam operator ermitski.
Dokaz
Iz svojstva $\alpha_{ij} = \overline{\alpha}_{ji}$ i ortonormiranosti baze e imamo

$$\langle \mathscr{A} e_i, e_j \rangle = \alpha_{ij} = \overline{\alpha}_{ji} = \overline{\langle \mathscr{A} e_j, e_i \rangle} = \langle e_i, \mathscr{A} e_j \rangle.$$

Tada za proizvoljne vektore $x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^n \eta_j e_j$ važi

$$\langle \mathscr{A} x, y \rangle = \langle \mathscr{A}(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i), \sum_{j=1}^n \eta_j e_j \rangle = \sum_{i,j=1}^n \xi_i \overline{\eta}_j \langle \mathscr{A} e_i, e_j \rangle =$$

$$= \sum_{i,j}^n \xi_i \overline{\eta}_j \langle e_i, \mathscr{A} e_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \xi_i e_i, \sum_{j=1}^n \eta_j \mathscr{A} e_j \rangle = \langle x, \mathscr{A} y \rangle.$$

Odavde,$\mathscr{A} = \mathscr{A}^*$.

9.6.1 Pozitivni operator

Definicija 9.7. *Ermitski operator* $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ *se naziva pozitivnim ako je* $\langle \mathscr{A} x, x \rangle > 0, \forall x \in V, x \neq \mathbb{0}$.

Teorema 9.6. *Ermitski operator je pozitivan ako i samo ako su mu sve svojstvene vrijednosti pozitivne.*

Dokaz
Neka je $\mathscr{A}$ ermitski operator, tada u V postoji ortonormirana baza od svojstvenih vektora operatora $\mathscr{A}$. Neka je to baza $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ i neka je $x \in V$ proizvoljan, $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$. Tada:

$$0 < \langle \mathscr{A} x, x \rangle = \langle \mathscr{A}(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i), \sum_{j=1}^n \alpha_j e_j \rangle = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \overline{\alpha_j} \langle \mathscr{A} e_i, e_j \rangle = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \overline{\alpha_j} \lambda_i \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \lambda_i.$$

Uzimajući u gornjoj jednakosti redom $x = e_1, \dots, x = e_n$ dobijamo $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \dots, \lambda_n > 0$. Suprotno tvrđenje se dokazuje obratnim rezonovanjem.

Teorema 9.7. *Neka je operator* $\mathscr{A}$ *pozitivan. Tada je* $\mathscr{A}^{-1}$ *takođe pozitivan.*

Dokaz
Pošto je $det \mathscr{A} = \lambda_1 \cdots \lambda_n > 0$, to operator $\mathscr{A}^{-1}$ postoji. Imamo $(\mathscr{A}^*)^{-1} = (\mathscr{A}^{-1})^*$,a pošto je $\mathscr{A}$ ermitski , to $\mathscr{A}^{-1} = (\mathscr{A}^{-1})^*$. Svojstvene vrijednosti operatora $\mathscr{A}^{-1}$ su $\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}$ sve pozitivne (jer je $\mathscr{A}$ pozitivan , pa je svako λ_i pozitivno), pa je i $\mathscr{A}^{-1}$ pozitivan.

9.6.2 Korijen iz operatora

Teorema 9.8. *Neka je operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ nenegativan ermitski operator, $\mathscr{A} \geq 0$. Tada postoji jedinstven operator $\mathscr{B} \in \mathcal{L}(V \to V)$, takav da $\mathscr{B}^2 = \mathscr{A}$.*

Dokaz
Neka je $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ ortonormirana baza od svojstvenih vektora operatora $\mathscr{A}$:

$$\mathscr{A} e_i = \lambda_i e_i, i = \overline{1,n}, \lambda_i \geq 0, \forall i = \overline{1,n}.$$

Definišimo operator $\mathscr{B}$ na sljedeći način $\mathscr{B} e_i = \sqrt{\lambda_i} e_i$. Jasno je da je operator $\mathscr{B}$ ermitski, a iz $\sqrt{\lambda_i} \geq 0, i = \overline{1,n}$ slijedi da je $\mathscr{B} \geq 0$. Osim toga, $\mathscr{B}^2 = \mathscr{A}$, jer je $\mathscr{B}^2 e_i = \mathscr{A} e_i, \forall i = \overline{1,n}$, a e je baza u V. (Drugim riječima, iz jednakosti dejstva operatora na sve vektore baze slijedi jednakost operatora.)
Da bismo dokazali jedinstvenost pretpostavimo da je $\mathscr{C}^2 = \mathscr{A}, \mathscr{C} \geq 0$. Kako je $\mathscr{C}$ ermitski operator, to u V postoji ortonormirana baza $f = \{f_1, \dots, f_n\}$ od svojstvenih vektora $\mathscr{C}$, t.j:

