Glava 1

Spektralna teorija linearnih operatora u konačnodimenzionalnom prostoru

U ovoj glavi razmatraćemo linearne operatore koji preslikavaju jedan vektorski prostor u sebe i za takve operatore ćemo definisati važne pojmove: svojstvena vrijednost operatora, svojstveni vektor operatora i karakteristični polinom.

1.1 Invarijantni potprostori

Definicija 1.1.1. Neka je V vektorski prostor i $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$. Potprostor $U \subseteq V$ je invarijantni potprostor za $\mathscr{A}$ ako je $\mathscr{A}u \in U$, $\forall u \in U$, odnsno ako je $\mathscr{A}(U) \subseteq U$.

Primjer 1.1.2. (i) $\{0\}$ i V su invarijantni potrostori svakog operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$. Za ova dva invarijantna potprostora kažemo da su trivijalni invarijantni potprostori;

(ii) $\operatorname{Ker}\mathscr{A}$ je invarijantan potprostor za $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$, jer za sve $u \in \operatorname{Ker}\mathscr{A}$ važi $\mathscr{A}u = \theta \in \operatorname{Ker}\mathscr{A}$;

(iii) $\operatorname{Im}\mathscr{A}$ je invarijantan potprostor, jer je za sve $u \in \operatorname{Im}(\mathscr{A})$ ispunjeno $\mathscr{A}u \in \operatorname{Im}(\mathscr{A})$.

Primjer 1.1.3. (i) Operator rotacije u geometrijskoj ravni $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} \in \mathcal{L}(R^2 \to R^2)$ ima samo dva trivijalna invarijantna potprostora.

(ii) Operator projekcije na x-osu $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(R^2 \to R^2)$ ima 4 invarijantna potprostora i to: dva trivijalna invarijantna potprostora: $\{\theta\}$ i R^2, x-osa$= \operatorname{Im}\mathscr{P}$ i y-osa$= \operatorname{Ker}\mathscr{P}$.

(iii) Za operator rotacije u geometrijskoj ravni $\mathscr{R}_{\pi} \in \mathcal{L}(R^2 \to R^2)$ svi potprostori su invarijantni.

(iv) Potprostori $M_k \subseteq M_n$, $k = \overline{0,n}$ su invarijantni potprostori za operator diferenciranja $\mathscr{D} \in \mathcal{L}(M_n \to M_n)$.

Primjer 1.1.4. Operator projekcije $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(R^2 \to R^2)$ na x-osu u geometrijskoj ravni R^2 ima dva netrivijalna invarijantna potprostora $x-$ osa i $y-$ osa. Čitav prostor R^2 je direktna suma ova dva potprostora: $R^2 = x - \text{osa} \oplus y - \text{osa}$. Izaberimo baze u ova dva jednodimenzionalna potprostora: $\vec{e}_1 \in x - \text{osa}$ i $\vec{e}_2 \in y - \text{osa}$. Za bazu u R^2 uzmimo uniju ove dvije baze, tj. $e = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$. Tada je matrica operatora u izabranoj bazi $P(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ovo je bločni oblik matrice, sa dva bloka $A_1 = (1)$ i $A_2 = (0)$.

Primjedba 1.1.5. Pretpostavimo da operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ ima netrivijalni invarijantni potprostor $U \subseteq V$. Neka je $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ baza potprostora U i dopunimo je do baze $= u\{u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$ prostora V. Razmotrićemo slike baznih vektora. Kako je $u_1 \in U$, a U invarijantni potprostor operatora $\mathscr{A}$, imamo $\mathscr{A}u_1 \in U$. Ovo znači da taj vektor može predstaviti kao linearna kombinacija sistema vektora $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$, tj. imamo

$$\mathscr{A}u_1 = \alpha_{11}u_1 + \cdots + \alpha_{k1}u_k + 0 \cdot u_{k+1} + \cdots + 0 \cdot u_n.$$

Kako i vektori $\mathscr{A}u_2, \dots, \mathscr{A}u_k$ pripadaju potprostoru U, imamo

$$\begin{cases} \mathscr{A}u_2 = \alpha_{12}u_1 + \cdots + \alpha_{k2}u_k + 0 \cdot u_{k+1} + \cdots + 0 \cdot u_n \\ \vdots \\ \mathscr{A}u_k = \alpha_{1k}u_1 + \cdots + \alpha_{kk}u_k + 0 \cdot u_{k+1} + \cdots + 0 \cdot u_n \end{cases}$$

Međutim, za preostale bazne vektore $u_{k+1}, u_{k+2}, \dots, u_n$ ne možemo tvrditi isto, jer oni ne pripadaju invarijantnom potprostoru U.

