Glava 1

Sistemi linearnih jednačina

U prethodnim glavama smo vidjeli da se mnogi konkretni zadaci Linearne algebre svode na rješavanje sistema linearnih jednačina. Zato nam je potrebno da podrobno proučimo taj zadatak. U Glavi 2 smo objasnili metod Gausa kao jedan od metoda rješavanja sistema linearnih jednčina (koji je u opštem slučaju i najefikasniji metod). U ovoj glavi ćemo se fokusirati na pitanja o postojanju i jedinstvenosti rješenja ovog zadatka, kao i strukturi skupa rješenja.

Neka je $\mathbb{P}$ polje i pretpostavimo da imamo sistem od m jednačina i n nepoznatih sa koeficijentima $a_{ij} \in \mathbb{P}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{1.1}$$

Matrica sistema je

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Vektor desne strane je $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, a vektor nepoznatih promjenljivih $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Sada (1.1) možemo zapisati u matričnom obliku na sljedeći način

$$Ax = b. \tag{1.3}$$

1.1 Homogeni sistem linearnih jednačina

Sistem linearnih jednačina se naziva homogenim, ako ima sljedeći oblik

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0; \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Njegov matrični oblik je

$$Ax = \theta$$

gdje je $A \in \mathbb{P}^{m\times n}$ matrica sistema i θ nula-vektor u $\mathbb{P}^n$.

Najprije primijetimo da svaki homogeni sistem ima makar jedno rješenje – to je trivijalno rješenje $x = \theta$, tj. $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

Teorema 1.1.1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{P}^n$ skup rješenja sistema* (1.4). *Tada je S vektorski potprostor u $\mathbb{P}^n$.*

Dokaz. 1. Pretpostavimo da su $x, y \in \mathbb{P}^n$ rješenja sistema (1.4), tj. $x, y \in S$. Tada važi $Ax = \theta$ i $Ay = \theta$, pa je $A(x + y) = Ax + Ay = \theta + \theta = \theta$. Dakle, $x + y$ je takođe rješenje sistema (1.4), tj. $x + y \in S$.

2. Neka je $x \in S$ i $\alpha \in \mathbb{P}$. Tada je $Ax = \theta$, pa imamo $A(\alpha x) = \alpha Ax = \theta$. Dakle, $\alpha x \in S$.

Iz 1. i 2. slijedi da je S vektorski potprostor u $\mathbb{P}^n$. □

Nakon što smo utvrdili da je skup rješenja homogenog sistema vektorski potprostor, prirodno je zapitati se čemu je jednaka dimenzija tog potprostora. Naredna teorema daje odgovor na to pitanje.

Teorema 1.1.2.

$$\dim S = n - \mathrm{rank} A.$$

Dokaz. Označimo sa S' direktnu dopunu potprostora S u $\mathbb{P}^n$. Neka je $\dim S' = k$ i neka je $\{v_1, v_2 \ldots, v_k\}$ baza potprostora S', a $\{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ baza potprostora S. Pokazaćemo prvo da je sistem vektora $\{Av_1, Av_2, \ldots, Av_k\}$ linearno nezavisan. Neka je $\lambda_1 Av_1 + \lambda_2 Av_2 + \cdots + \lambda_k Av_k = \theta$, gdje su $\lambda_j \in \mathbb{P}$, $j = \overline{1,k}$ skalari. Tada imamo $A(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k) = \theta$. Dakle, $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k \in S$. Međutim, $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \in S'$, pa kako je presjek ova dva potprostora samo nula-vektor, imamo $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k = \theta$. Kako je sistem vektora $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ linearno nezavisan, možemo zaključiti da mora biti $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$, čime je pokazana linearna nezavisnost sistema $\{Av_1, Av_2, \ldots, Av_k\}$.