$$\mathscr{C} f_i = \mu_i f_i, i = \overline{1,n}.$$

Pošto imamo

$$\mathscr{A} f_i = \mathscr{C}^2 f_i = \mathscr{C}(\mu_i f_i) = \mu_i^2 f_i,$$

zaključujemo da su $f_i, i = \overline{1,n}$ svojstveni vektori operatora $\mathscr{A}$ sa svojstvenim vrijednostima $\mu_1^2, \dots, \mu_n^2$, tj:

$$\lambda_1 = \mu_1^2, \dots, \lambda_n = \mu_n^2,$$

odakle je

$$\mathscr{C} e_i = \mu_i e_i = \sqrt{\lambda_i} e_i = \mathscr{B} e_i \Rightarrow \mathscr{C} \equiv \mathscr{B}.$$

Definicija 9.8. *Operator $\mathscr{B}$ se naziva kvadratnim korijenom operatora $\mathscr{A}$.*

Oznaka: $\mathscr{B} = \mathscr{A}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathscr{A}}$.

9.6.3 Ermitovo razlaganje operatora

Teorema 9.9. *Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$. Tada postoji jedinstven par ermitskih operatora $\mathscr{B}, \mathscr{C} \in \mathcal{L}(V \to V)$, tako da*

$$\mathscr{A} = \mathscr{B} + i\mathscr{C}.$$

(i označava imaginaran broj $i = \sqrt{-1}$.)

Dokaz
Definišimo operatore:

$$\mathscr{B} = \frac{1}{2}(\mathscr{A} + \mathscr{A}^*), \mathscr{C} = \frac{1}{2i}(\mathscr{A} - \mathscr{A}^*).$$

Tada:

$$\mathscr{B} + i\mathscr{C} = \mathscr{A}.$$

Imamo:

$$\mathscr{B}^* = \frac{1}{2}(\mathscr{A} + \mathscr{A}^*)^* = \frac{1}{2}(\mathscr{A}^* + \mathscr{A}) = \mathscr{B}.$$

$$\mathscr{C}^* = \frac{1}{2i}(\mathscr{A} - \mathscr{A}^*)^* = -\frac{1}{2i}(\mathscr{A} - \mathscr{A}^*)^* = -\frac{1}{2i}(\mathscr{A}^* - \mathscr{A}) = \mathscr{C}.$$

Glava 10

Linearni operatori u euklidskom prostoru

Neka su E, G euklidski prostori i $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(E \to G)$. Razmotrimo pojam konjugovanog operatora, koji se definiše na isti način kao u slučaju unitarnih prostora. Na sličan način kao u prethodnoj glavi možemo pokazati da konjugovani operator uvijek postoji i jedinstven je.
Za razliku od unitarnog prostora, operacija konjugacije u euklidskom prostoru je linearna, tj:

$$(\alpha\mathscr{A})^* = \alpha\mathscr{A}^*.$$

Može se pokazati da su matrice uzajamno konjugovanih operatora u ortonormiranoj bazi međusobno transponovane:

$$A^*(e, f) = (A(e, f))^T.$$

10.1 Simetrični operator

Samokonjugovani operator u euklidskom prostoru se naziva simetričnim.

Definicija 10.1. *Operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(E \to E)$ se naziva simetričnim, ako*

$$\langle \mathscr{A}x, y\rangle = \langle x, \mathscr{A}y\rangle, \quad \forall x, y \in E.$$

Teorema 10.1. *Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(E \to E)$ simetričan operator. Tada postoji ortonormirana baza od svojstvenih vektora operatora $\mathscr{A}$.*

Dokaz
Prvo pokažimo da su sve svojstvene vrijednosti simetričnog operatora $\mathscr{A}$ realne. Neka je $\lambda = \alpha \pm i\beta$ svojstvena vrijednost operatora $\mathscr{A}$. Tada po Teoremi 5.6 $\mathscr{A}$ ima invarijantni potprostor $Lin\{x, y\}$ dimenzije dva. Uz to

$$\mathscr{A}x = \alpha x - \beta y, \quad \mathscr{A}y = \beta x + \alpha y.$$

Pomnožimo prvu jednakost skalarno sa y i drugu sa x i oduzmimo jednu od druge:

$$\langle \mathscr{A}x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle - \beta|y|^2,\ \langle x, \mathscr{A}y\rangle = \beta|x|^2 + \alpha\langle x, y\rangle \Rightarrow \beta(|x|^2 + |y|^2) = 0.$$