Prema tome, matrica operatora $\mathscr{A}$ u bazi u je

$$A(u) = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1k} & \alpha_{1,k+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2k} & \alpha_{2,k+1} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kk} & \alpha_{k,k+1} & \dots & \alpha_{kn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{k+1,k+1} & \dots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{n,k+1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Dobijena matrica $A(u)$ sadrži blok-matricu formata $(n-k) \times (n-k)$ koja se sastoji od nula.

Dakle, ukoliko imamo netrivijalni invarijantni potprostor U operatora, tada možemo izabrati bazu vektorskog prostora na način da matrica operatora u toj bazi ima jednostavniji oblik.

Primjedba 1.1.6. Prethodno razmatranje pokušajmo sada da uopštimo.

Pretpostavimo da prostor V možemo napisati kao direktnu sumu $V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_s$, pri čemu su potprostori $U_1, U_2, \dots, U_s$ invarijantni za operator $\mathscr{A}$. Tada postoji baza prostora V tako da matrica operatora $\mathscr{A}$ u toj bazi ima još jednostavniji oblik. Naime, izaberimo baze u invarijantnim potprostorima: neka je $\{u_1, u_2, \dots u_{p_1}\}$ baza u U_1, neka je $\{u_{p_1+1}, u_{p_1+2}, \dots, u_{p_2}\}$ baza u U_2, itd. Na kraju, neka je $\{u_{p_{s-1}+1}, u_{p_{s-1}+2}, \dots, u_{p_s}\}$ baza u U_s. Kako je suma direktna, sistem vektora $u = \{u_1, \dots, u_{p_1}, u_{p_1+1}, \dots, u_{p_2}, \dots, u_{p_{s-1}+1}, \dots, u_{p_s}\}$ je baza prostora V ($p_s = n = \dim V$).

Kako je U_1 invarijantan potprostor za $\mathscr{A}$, budući da $u_j \in U_1$, imamo $\mathscr{A}u_j \in U_1$, $j = \overline{1, p_1}$. Zato se ovi vektori razlažu po bazi u potprostora U_1, tj. imamo

$$\mathscr{A}u_j = \alpha_{j1}u_1 + \cdots + \alpha_{jp_1}u_{p_1} + 0 \cdot u_{p_1+1} + \cdots + \cdots + 0 \cdot u_{p_s}, \quad j = \overline{1, p_1}.$$

Dalje, kako se vektori $u_{p_1+1}, \dots, u_{p_2} \in U_2$ preslikavaju u vektore iz potprostora U_2, njihove slike se razlažu po bazi tog potprostora. Dakle,

$$\mathscr{A}u_j = 0 \cdot u_1 + \cdots + 0 \cdot u_{p_1} + \alpha_{j,p_1+1}u_{p_1+1} + \cdots + \alpha_{j,p_2}u_{p_2} + 0 \cdot u_{p_2+1} + \cdots + \cdots + 0 \cdot u_{p_s},$$

za sve $j = p_1 + 1, \ldots, p_2$.

Isti proces možemo sprovesti i za preostale vektore u bazama potprostora $U_3, U_4, \ldots, U_s$.

Konačno, zaključujemo da u bazi u matrica operatora $\mathscr{A}$ ima sljedeći "bločni" oblik:

$$A(u) = \begin{pmatrix} A_1 & O & \ldots & O \\ O & A_2 & \ldots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \ldots & A_s \end{pmatrix}.$$

Ovdje su sa O označene podmatrice koje se sastoje isključivo od nula (ali nijesu sve obavezno istog formata), dok je, recimo, $A_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1p_1} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2p_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{p_1 1} & \alpha_{p_1 2} & \ldots & \alpha_{p_1 p_1} \end{pmatrix}$.

1.2 Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori linearnog operatora

Definicija 1.2.1. Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{P}$. Vektor $x \neq 0$ je svojstveni vektor operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$, ako postoji $\lambda \in \mathbb{P}$ tako da je $\mathscr{A}x = \lambda x$. Skalar λ se naziva svojstvenom vrijednošću operatora $\mathscr{A}$. Spektar operatora $\mathscr{A}$ je skup svih njegovih svojstvenih vrijednosti.

Napomena 1.2.2. U matematičkoj literaturi na engleskom jeziku se za svojstvene vrijednosti vrijednosti i svojstvene vektore koriste termini *eigenvalues* i *eigenvectors*. (Koristi se njemačka riječ *eigen* = svoj, svojstveni.)

Primjer 1.2.3. (i) Operator $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} \in \mathcal{L}(R^2 \to R^2)$ rotacije za ugao $\frac{\pi}{2}$ u geometrijskoj ravni nema svojstvenih vrijednosti.

(ii) Operator $\mathscr{R}_{\pi} \in \mathcal{L}(R^2 \to R^2)$ rotacije za ugao π u R^2 ima svojstvenu vrijednost $\lambda = -1$. Svi vektori prostora R^2 su svojstveni vektori ovog operatora.