Dokažimo sada da je $\mathrm{rank} A = k$. Za sve $i = 1, 2, \ldots, n$ neka je

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1(\text{i-ti red}) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{P}^n.$$

Vektor $Ae_i \in \mathbb{P}^m$ predstavlja i-tu kolonu matrice A. Kako je $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ baza prostora $\mathbb{P}^n$, to $e_i \in \mathrm{Lin}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, tj. $Ae_i \in \mathrm{Lin}\{Av_1, Av_2, \dots, Av_k\}$. Dakle, među kolonama $Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n$ matrice A postoji sistem od najviše k linearno nezavisnih, pa je $\mathrm{rank}A \leq k$. Sada ćemo pokazati da važi jednakost. Pretpostavimo suprotno, da je $\mathrm{rank}A < k$. Tada matrica A ima $r < k$ linearno nezavisnih kolona, pa ostale kolone možemo izraziti kao linearnu kombinaciju tih r kolona. Neka je C matrica formata $n \times k$ čije su kolone $v_1, v_2, \dots, v_k$ i posmatrajmo matricu $B = AC$. Tada je $\mathrm{rank}B \leq \mathrm{rank}A = r$. Dakle, B ima najviše $r < k$ linearno nezavisnih kolona. Odavde zaključujemo da je sistem vektora $\{Av_1, Av_2, \dots, Av_k\}$ linearno zavisan, što je u kontradikciji sa prvim dijelom našeg dokaza. Dakle, zaista je $\mathrm{rank}A = k$.

Na kraju, kako je $S \oplus S' = \mathbb{P}^n$, imamo $\dim \mathbb{P}^n = \dim S + \dim S'$. Kako je prema pokazanom $\dim S' = \mathrm{rank}A$, slijedi $\dim S = n - \mathrm{rank}A$. □

Posljedica 1.1.3. *Ako u sistemu* (1.4) *imamo $m < n$, tada taj sistem ima netrivijalno rješenje.*

Posljedica 1.1.4. *Homogeni sistem od n jednačina i n nepoznatih*

$$Ax = \theta \tag{1.5}$$

ima netrivijalno rješenje ako i samo ako je matrica sistema $A \in \mathbb{P}^{n\times n}$ singularna.

Dokaz. Ako je matrica A regularna, tada je $\mathrm{rank}A = n$ i iz Teoreme 1.1.2 imamo da je $\dim S = n - n = 0$. U ovom slučaju skup rješenja sadrži samo trivijalno rješenje $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Ako je matrica A singularna, tada je $\mathrm{rank}A < n$, pa je $\dim S = n - \mathrm{rank}A > 0$. Ovo znači da skup rješenja S sadrži netrivijalno rješenje sistema (1.5). □

Primjer 1.1.5. Posmatrajmo sistem od 2 jednačine i 2 nepoznate:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0; \\ 3x_1 - 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Matrica sistema je $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, čiji je rang 1. Očigledno, ovaj sistem ima netrivijalna rješenja. Skup rješenja ovog sistema S potprostor dimenzije $n - \mathrm{rank}A = 2 - 1 = 1$.

S druge strane, sistem

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0; \\ 3x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases}$$

ima samo trivijalno rješenje jer je matrica sistema $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ regularna.

1.2 Nehomogeni sistem linearnih jednačina

Sistem jednačina se naziva nehomogenim, ako desna strana b u tom sistemu jednačina nije nula vektor:

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{P}^{m\times n},\ b \in \mathbb{P}^m,\ x \in \mathbb{P}^n. \tag{1.6}$$

Za razliku od homogenog, nehomogeni sistem ne mora uvijek imati rješenje, a to pokazuje sljedeći primjer.

Primjer 1.2.1. Sistem

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1; \\ 5x_1 - 5x_2 = 2 \end{cases}$$

nema rješenja.

Uz nehomogeni, razmotrimo i homogeni sistem jednačina sa istom matricom

$$Ax = \theta. \tag{1.7}$$

Teorema 1.2.2. *Neka je S skup rješenja sistema* (1.7) *i w jedno rješenje sistema* (1.6). *Tada skup rješenja K sistema* (1.6) *ima sljedeći oblik*

$$K = \{w\} + S = \{w + s | s \in S\}.$$

Dokaz. Neka je w jedno rješenje sistema (1.6) i $z \in K$. Tada je $A(z-w) = Az - Aw = b - b = \theta$. Dakle, $z - w$ je rješenje sistema (1.7), tj. $z - w \in S$. Dakle, postoji $s \in S$, tako da je $z - w = s$. Odavde imamo $z = w + s \in \{w\} + S$, pa važi $K \subseteq \{w\} + S$.