Pošto su $x, y \neq \mathbb{0}$, to $|x|^2 + |y|^2 \neq 0$, pa je $\beta = 0$, odnosno $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dalje, neka je λ_1 svojstvena vrijednost operatora $\mathscr{A}$ i e_1 ($|e_1| = 1$) odgovarajući svojstveni vektor:

$$\mathscr{A} e_1 = \lambda_1 e_1.$$

Označimo sa E_{n-1} ortogonalnu dopunu vektora e_1. Pokažimo da je E_{n-1} invarijantan u odnosu na $\mathscr{A}$. Uzmimo proizvoljan $x \in E_{n-1}$, tj. $\langle x, e_1 \rangle = 0$. Imamo:

$$\langle \mathscr{A} x, e_1 \rangle = \langle x, \mathscr{A} e_1 \rangle = \lambda_1 \langle x, e_1 \rangle = 0,$$

odakle zaključujemo $\mathscr{A} x \in E_{n-1}$.
Razmotrimo suženje $\mathscr{A}|_{E_{n-1}}$. Neka je λ_2 svojstvena vrijednost $\mathscr{A}|_{E_{n-1}} e_2 = \lambda_2 e_2, |e_2| = 1$. Primijetimo takođe da su vektori e_1 i e_2 ortogonalni: $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$.
Sada razmotrimo E_{n-2} ortogonalnu dopunu vektora e_2 do prostora E_{n-1}. Možemo pokazati da je E_{n-2} inavrijantan za $\mathscr{A}$. Razmotrimo suženje $\mathscr{A}|_{E_{n-2}}$. Ovaj operator je takođe simetričan. Izaberimo e_3 svojstveni vektor operatora $\mathscr{A}|_{E_{n-2}}$, $\mathscr{A} e_3 = \mathscr{A}|_{E_{n-2}} e_3 = \lambda_3 e_3$ i $|e_3| = 1$.
Nastavljajući ovu konstrukciju dobijamo $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormiranu bazu od svojstvenih vektora, tj.:

$$\mathscr{A} e_i = \lambda_i e_i, i = \overline{1, n}, \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Tvrđenje 10.1. *Operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(E \to E)$ je simetričan, ako i samo ako je matrica operatora $\mathscr{A}$ u ortonormiranoj bazi simetrična.*

Tvrđenje se dokazuje na isti način kao za ermitski operator.

10.2 Ortogonalni operator

Definicija 10.2. *Operator $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(E \to E)$ se naziva ortogonalnim, ako za svako $x, y \in E$:*

$$\langle \mathscr{P} x, \mathscr{P} y \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Teorema 10.2. *Neka je $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(E \to E)$. Sljedeća tvrđenja su ekvivalentna:*
1. $\mathscr{P}$ ortogonalan operator.
2. $\mathscr{P}$ je izometrija.
3. $\mathscr{P}$ preslikava svaku ortonormiranu bazu u ortonormiranu.
4. $\mathscr{P}^* = \mathscr{P}^{-1}$
5. $\mathscr{P}\mathscr{P}^* = \mathscr{P}^*\mathscr{P} = \mathscr{I}$.
6. Matrica $\Pi(e)$ operatora $\mathscr{P}$ u ortonormiranoj bazi e je ortogonalna, tj. $\Pi^T \Pi = I$.

Dokaz
Dokažimo implikaciju 1. $\Rightarrow$ 2. Uzmimo da je $x = y$, tada iz definicije slijedi $\langle \mathscr{P} x, \mathscr{P} x \rangle = \langle x, x \rangle$, pa $|\mathscr{P} x| = |x|$.
2. $\Rightarrow$ 1.
U identitetu:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}(|x + y|^2 - |x|^2 - |y|^2)$$

zamijenimo vektore x, y vektorima $\mathscr{P}x, \mathscr{P}y$ i dobijemo da ukoliko $\mathscr{P}$ čuva dužinu (izometrija), to on takođe čuva skalarni proizvod (ortogonalan).
Implikacija 1. $\Rightarrow$ 3. je očigledna.
3. $\Rightarrow$ 1.
Po uslovu:

$$\langle \mathscr{P}e_i, \mathscr{P}e_j\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Uzmimo proizvoljne vektore $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j$, tada:

$$\langle \mathscr{P}x, \mathscr{P}y\rangle = \langle \mathscr{P}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i), \mathscr{P}(\sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j)\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i\beta_j\langle \mathscr{P}e_i, \mathscr{P}e_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i = \langle x, y\rangle.$$