(iii) Operator $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(R^2 \to R^2)$ projekcije na x-osu u R^2 ima svojstvenu vrijednost $\lambda = 1$. Svojstveni vektori koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti $\lambda = 1$ su svi vektori na osi $x-$osi. Takođe, $\lambda = 0$ je svojstvena vrijednost ovog operatora, a svojstveni vektori koji joj odgovaraju su svi vektori na y-osi.

(iv) Operator $\mathscr{D} \in \mathcal{L}(M_n \to M_n)$ diferenciranja na prostoru M_n ima jedinstvenu svojstvenu vrijednost $\lambda = 0$. Svojstveni vektori koji odgovaraju ovoj svojstvenoj vrijednosti su konstantni polinomi.

Primjer 1.2.4. (i) Svi vektori iz $\operatorname{Ker}\mathscr{A} \neq \{\theta\}$ (izuzev nula-vektora) su svojstveni vektori operatora $\mathscr{A}$ koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti $\lambda = 0$, budući da $x \in \operatorname{Ker}\mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{A}x = 0 = 0 \cdot x$.

(ii) Ako je x svojstveni vektor operatora $\mathscr{A}$ za svojstvenu vrijednost λ i $\alpha \in \mathbb{P}$, $\alpha \neq 0$, tada je vektor αx takođe svojstveni vektor operatora $\mathscr{A}$ za svojstvenu vrijednost λ. Zaista, $\mathscr{A}(\alpha x) = \alpha\mathscr{A}x = \alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x)$.

(iii) Ako je x svojstveni vektor za $\mathscr{A}$, lako je pokazati da je $\text{Lin}\{x\} = \{\alpha x : \alpha \in \mathbb{P}\}$ jednodimenzionalni invarijantni potprostor za $\mathscr{A}$.

(iv) Ako je x svojstveni vektor operatora $\mathscr{A}$ za svojstvenu vrijednost λ, tada je x svojstveni vektor operatora $\mathscr{A}^2$ za svojstvenu vrijednost λ^2.

Teorema 1.2.5. *Sistem svojstvenih vektora koji odgovaraju međusobno različitim svojstvenim vrijednostima operatora je linearno nezavisan.*

Dokaz. Dokaz ćemo izvesti indukcijom prema broju svojstvenih vektora operatora $\mathscr{A}$.

Ako je $\{x_1\}$ sistem od jednog svojstvenog vektora operatora $\mathscr{A}$, tada je $x_1 \neq 0$, prema samoj definiciji, pa je riječ o linearno nezavisnom sistemu.

Pretpostavimo da je iskaz u teoremi tačan za sistem koji ima m svojstvenih vektora koji odgovaraju međusobno različitim svojstvenim vrijednostima operatora $\mathscr{A}$. Pretpostavimo sada da je $\{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}\}$ sistem svojstvenih vektora operatora $\mathscr{A}$ koji odgovaraju svojstvenim vrijednostima $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \lambda_{m+1}$, gdje je $\lambda_i \neq \lambda_j$ za sve različite $i, j = \overline{1, m+1}$, odnosno neka je $\mathscr{A}x_j = \lambda_j x_j$, $j = \overline{1, m+1}$. Potrebno je dokazati da je sistem vektora $\{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}\}$ linearno nezavisan.

Neka je $\sum_{j=1}^{m+1} \alpha_j x_j = \theta$. Tada imamo

$$\mathscr{A}(\sum_{j=1}^{m+1} \alpha_j x_j) = \theta \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{m+1} \alpha_j \mathscr{A} x_j = \theta \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{m+1} (\alpha_j \lambda_j) x_j = \theta.$$

Slijedi

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m+1} (\alpha_j \lambda_j) x_j - \lambda_{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \alpha_j x_j = \theta &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{m+1} (\alpha_j \lambda_j - \lambda_{m+1} \alpha_j) x_j = \theta \\ &\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{m} (\alpha_j \lambda_j - \lambda_{m+1} \alpha_j) x_j = \theta. \end{aligned}$$

Kako je sistem vektora $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ linearno nezavisan prema pretpostavci indukcije, imamo $\alpha_j(\lambda_j - \lambda_{m+1}) = 0$, $j = \overline{1, m}$. Kako su svojstvene vrijednosti međusobno različite, biće $\lambda_j - \lambda_{m+1} \neq 0$, a to povlači $\alpha_j = 0$, $j = \overline{1, m}$. Sada se jednakost $\sum_{j=1}^{m+1} \alpha_j x_j = \theta$ svodi na $\alpha_{m+1} x_{m+1} = 0$. Budući da je $x_{m+1} \neq 0$, imamo $\alpha_{m+1} = 0$. Dakle, dobili smo $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = \alpha_{m+1} = 0$, što dokazuje da je sistem vektora $\{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}\}$ linearno nezavisan. $\square$