S druge strane, neka je $z \in \{w\} + S$, tada $z = w + s$, gdje je $s \in S$. Slijedi $Az = A(w + s) = Aw + As = b + \theta = b$, pa $z \in K$. Odavde $\{w\} + S \subseteq K$. Znači, $K = \{w\} + S$. □

Definicija 1.2.3. Skup K se naziva opštim rješenjem sistema (1.6).

Primjer 1.2.4. Posmatrajmo dva sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 1; \\ -4x_1 + 10x_2 = -2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 0; \\ -4x_1 + 10x_2 = 0. \end{cases} .$$

Jedno od rješenja nehomogenog sistema je $w = \{x_1, x_2\} = \{3, 1\}$.

S druge strane, lako je naći da je opšte rješenje homogenog sistema oblika $S = \{\frac{5}{2}x_2, x_2\}$, gdje je $x_2 \in \mathbb{R}$ proizvoljno.

Odavde imamo da je opšte rješenje nehomogenog sistema oblika $K = \{w + s | s \in S\} = (3 + \frac{5}{2}x_2, 1 + x_2)$.

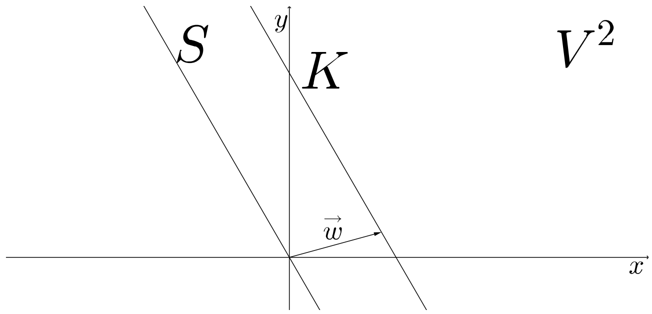
Definicija 1.2.5. Skup oblika $K = \{w\} + S$, gdje je S potprostor se naziva linearna afina mnogostrukost.

Primjer 1.2.6. Podsjetimo da su u prostoru R^2 potprostori sve prave koje prolaze kroz koordinatni početak. Ukoliko neku pravu koja prolazi kroz koordinatni početak pomjerimo za vektor $w \neq \theta$, dobićemo pravu koja ne prolazi kroz koordinatni početak. Takve prave i jesu linearne afine mnogostrukosti u R^2 (Slika 3.1).

Dakle, opšte rješenje nehomogenog sistema linearnih jednačina ima strukturu linearne afine mnogostrukosti (u slučaju da nije prazan skup).

Sada razmotrimo pitanje kada sistem nehomogenih jednačina ima rješenje. Sa $(A|b)$ označavamo proširenu matricu sistema (1.6) formata $m \times (n + 1)$.

Teorema 1.2.7 (Kroneker-Kapeli)**.** *Sistem linearnih jednačina* (1.6) *ima rješenje ako i samo ako je* $\text{rank}A = \text{rank}(A|b)$.



Slika 1.1: S je vektorski potprostor, a $K = \{w\} + S$ je afina mnogostrukost u V^2.

Dokaz. Pretpostavimo da je sistem (1.6) saglasan. Tada postoje skalari $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{P}$ tako da je $\sum_{j=1}^{n} a_j^i \lambda_j = b_i$, $i = \overline{1, m}$, odnosno $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j = b$. Iz ovoga se vidi da je kolona b linearna kombinacija kolona matrice A, pa je $\text{rank}A = \text{rank}(A|b)$.

Dokažimo tvrđenje i u drugom smjeru. Neka je $\text{rank}A = \text{rank}(A|b) = k$. Tada postoji k linearno nezavisnih kolona matrice A, a time i matrice $(A|b)$. Bez smanjenja opštosti možemo pretpostaviti da se radi o prvih k kolona. Svaka kolona $(A|b)$ je linearna kombinacija baznih, pa je specijalno i $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_k a_k$, pri čemu postoji $\lambda_i \neq 0$, $1 \leq i \leq k$. Odavde je $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_k a_k + 0 \cdot a_{k+1} + \cdots + 0 \cdot a_n$, odnosno $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{P}^n$ je rješenje sistema (1.6). $\square$

Primjer 1.2.8. Razmotrimo nehomogeni sistem linearnih jednačina:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 1; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -1; \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 = -7. \end{cases}$$

Odredimo rang matrice $(A|b)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & -1 & 3 & -7 \end{array}\right) \to Iv \cdot (-3) + IIv; Iv \cdot (-5) + IIIv \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -12 \end{array}\right)$$

$$\to IIv \cdot (-1) + IIIv \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right).$$

Sada vidimo da je $\text{rank}A = 2$ i $\text{rank}(A|b) = 3$, pa po Kroneker-Kapelijevoj teoremi sistem nema rješenja.