1. $\Rightarrow$ 4. Pošto su u jednakostima $\langle \mathscr{P}x, \mathscr{P}y\rangle = \langle x, \mathscr{P}^*\mathscr{P}y\rangle = \langle x, y\rangle$ vektori x i y proizvoljni, to zaključujemo da je $\mathscr{P}^*\mathscr{P} = \mathscr{I}$. Odavde slijedi da je $\mathscr{P}$ invertibilan i $\mathscr{P}^* = \mathscr{P}^{-1}$.
Implikacija 4. $\Rightarrow$ 5. je očigledna.
5. $\Rightarrow$ 1.

$$\langle \mathscr{P}x, \mathscr{P}y\rangle = \langle x, \mathscr{P}^*\mathscr{P}y\rangle = \langle x, y\rangle.$$

1. $\Rightarrow$ 6.
Neka je $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormirana baza i

$$\mathscr{P}e_k = \sum_{i=1}^{n} \pi_{ik}e_i, \quad \mathscr{P}e_m = \sum_{j=1}^{n} \pi_{jm}e_j, k = \overline{1,n}, m = \overline{1,n}.$$

Tada:

$$\langle \mathscr{P}e_k, \mathscr{P}e_m\rangle = \sum_{i=1}^{n} \pi_{ik}\pi_{jm} = \langle e_k, e_m\rangle = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}.$$

Ovo znači da je $\Pi(e) = \{\pi_{km}\}, k = \overline{1,n}, m = \overline{1,n}$ ortogonalna matrica, tj. $\Pi(e)\Pi(e)^T = I$.
6. $\Rightarrow$ 3. Neka je $\Pi = \Pi(e)$ ortogonalna matrica, tada je $e' = e \cdot \Pi$ takođe baza. Matrica Grama sistema e' je:

$$\Gamma(e') = (e')^T \cdot e' = (e\Pi)^T e\Pi = \Pi^T e^T e\Pi = \Pi^T\Gamma(e)\Pi = \Pi^T\Pi = I.$$

Vidimo da je e' je ortonormirana baza jer je matrica Grama jedinična.

10.2.1 Najjednostavniji oblik matrice ortogonalnog operatora

Neka je $\mathscr{P}$ ortogonalan operator, tada je $det\mathscr{P} = \pm 1$.

Definicija 10.3. *Ortogonalni operator $\mathscr{P}$ se naziva svojstvenim (čuva orjentaciju), ako je $det\mathscr{P} = 1$ i nesvojstvenim (mijenja orjentaciju), ako je $det\mathscr{P} = -1$.*

Sada razmotrimo kakav oblik mogu imati matrice ortogonalnog operatora (ortogonalne matrice) u različitim dimenzijama.

Jednodimenzionalni slučaj.

Slučaj kada je dimenzija prostora E jednaka jedan je trivijalan. Zaista, tada je $\mathscr{P}x = \lambda x, \forall x \in E$, gdje je λ korijen karakterističnog polinoma. Pri tome, $\langle x, x\rangle = \langle \mathscr{P}x, \mathscr{P}x\rangle = \lambda^2\langle x, x\rangle$ i, dakle $\lambda = \pm 1$. Dakle, moguća su samo dva slučaja:

$$a)\mathscr{P}x = x,\, \Pi_+ = (1);$$

$$b)\mathscr{P}x = -x, \Pi_- = (-1).$$

Dvodimenzionalni slučaj.

Neka je $dim E = 2$ i $e = \{e_1, e_2\}$ ortonormirana baza. Tada je matrica

$$\Pi(e) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

ortogonalna. Razmotrimo dva slučaja.

a) Neka je $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Tada iz ortogonalnosti matrice slijedi:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}.$$

S druge strane je:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix},$$

pa imamo da je $\alpha = \delta, \beta = -\gamma$. Dakle

$$\Pi(e) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

i $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Tada postoji $\rho : 0 \leq \rho \leq 2\pi, \quad \alpha = \cos\rho, \beta = \sin\rho$ i

$$\Pi = \begin{pmatrix} \cos\rho & \sin\rho \\ -\sin\rho & \cos\rho \end{pmatrix}.$$

Ovakva matrica je matrica operacije rotacije za ugao ρ.

b) Neka je sada $\alpha\delta - \gamma\beta = -1$. Tada karakteristični polinom $\lambda^2 - (\alpha + \delta)\lambda - 1$ operatora $\mathscr{P}$ ima realan korijen. Dakle, operator $\mathscr{P}$ ima svojstvenu vrijednost $\lambda^* \in \mathbb{R}$ i svojstveni vektor $f_1, |f_1| = 1$:

$$\mathscr{P}f_1 = \lambda^* f_1, \lambda^* = 1 \vee \lambda^* = -1.$$

Uzmimo $f_2 \perp f_1$. Tada, pošto je $\mathscr{P}$ ortogonalan, to on date vektore preslikava u ortogonalne, tj. $\mathscr{P}f_2 \perp \mathscr{P}f_1$ i $\mathscr{P}f_1 = \pm f_1$, pa imamo da je $\mathscr{P}f_2 = f_2$ ili $\mathscr{P}f_2 = -f_2$. Tada je:

$$\Pi(f) = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix},$$

a pošto je $det\mathscr{P} = -1$:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \vee \Pi = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ovakve matrica su matrice refleksije u odnosu na neku od koordinatnih osa.
Zaključak. U dvodimenzionalnom prostoru ortogonalni operator je jedno od sljedećih preslikavanja:
1. rotacija za ugao $\rho, 0 \leq \rho \leq \pi$ (svojstveno preslikavanje, čuva orjentaciju);
2. refleksija u odnosu na jednu koordinatnu osu (nesvojstveno preslikavanje, mijenja orjentaciju).

n-dimenzionalni slučaj
Sada razmotrimo matricu ortogonalnog operatora u opštem slučaju. Za početak nam je potrebno jedno pomoćno tvrđenje:

Lema 10.1. *Neka je $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(E \to E)$ ortogonalni operator i $W \subseteq E$ invarijantan potprostor za $\mathscr{P}$. Tada je potprostor $W^{\perp}$ takođe invarijantan za $\mathscr{P}$.*

Dokaz
Imamo da je $\mathscr{P}(W) \subseteq W$, ali, pošto je $\mathscr{P}$ regularan, to $\mathscr{P}(W) = W$, pa $\mathscr{P}^{-1}(W) = W$. Sada ćemo dokazati da za $y \in W^{\perp}$ važi $\mathscr{P}y \in W^{\perp}$. Neka je $x \in W$ proizvoljno, tada:

$$\langle \mathscr{P}y, x \rangle = \langle y, \mathscr{P}^* x \rangle = \langle y, \mathscr{P}^{-1} x \rangle = 0.$$

Odavde iz proizvoljnosti $x \in W$ slijedi da $\mathscr{P}y \in W^{\perp}$.

Teorema 10.3. *Neka je $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(E \to E)$ ortogonalan operator. Tada u prostoru E postoji ortonormirana baza e u kojoj matrica operatora $\mathscr{P}$ ima oblik:*

$$\Pi(e) = \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&&&&& \\ &&& -1 &&&&&&&&&& \\ &&&& \ddots &&&&&&&&& \\ &&&&& -1 &&&&&&&& \\ &&&&&& \cos\rho_1 & -\sin\rho_1 &&&&&& \\ &&&&&& \sin\rho_1 & \cos\rho_1 &&&&&& \\ &&&&&&&& \cos\rho_2 & -\sin\rho_2 &&&& \\ &&&&&&&& \sin\rho_2 & \cos\rho_2 &&&& \\ &&&&&&&&&& \ddots &&& \\ &&&&&&&&&&& \cos\rho_k & -\sin\rho_k \\ &&&&&&&&&&& \sin\rho_k & \cos\rho_k \end{pmatrix}$$

Dokaz
Po Teoremi 5.6 u E postoji invarijantni potprostor W_1 operatora $\mathscr{P}$ dimenzije 1 ili 2. Saglasno prethodnoj lemi, iz ortogonalnosti $\mathscr{P}$ slijedi da je $W_1^{\perp}$ takođe invarijantan za $\mathscr{P}$. Neka je

$E = W_1 \oplus E_1$, gdje je $E_1 = W_1^{\perp}$ i $dim W_1 = 1$ ili $dim W_1 = 2$. Tada će matrica operatora imati oblik:

$$\Pi = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \text{u slučaju} \quad dim W_1 = 1$$

ili

$$\Pi = \begin{pmatrix} \cos\rho & -\sin\rho & 0 & \dots & 0 \\ \sin\rho & \cos\rho & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & & \end{pmatrix}, \text{u slučaju} \quad dim W_1 = 2.$$

Dalje razmatramo suženje operatora $\mathscr{P}$ na E_1, $\mathbb{P}|_{E_1}$ je ortogonalan operator. Tada je $E_1 = W_2 \oplus E_2$, gdje je W_2 invarijantan za $\mathscr{P}$ i $dim W_2 = 1$ ili $dim W_2 = 2$. Ovaj postupak nastavljamo do kraja, razbijajući prostor E na sumu invarijantnih potprostora dimenzija jedan i dva.

Definicija 10.4. *Prostom refleksijom euklidskog prostora naziva se preslikavanje zadato matricom:*

$$\Pi(e) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & O & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & O & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Definicija 10.5. *Prostom rotacijom euklidskog prostora naziva se preslikavanje zadato matricom:*

$$\Pi(e) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & O & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \cos\rho & -\sin\rho & & & \\ & & & \sin\rho & \cos\rho & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & O & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Zaključak. Svaki ortogonalni operator je superpozicija konačnog broja prostih refleksija i prostih rotacija prostora E.