Posljedica 1.2.6. *Linearni operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ može imati najviše $n = \dim V$ različitih svojstvenih vrijednosti.*

Primjedba 1.2.7. Pretpostavimo da $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ ima $n = \dim V$ linearno nezavisnih svojstvenih vektora $x_1, x_2, \dots, x_n$ i neka je $\mathscr{A}x_1 = \lambda_1 x_1, \mathscr{A}x_2 = \lambda_2 x_2, \dots, \mathscr{A}x_n = \lambda_n x_n$. Tada je

$$\begin{cases} \mathscr{A}x_1 = \lambda_1 x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \dots + 0 \cdot x_n; \\ \mathscr{A}x_2 = 0 \cdot x_1 + \lambda_2 x_2 + 0 \cdot x_3 + \dots + 0 \cdot x_n; \\ \vdots \\ \mathscr{A}x_n = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \dots + \lambda_n x_n. \end{cases} \tag{1.1}$$

Vidimo da je matrica operatora $\mathscr{A}$ u bazi $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ dijagonalna, tj.

$$A(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Definicija 1.2.8. Operator $\mathscr{A}$ je proste strukture ako postoji baza od svojstvenih vektora $\mathscr{A}$.

Iz Teoreme 1.2.5 slijedi

Posljedica 1.2.9. *Ako operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ ima $n = \dim V$ različitih svojstvenih vrijednosti, operator $\mathscr{A}$ je proste strukture.*

Primjer 1.2.10. (i) Operator $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(R^2 \to R^2)$ je proste strukture, jer ima dvije različite svojstvene vrijednosti ($2 = \dim R^2$).

(ii) Operator $\mathscr{R}_\pi \in \mathcal{L}(R^2 \to R^2)$ je takođe proste strukture, iako ima samo jednu svojstvenu vrijednost.

(iii) Operator $\mathscr{D} \in \mathcal{L}(M_n \to M_n)$ za $n \geq 1$ nije proste strukture (ima samo jedan linearno nezavisni svojstveni vektor).

(iv) Operator $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} \in \mathcal{L}(R^2 \to R^2)$ nije proste strukture (jer uopšte nema svojstvenih vektora).

1.3 Karakteristični polinom operatora

U prethodnoj sekciji smo uveli veoma važne pojmove svojstvene vrijednosti i svojstvenog vektora linearnog operatora. Međutim, nismo ukazali način na koji se u opštem slučaju mogu naći svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori. Ova sekcija će biti posvećena tom važnom pitanju.

Ipak, da bi se materijal koji slijedi bolje razumio, potrebno je znati neke činjenice iz Opšte algebre o polinomima, njihovim korijenima i slično. Stoga ćemo se najprije kratko upoznati sa ovim činjenicama.

Definicija 1.3.1. Neka je $p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$ polinom sa koeficijentima $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ iz polja $\mathbb{P}$, $a_n \neq 0$. Korijenom, ili nulom, polinoma $p(t)$ se naziva svako rješenje jednačine $p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0 = 0$.

Definicija 1.3.2. Polje $\mathbb{P}$ se naziva kompletnim, ako svaki polinom stepena ≥ 1 sa koeficijentima iz $\mathbb{P}$ ima bar jedan korijen u polju $\mathbb{P}$.

Primjer 1.3.3. Polje $\mathbb{R}$ nije kompletno, jer recimo polinom $p(t) = t^2 + 1$ nema korijen u $\mathbb{R}$.

Činjenica da polje $\mathbb{R}$ nije kompletno čini neophodnim da uvedemo kompleksne brojeve. Za nas je važna teorema koja tvrdi da je polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ kompletno. Ova teorema nosi naziv "Osnovna teorema algebre". Ona se može dokazati na različite načine, ali nijedan od tih dokaza nije jednostavan. Budući da ova teorema nije predmet proučavanja Linearne algebre, mi ćemo je ovdje formulisati bez dokaza.

Teorema 1.3.4 (Osnovna teorema algebre)**.** *Svaki polinom stepena* ≥ 1 *sa koeficijentima u* $\mathbb{C}$ *ima korijen u* $\mathbb{C}$*. Drugim riječima, polje* $\mathbb{C}$ *je kompletno.*

Primjedba 1.3.5. Ako je $\lambda \in \mathbb{P}$ korijen polinoma $p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ stepena n (tj. $a_n \neq 0$), tada je polinom $p(t)$ dijeliv sa $t - \lambda$ i količnik ova dva polinoma $(a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0) : (t - \lambda)$ je polinom stepena $n - 1$.