Primjer 1.2.9. Razmotrimo nehomogeni sistem linearnih jednačina:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 1; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -1; \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 + 3x_4 = 1. \end{cases}$$

Odredimo rang matrice $(A|b)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & -3 & -1 & 3 & 1 \end{array}\right) \to Iv \cdot (-3) + IIv; Iv \cdot (-5) + IIIv \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

$$\to IIv \cdot (-1) + IIIv \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Dakle, $\text{rank}A = 2$ i $\text{rank}(A|b) = 2$, sistem ima rješenje.

Posmatrajmo nehomogeni sistem linearnih jednačina od n jednačina sa n nepoznatih:

$$Ax = b, \quad A \in \mathbb{P}^{n\times n},\, b \in \mathbb{P}^n,\, x \in \mathbb{P}^n. \tag{1.8}$$

Teorema 1.2.10. *Neka je matrica A u sistemu* (1.8) *regularna. Tada sistem* (1.8) *ima jedinstveno rješenje $x = A^{-1}b$. Obratno, ako sistem* (1.8) *ima jedinstveno rješenje, tada je matrica A regularna.*

Dokaz. Neka je matrica A regularna. Uvrštavajući $x = A^{-1}b$ u (1.8), imamo $A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = b$. Dakle, $A^{-1}b$ je rješenje (1.8). Neka je w proizvoljno rješenje (1.8), tj. $Aw = b$. Množeći posljednju jednakost sa A^{-1} imamo $w = A^{-1}b$. Dakle, sistem ima jedinstveno rješenje $A^{-1}b$.

Pokažimo sada obratno. Neka sistem (1.8) ima jedinstveno rješenje w. S je skup rješenja homogenog sistema $Ax = \theta$. Tada po Teoremi 1.2.2 imamo da je $\{w\} = \{w\} + S$. To je moguće jedino ako je $S = \{\theta\}$. Dakle, sistem $Ax = \theta$ ima samo trivijalno rješenje, pa je po Teoremi 1.1.4 matrica A regularna. □

Sada ćemo navesti jedan metod rješavanja sistema (1.8) sa regularnom matricom.

Teorema 1.2.11 (Kramerovo pravilo)**.** *Neka je matrica A u sistemu* (1.8) *regularna. Neka je matrica M_j, $j = \overline{1,n}$ dobijena iz matrice A zamjenom j-te kolone sa kolonom b. Tada je*

$$x_1 = \frac{\det M_1}{\det A},\, x_2 = \frac{\det M_2}{\det A}, \ldots, x_n = \frac{\det M_n}{\det A}$$

jedinstveno rješenje sistema (1.8)*.*

Dokaz. Kako je A regularna matrica, sistem $Ax = b$ ima jedinstveno rješenje po Teoremi 1.2.10. Označimo sa $a_1, a_2, \ldots, a_n$ kolone matrice A, a sa X_k označimo matricu dobijenu iz jedinične matrice zamjenom k-te kolone vektorom nepoznatih $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Tada je

$$AX_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & x_1 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & x_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & x_k & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & x_n & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \sum_{i=1}^n a_{1i}x_i & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & \sum_{i=1}^n a_{2i}x_i & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & \sum_{i=1}^n a_{ki}x_i & \ldots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & \sum_{i=1}^n a_{ni}x_i & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & b_k & \ldots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = M_k.$$

Nađimo sada determinantu matrice X_k razlažući po k-toj koloni:

$$\det X_k = x_k \det I_{n-1} = x_k.$$

U prethodnoj jednakosti smo sa I_{n-1} označili jediničnu matricu dimenzije $n-1$.

Dalje imamo

$$\det M_k = \det(AX_k) = \det A \cdot \det X_k = x_k \det A,$$

pa je

$$x_k = \frac{\det M_k}{\det A}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

□