10.2.2 Razlaganje linearnog operatora u euklidskom prostoru

Definicija 10.6. *Linearni operator* $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(E \to E)$ *se naziva kososimetričnim ako* $\mathscr{A}^* = -\mathscr{A}$.

Teorema 10.4. *Svaki operator* $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(E \to E)$ *se može na jedinstven način zapisati kao:*

$$\mathscr{A} = \mathscr{B} + \mathscr{C},$$

gdje je $\mathscr{B}$ *simetričan i* $\mathscr{C}$ *kososimetričan.*

Dokaz
Lako je provjeriti da operatori $\mathscr{B} = \frac{1}{2}(\mathscr{A} + \mathscr{A}^*)$, $\mathscr{C} = \frac{1}{2}(\mathscr{A} - \mathscr{A}^*)$ zadovoljavaju uslov Teoreme. Jedinstvenost slijedi iz činjenice da ako je $\mathscr{B}$ simetričan, $\mathscr{C}$ kososimetričan operator, to $(\mathscr{B} + \mathscr{C})^* = \mathscr{B} - \mathscr{C}$.

Dodatak A

Klasifikacija hiperpovrši drugog reda u euklidskom prostoru

Hiperpovrš drugog reda u euklidskom prostoru E^n je skup tačaka $x \in E^n$ koje zadovoljavaju sljedeću jednakost:

$$\langle \mathscr{A} x, x \rangle + \langle b, x \rangle + \gamma = 0, \tag{A.1}$$

gdje je A simetrična matrica dimenzija $n \times n$, $b \in E^n$, $\gamma \in \mathbb{R}$. Dakle, prvi sabirak je kvadratna forma, drugi linearna forma, a γ je konstanta.

Tvrđenje A.1. *Linearnom zamjenom promjenljivih i pomjeranjem koordinatnog početka jednačina hiperpovrši (A.1) se može svesti na jedan od sljedeća dva oblika:*

$$(A) \quad \lambda_1 \xi_1^2 + \cdots + \lambda_r \xi_r^2 + \gamma = 0,\ r \leq n.$$

$$(B) \quad \lambda_1 \xi_1^2 + \cdots + \lambda_r \xi_r^2 = 2\mu \xi_{r+1},\ r < n.$$

Umjesto dokaza ovog tvrđenja niže ćemo dati nekoliko primjera postupka svođenja jednačine hiperpovrši. Sada razmotrimo slučaj (A). Jednostavnom zamjenom koeficijenata jednakost (A) možemo svesti na sljedeći oblik:

$$(A) \quad \frac{\xi_1^2}{\alpha_1^2} + \cdots + \frac{\xi_p^2}{\alpha_p^2} - \frac{\xi_{p+1}^2}{\alpha_{p+1}^2} - \cdots - \frac{\xi_r^2}{\alpha_r^2} = c = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}. \tag{A.2}$$

Sada razmotrimo nekoliko slučajeva:
(A1a) Neka je rang matrice A ravan n, a indeks nula, tj. $r = n$, $c = 1$, $p = n$. Tada jednačina (A.2) opisuje $(n-1)$-dimenzionalni elipsoid.
(A1b) Neka su rang i indeks matrice A ravni n, tj. $r = n, c = 1, p = 0$. Tada je skup tačaka u E^n koje zadovoljavaju jednačinu prazan. Reći ćemo da je ova hiperpovrš imaginarni $(n-1)$-dimenzionalni elipsoid.
(A1c) Neka je rang matrice A ravan n, a indeks veći od nule i manji od n, tj. $r = n$, $c = 1$, $0 < p < n$. Tada jednačina (A.2) opisuje $(n-1)$-dimenzionalni hiperboloid.
Sada razmotrimo slučaj kada je $c = 0$.
(A0a) Neka je $r = n$, $c = 0$, $0 < p < n$. Ovu hiperpovrš nazivamo $(n-1)$-dimenzionalnim konusom drugog reda.