Definicija 1.3.6. Neka je λ korijen polinoma $p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$, $a_n \neq 0$. Tada je kratnost korijena λ najveći cijeli broj k takav da je $(t - \lambda)^k$ djelilac polinoma $p(t)$.

Primjer 1.3.7. (i) Polinom $t^2 - 2t + 1$ ima korijen 1 kratnosti 2.
(ii) Polinom t^5 ima korijen 0 kratnosti 5.

Lema 1.3.8. *Svaki polinom stepena* n *sa koeficijentima iz* $\mathbb{C}$ *ima* n *korijena, računajući njihovu kratnost.*

Dokaz. Tvrđene je dovoljno pokazati za polinome oblika $p(t) = t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$ sa koeficijentima $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$. Na osnovu Osnovne teoreme algebre, postoji korijen $\lambda \in \mathbb{C}$. Ako polinom $p(t)$ podijelimo sa $t - \lambda$, dobijamo polinom $g(t)$ stepena $n - 1$. Po Osnovnoj teoremi algebre polinom $g(t)$ takođe ima korijen u $\mathbb{C}$. Produžavajući postupak, dobijamo n korijena u $\mathbb{C}$, računajući njihovu kratnost. $\square$

Pošto smo se upoznali sa nekim pojmovima i teoremama iz Opšte algebre, vratimo se pitanju nalaženja svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora linearnog operatora.

Definicija 1.3.9. Karakterističnim polinomom operatora $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ nazivamo polinom

$$\chi_{\mathscr{A}}(t) = \det(\mathscr{A} - t\mathscr{I})$$

čiji je stepen $n = \dim V$.

Teorema 1.3.10. *Neka je* V *vektorski prostor nad poljem* $\mathbb{P}$*. Skalar* $\lambda \in \mathbb{P}$ *je svojstvena vrijednost operatora* $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ *ako i samo ako je* λ *korijen karakterističnog polinoma* $\chi_{\mathscr{A}}(t)$ *operatora* $\mathscr{A}$*, tj. ako je* λ *rješenje jednačine* $\chi_{\mathscr{A}}(\lambda) = 0$*.*

Dokaz. $\lambda \in \mathbb{P}$ je svojstvena vrijednost operatora $\mathscr{A}$ $\Leftrightarrow$ postoji $x \in V$, $x \neq \theta$ tako da je $\mathscr{A}x = \lambda x \Leftrightarrow \mathscr{A}x - \lambda x = \theta \Leftrightarrow (\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I})x = \theta \Leftrightarrow x \in \operatorname{Ker}(\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I}) \Leftrightarrow \operatorname{defect}(\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I}) > 0 \Leftrightarrow$ operator $\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I}$ je singularan $\Leftrightarrow \chi_{\mathscr{A}}(\lambda) = \det(\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I}) = 0 \Leftrightarrow \lambda$ je korijen karakterističnog polinoma operatora $\mathscr{A}$. $\square$

Primjedba 1.3.11. Izaberimo bazu v u V. Neka su $A(v)$ i I matrice operatora $\mathscr{A}$ i $\mathscr{I}$ u bazi v. Tada je $\det(\mathscr{A} - t\mathscr{I}) = \det(A(v) - tI)$. Iz svojstava sličnih matrica znamo da ova determinanta ne zavisi od izbora baze v. Dakle, da bismo našli karakteristični polinom operatora $\mathscr{A}$, potrebno je zapisati matricu ovog operatora u bilo kojoj bazi, oduzeti od nje matricu tI i izračunati determinantu dobijene matrice.

Primjer 1.3.12. (i) Razmotrimo operator projekcije $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$. Matrica operatora $\mathscr{P}$ u standardnoj bazi e je $P = P(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, pa je $P - tI = \begin{pmatrix} 1-t & 0 \\ 0 & -t \end{pmatrix}$. Dakle, karakteristični polinom operatora $\mathscr{P}$ je $\chi_{\mathscr{P}}(t) = \det(P - tI) = t^2 - t$. Svojstvene vrijednosti operatora $\mathscr{P}$ su korijeni njegovog karakterističnog polinoma, tj. rješenja jednačine $t^2 - t = 0$. Odavde nalazimo da $\mathscr{P}$ ima dvije svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = 1$.

(ii) Matrica operator rotacije $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$ u standardnoj bazi je $R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, pa je $R_{\frac{\pi}{2}} - tI = \begin{pmatrix} -t & -1 \\ 1 & -t \end{pmatrix}$. Slijedi $\det(R_{\frac{\pi}{2}} - tI) = t^2 + 1$. Dakle, $\chi_{\mathscr{R}}(t) = t^2 + 1$ je karakteristični polinom operatora $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}}$. Kako jednačina $t^2 + 1 = 0$ nema rješenja u polju $\mathbb{R}$, operator $\mathscr{R}_{\frac{\pi}{2}}$ nema svojstvenih vrijednosti.