(A0b) Neka je $r = n$, $c = 0$, $p = 0$ ili $p = n$. Tada samo nula zadovoljava jednačinu (A.2). Reći ćemo da je ovo imaginarni $(n-1)$-dimenzionalni konus.
Konačno, u slučajevima kada je $r < n$, reći ćemo da se radi o cilindričkim površima.
Sada razmotrimo jednačinu (B). Zamjenom koeficijenata, ovu jednačinu možemo svesti na oblik:

$$\frac{\xi_1^2}{\alpha_1^2} + \cdots + \frac{\xi_p^2}{\alpha_p^2} - \frac{\xi_{p+1}^2}{\alpha_{p+1}^2} - \cdots - \frac{\xi_r^2}{\alpha_r^2} = 2\xi_{r+1}. \tag{A.3}$$

(B1) Neka je $r = n-1$. Tada jednačina (A.3) opisuje $(n-1)-$dimenzionalni paraboloid.
(B2) Ako je $r < n-1$, tada govorimo da se radi o cilindričnoj površi.
Sada ćemo predstaviti metod svođenja jednačine hiperpovrši na dva primjera. Veći dio metoda nam je dobro poznat, jer se sastoji u linearnoj zamjeni promjenljivih, tako da se kvadratna forma u (A.1) svede na sumu kvadrata. Ostatak metoda je pomjeranje koordinatnog početka kako bi se sredio linearni dio jednakosti.
Primjer 1. Odrediti tip hiperpovrši drugog reda u E^3 zadate jednačinom:

$$x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - 3x_1 - x_2 + 6 = 0.$$

Najprije grupišemo sabirke, kako bismo kvadratnu formu sveli na sumu kvadrata metodom Lagranža. Imamo redom:

$$(x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 - \frac{1}{4}x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 - 3x_1 - x_2 + 6 = 0.$$

$$(x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 - (\frac{1}{2}x_2 - 2x_3)^2 + 4x_3^2 + x_3^2 - 3x_1 - x_2 + 6 = 0.$$

Uvodeći linearnu zamjenu promjenljivih: $x_1 - \frac{1}{2}x_2 = \xi_1, \frac{1}{2}x_2 - 2x_3 = \xi_2, x_3 = \xi_3$ dobijamo:

$$\xi_1^2 - \xi_2^2 + 5\xi_3^2 - 3x_1 - x_2 + 6 = 0.$$

U posljednjoj jednakosti zamijenimo x_1, x_2 na nove promjenljive:

$$\begin{cases} x_1 = \xi_1 + \frac{1}{2}x_2 = \xi_1 + \xi_2 + 2\xi_3 \\ x_2 = 2\xi_2 + 4x_3 = 2\xi_2 + 4\xi_3. \end{cases}$$

Tada:

$$\xi_1^2 - \xi_2^2 + 5\xi_3^2 - 3\xi_1 - 3\xi_2 - 6\xi_3 - 2\xi_2 - 4\xi_3 + 6 = 0 \Rightarrow$$
$$-\frac{1}{6}\xi_1^2 + \frac{1}{6}\xi_2^2 - \frac{5}{6}\xi_3^2 + \frac{1}{2}\xi_1 + \frac{5}{6}\xi_2 + \frac{5}{3}\xi_3 = 1.$$

Kako u posljednjoj jednakosti prisustvuju kvadratni članovi od sve tri promjenljive, to dodavanjem i oduzimanjem konstanti možemo napisati potpune kvadrate po promjenljivima ξ_1, ξ_2, ξ_3:

$$-\frac{1}{6}(\xi_1 - \frac{3}{2})^2 + \frac{3}{8} + \frac{1}{6}(\xi_2 + \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{24} - \frac{5}{6}(\xi_3 - 1)^2 + \frac{5}{6} = 1.$$

Uvodeći odgovarajuće smjene dobijamo (ova zamjena u stvari predstavlja pomjeranje koordinatnog početka):

$$-\frac{1}{6}\tilde{\xi}_1^2 + \frac{1}{6}\tilde{\xi}_2^2 - \frac{5}{6}\tilde{\xi}_3^2 = \frac{5}{6} \Rightarrow -\frac{1}{5}\tilde{\xi}_1^2 + \frac{1}{5}\tilde{\xi}_2^2 - \tilde{\xi}_3^2 = 1.$$

Zaključujemo da se radi o dvodimenzionalnom hiperboloidu (hiperboloidu u trodimenzionalnom prostoru).

Primjer 2. Odrediti tip hiperpovrši drugog reda zadate jednačinom:

$$4x_1^2 + 9x_2^2 + 4x_3^2 - 6x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3 + 3x_1 - x_2 - x_3 - 4 = 0.$$

Opet počinjemo svođenjem kvadratne forme na sumu kvadrata:

$$(2x_1 - 3x_2 + x_3)^2 - 9x_2^2 - x_3^2 + 9x_2^2 + 4x_3^2 + 3x_1 - x_2 - x_3 - 4 = 0,$$

pa uvodeći smjene $\xi_1 = 2x_1 - 3x_2 + x_3$, $\xi_2 = x_3$, $\xi_3 = -3x_1 + x_2 + x_3 + 4$:

$$\xi_1^2 + 3\xi_2^2 = \xi_3.$$

Dakle, ovdje se radi o dvodimenzionalnom paraboloidu.

Dodatak B

Linearne operatorske jednačine u unitarnom prostoru

Na kraju ćemo se kratko vratiti na jedan od zadataka sa kojim smo počeli kurs Linearne algebre, pitanje postojanja rješenja sistema linearnih jednačina. Opremljeni određenim znanjima, sagledaćemo ovaj problem iz nešto drugačije perspektive. Sistem linearnih jednačina možemo posmatrati kao jednu operatorsku jednačinu u vektorskom prostoru.
Neka su V, W unitarni prostori i $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to W)$. Razmotrimo jednačinu:

$$\mathscr{A} z = u, \tag{B.1}$$

gdje je $u \in W$ poznati vektor, a $z \in V$ nepoznati vektor.

Definicija B.1. *Homogena jednačina $\mathscr{A}^* w = \mathbb{0}$ se naziva konjugovanom ka jednačini* (B.1).

Poznato nam je (Teorema 9.2) da:

$$V = Ker\mathscr{A} \oplus Im\mathscr{A}^*, W = Ker\mathscr{A}^* \oplus Im\mathscr{A}.$$

Koristeći ova razlaganja možemo dokazati sljedeću teoremu:

Teorema B.1 (Alternativa Fredholma)**.** *Ili jednačina $\mathscr{A} z = u$ ima rješenje za svako $u \in W$, ili konjugovana jednačina $\mathscr{A}^* w = \mathbb{0}$ ima netrivijalna rješenja.*

Dokaz
Jednačina $\mathscr{A} z = u$ ima rješenje ako i samo ako $u \in Im\mathscr{A}$. Neka $\mathscr{A} z = u$ ima rješenje za svako $u \in W$, tada $Im\mathscr{A} = W$. Kako je $W = Ker\mathscr{A}^* \oplus Im\mathscr{A}$ imamo da je $Ker\mathscr{A}^* = \{\mathbb{0}_W\}$, pa $\mathscr{A}^* w = \mathbb{0}$ ima samo trivijalno rješenje.
Neka jednačina $\mathscr{A}^* w = \mathbb{0}$ ima netrivijalno rješenje. Ovo znači da je $Ker\mathscr{A}^* \neq \{\mathbb{0}\}$, pa $Im\mathscr{A} \neq W$, te postoji $\widetilde{u} \in W$, takvo da $\widetilde{u} \notin Im\mathscr{A}$. Ovo znači da jednačina $\mathscr{A} z = \widetilde{u}$ nema rješenje za svako u.
Dokazana Teorema se naziva alternativom Fredholma, ovdje imamo "ekskluzivno ili" tj. rečenicu tipa "ili-ili" koja označava da uvijek ima mjesto tačno jedna situacija.
Kada je $V = W$ teorema se može formulisati na sljedeći način:

Teorema B.2. *Neka je* $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$. *Tada ili jednačina* $\mathscr{A}z = u$ *ima jedinstveno rješenje za svako* $u \in V$, *ili konjugovana jednačina* $\mathscr{A}^* w = \mathbb{0}$ *ima netrivijalno rješenje.*

Konačno, možemo formulisati i sljedeću:

Teorema B.3. *Jednačina* $\mathscr{A}z = u$ *ima rješenje, ako i samo ako je vektor* u *ortogonalan na potprostor* $Ker\mathscr{A}^*$.

Dokaz
Kako je $Im\mathscr{A} \perp Ker\mathscr{A}^*$ to $u \in Im\mathscr{A}$ ako i samo ako $u \perp Ker\mathscr{A}^*$.
Zadatak. Koristeći prethodne teoreme provjeriti da li sljedeći sistem ima rješenje:

$$\begin{cases} (1-i)z_1 - 2z_2 = i; \\ (1+i)z_1 - 2iz_2 = -1 - i. \end{cases}$$

Bibliografija

[1] Stephen H. Friedberg, Arnold J. Insel and Lawrence E. Spence. *Linear Algebra, 4th Edition*. Pearson, 2002.

[2] Evgeniy V. Shikin. *Lineinie prostranstva i otobrazheniya* (na ruskom). MGU, Moskva, 1987.

[3] Krešimir Horvatić. *Linearna algebra*. Golden marketing, Zagreb, 2004.

[4] Aleksandar Lipkovski. *Linearna algebra i analitička geometrija*. Zavod za udžbenike, Beograd, 2007.

[5] Neven Elezović. *Linearna algebra*. Element, Zagreb, 1996.

[6] Ljubiša Kočinac. *Linearna algebra i analitička geometrija*. Prosveta, Niš, 1997.