(iii) Za operator diferenciranja $\mathscr{D} \in \mathcal{L}(M_n \to M_n)$ imamo

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad D - tI = \begin{pmatrix} -t & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -t & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -t \end{pmatrix}.$$

Odavde, $\chi_{\mathscr{D}}(t) = (-t)^{n+1} = 0$. Dakle, $\mathscr{D}$ ima jedinstvenu svojstvenu vrijednost $\lambda = 0$.

Teorema 1.3.10 nam djelimično daje odgovor na pitanje s početka ove sekcije. Pozivajući se na ovu teoremu, možemo naći svojstvene vrijednosti bilo kojeg linearnog operatora (pod uslovom da umijemo računati korijene polinoma). Dakle, dobili smo sistematski odgovor na ovo pitanje, kojim možemo biti zadovoljni, posebno ako imamo u vidu da u složenijim slučajevima korijene polinoma možemo lako naći uz pomoć računara. Sada ostaje drugi dio pitanja s početka sekcije: kako naći svojstvene vektore linearnog operatora? Pokazuje se da se ovaj zadatak, nakon nalaženja svojstvenih vrijednosti, svodi na zadatak koji nam je veoma dobro poznat: homogeni sistem linearnih jednačina.

Pretpostavimo da smo za linearni operator $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ našli njegovu svojstvenu vrijednost λ. Pogledajmo na koji način možemo naći svojstveni vektor x operatora $\mathscr{A}$, koji odgovara sopstvenoj vrijednosti λ. Iz jednakosti $\mathscr{A}x = \lambda x$ slijedi $(\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I})x = \theta$. Izaberimo neku bazu v u V, tada prethodnu jednakost možemo zapisati u koordinatnom obliku

$$(A(v) - \lambda I)x = \theta, \tag{1.2}$$

gdje je I jedinična matrica, $A(v)$ poznata matrica, a λ poznat broj. Dakle, pitanje nalaženja svojstvenog vektora x smo sveli na rješavanje homogenog sistema linearnih jednačina (1.2). Naravno, ovaj zadatak uvijek ima trivijalno rješenje $x = \theta$, ali je nama potrebno netrivijalno rješenje, jer je svojstveni vektor (po definiciji) različit od nule.

Sada se postavlja važno pitanje da li sistem (1.2) uvijek ima netrivijalno rješenje. Kako bismo odgovorili na to pitanje, podsjetimo se da smo svojstvenu vrijednost λ našli iz uslova $\det(A(v) - \lambda I) = 0$, tj. tako da matrica $A(v) - \lambda I$ bude singularna. Sada iz Teoreme **??** slijedi da sistem (1.2) uvijek ima netrivijalno rješenje. To rješenje i jeste svojstveni vektor x operatora

$\mathscr{A}$. Dakle, sistem (1.2) ima netrivijalno rješenje samim tim što je λ svojstvena vrijednost za $\mathscr{A}$, ili, obratno, ako sistem (1.2) nema netrivijalno rješenje, to λ nije svojstvena vrijednost operatora $\mathscr{A}$.

Primjer 1.3.13. (i) Za $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$ smo odredili njegovu matricu u standarnoj bazi $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ i karakteristični polinom $\chi_{\mathscr{P}}(t) = t^2 - t$. Kako bismo našli svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = 1$, riješimo sistem $(P - 1 \cdot I)x = \theta$, tj. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dobijamo da su svojstveni vektori koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = 1$ svi vektori oblika $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, tj. vektori sa x-ose. Za drugu svojstvenu vrijednost, $\lambda = 0$ potrebno je riješiti sistem $(P - 0 \cdot I)x = Px = \theta$, tj. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Svojstveni vektori koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2 = 0$ su oblika $x = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$, tj. vektori sa y-ose.

(ii) Za operator $D \in \mathcal{L}(M_n \to M_n)$ imamo jedinstvenu svojstvenu vrijednost $\lambda = 0$, pa je za nalaženje svojstvenog vektora potrebno riješiti sistem linearnih jednačina:

$$(D - 0 \cdot I)a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rješenje ovog sistema su vektori sa koordinatama $a = \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, tj. polinomi oblika $p(t) = a_0 =$ const.

Napomena 1.3.14. Još jednom naglasimo da smo u svim primjerima u ovoj sekciji mogli izabrati bilo koje druge baze i raditi sa matricama operatora u tim bazama, to ne bi uticalo na svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore, zahvaljujući svojstvima sličnih matrica. Mi smo birali standardne baze isključivo iz razloga što je računanje u tim bazama lakše.

1.4 Svojstveni potprostor linearnog operatora

Neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$ i neka je λ svojstvena vrijednost operatora $\mathscr{A}$. Označimo sa

$$W_\lambda = \{v \in V : \mathscr{A}v = \lambda v\}$$

skup svih svojstvenih vektora operatora $\mathscr{A}$, koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti λ, pri čemu smo ovom skupu svojstvenih vektora pridružili i nula-vektor.

Teorema 1.4.1. *Skup W_λ je vektorski potprostor u V, invarijantan za operator $\mathscr{A}$.*

Dokaz. Neka su $v \in W_\lambda$ i $w \in W_\lambda$ proizvoljni vektori i neka je $\alpha \in \mathbb{P}$ proizvoljan skalar. Tada je $\mathscr{A}v = \lambda v$ i $\mathscr{A}w = \lambda w$. Slijedi $\mathscr{A}(v+w) = \mathscr{A}v + \mathscr{A}w = \lambda v + \lambda w = \lambda(v+w)$. Dakle, $v + w \in W_\lambda$. Sa druge strane je $\mathscr{A}(\alpha v) = \alpha\mathscr{A}v = \alpha(\lambda v) = \lambda(\alpha v)$, pa imamo i $\alpha v \in W_\lambda$. Ovim smo pokazali da je W_λ zaista vektorski potprostor u V.

Kako je $\mathscr{A}v = \lambda v \in W_\lambda$, $\forall v \in W_\lambda$, imamo da je potprostor W_λ invarijantan za $\mathscr{A}$. □

Definicija 1.4.2. W_λ se naziva svojstvenim potprostorom operatora $\mathscr{A}$ koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ.

Teorema 1.4.3. *Ako je λ korijen karakterističnog polinoma operatora $\mathscr{A}$ kratnosti k, tada je $\dim W_\lambda \leq k$.*

Dokaz. Neka je $\dim W_\lambda = l$. Izaberimo bazu $\{w_1, w_2, \ldots, w_l\}$ potprostora W_λ i dopunimo je do baze $w = \{w_1, \ldots, w_l, w_{l+1}, \ldots, w_n\}$ prostora V. Matrica operatora $\mathscr{A}$ u bazi w ima oblik (vidjeti Primjedbu iz Sekcije 5.1)

$$A(w) = \begin{pmatrix} P & Q \\ O & R \end{pmatrix},$$

gdje je matrica P formata $l \times l$ i dijagonalna:

$$P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Odavde imamo da je karakteristični polinom operatora $\mathscr{A}$ zadat sa:

$$\chi_{\mathscr{A}}(t) = \det(A(w) - tI) = (\lambda - t)^l \det(R - tI) = (\lambda - t)^l \phi(t),$$

gdje je $\phi(t) = \det(R - tI)$ polinom stepena $n - l$.

S druge strane, λ je korijen kratnosti k, pa je $\chi_{\mathscr{A}}(t) = (\lambda - t)^k \psi(t)$, pri čemu je $\psi(\lambda) \neq 0$. Dakle, $(\lambda - t)^l \phi(t) = (\lambda - t)^k \psi(t)$. Kako je $\psi(\lambda) \neq 0$ (dok $\phi(\lambda)$ može biti nula), zaključujemo da mora biti $l \leq k$. □

Definicija 1.4.4. Kratnost korijena λ polinoma $\chi_{\mathscr{A}}(t)$ se naziva algebarskom kratnošću svojstvene vrijednosti λ. Dimenzija svojstvenog potprostora W_λ koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ se naziva geometrijskom kratnošću svojstvene vrijednosti λ.

Prema terminologiji iz prethodne definicije, Teorema 1.4.3 tvrdi da je geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti manja ili jednaka od algebarske. U narednim primjerima ćemo vidjeti da je u nekim slučajevima geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti jednaka algebarskoj, dok je u drugim strogo manja.

Primjer 1.4.5. (i) Svojstvene vrijednosti operatora projekcije $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$ su $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = 1$. Obije svojstvene vrijednosti su algebarske kratnosti 1. Svi svojstveni vektori koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = 0$ su: $\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}$, pa je $\dim W_{\lambda_1} = 1$. Svi svojstveni vektori koji odgovaraju svojstvenoj vrijednosti $\lambda_2 = 0$ su: $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, pa je $\dim W_{\lambda_2} = 1$. Dakle, u ovom slučaju geometrijske i algebarske kratnosti svojstvenih vrijednosti su jednake.

(ii) Razmotrimo operator rotacije $\mathscr{R}_\pi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$ za ugao π. Matrica ovog operatora u standardnoj bazi e prostora $\mathbb{R}^2$ je $R_\pi(e) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, a njegov karakteristični polinom je $\chi_{\mathscr{R}}(t) = (t+1)^2$, pa je $\lambda_0 = -1$ svojstvena vrijednost kratnosti 2. Svojstveni vektori koji odgovaraju ovoj svojstvenoj vrijednosti su svi vektori u $\mathbb{R}^2$, pa je $\dim W_{\lambda_0} = 2$. Dakle, algebarska i geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti -1 su jednake 2.

(iii) Za operator diferenciranja $\mathscr{D} \in \mathcal{L}(M_n \to M_n)$ karakteristični polinom je $\chi_{\mathscr{D}}(t) = (-1)^{n+1}t^{n+1}$, pa on ima jedinstvenu svojstvenu vrijednost $\lambda_0 = 0$. Algebarska kratnost ove svojstvene vrijednosti je $n+1$, a njoj odgovaraju svojstveni vektori (polinomi) oblika $p(t) = \text{const}$, pa je $\dim W_{\lambda_0} = 1$. Dakle, geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti je 1. Ovaj primjer pokazuje da geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti može biti strogo manja od algebarske.

Teorema 1.4.6. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ i $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$. Tada postoji invarijantan potprostor za operator $\mathscr{A}$ dimenzije 1 ili 2.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da karakteristični polinom za $\mathscr{A}$ ima bar jedan korjen $\lambda \in \mathbb{R}$. Tada je λ svojstvena vrijednost za operator $\mathscr{A}$ i operator $\mathscr{A}$ ima invarijantan potprostor dimenizije 1; ako je x svojstveni vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti λ, tada je $W = \{\alpha x : \alpha \in \mathbb{R}\}$ invarijantan potprostor operatora $\mathscr{A}$ čija je dimenzija 1.

Pretpostavimo sada da karakteristični polinom za operator $\mathscr{A}$ nema nulu u polju $\mathbb{R}$. Pokazaćemo da tada postoji invarijantni potprostor za $\mathscr{A}$ dimenzije 2.

Definisaćemo vektorski prostor V' nad poljem $\mathbb{C}$: vektori prostora V' su parovi vektora iz V, tj. $V' = \{(x, y) : x \in V, y \in V\}$. Sabiranje vektora u V' i množenje skalarom su određeni na sljedeći način $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ i $(a + ib)(x, y) = (ax - by, ay + bx)$. Neposredno se može provjeriti da je V' vektorski prostor nad poljem $\mathbb{C}$.

Uzmimo sada u obzir operator $\mathscr{A}' : V' \to V'$; $\mathscr{A}'(x, y) = (\mathscr{A}x, \mathscr{A}y)$, $\forall (x, y) \in V'$. Lako je pokazati da je $\mathscr{A}'$ linearan operator, tj. $\mathscr{A}' \in \mathcal{L}(V' \to V')$. Kako je polje kompleksih brojeva algebarski zatvoreno, karakteristični polinom za operator $\mathscr{A}'$ ima bar jednu nulu, a to znači da postoji bar jedna svojstvena vrijednost $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ za $\mathscr{A}'$. Neka je (x, y) odgovarajući svojstveni vektor. Tada je $\mathscr{A}'(x, y) = (\alpha + i\beta)(x, y)$, tj. $(\mathscr{A}x, \mathscr{A}y) = (\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x)$. Iz ove jednakosti imamo $\mathscr{A}x = \alpha x - \beta y$ i $\mathscr{A}y = \alpha y + \beta x$. Primjetimo sada da su oba vektora x i y različita od nula-vektora. Naime, ako bi neki od njih bio jednak nula-vektoru, imali bi da je $\alpha \in \mathbb{R}$ svojstvena vrijednost za operatora $\mathscr{A}$, a to smo pretpostavkom isključili.

Neka je W potprostor u V generisan vektorima x i y, tj. neka je $W = \text{Lin}\{x, y\}$. Tada je W invarijantan potprostor za $\mathscr{A}$ (njegova dimenzija naravno nije veća od 2). Naime, ako su μ

i ν proizvoljni skalari, tada imamo

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\mu x + \nu y) &= \mu\mathscr{A}x + \nu\mathscr{A}y\\ &= \mu(\alpha x - \beta y) + \nu(\alpha y + \beta x)\\ &= (\alpha\mu + \beta\nu)x + (\alpha\nu - \beta\mu)y \in \mathrm{Lin}\{x, y\}.\end{aligned}$$

Pokazaćemo još da je sistem $\{x, y\}$ linearno nezavisan i da je prema tome $\dim W = 2$. Primjetimo da mora biti $\beta \neq 0$, jer bi u suprotonom imali $\mathscr{A}x = \alpha x$, a kako je $x \neq \theta$ ponovo bi imali bi da je $\alpha \in \mathbb{R}$ svojstvene vrijednost operatora $\mathscr{A}$. Izjednačimo linearnu kombinaciju vektora x i y sa nula-vektorom, tj. neka je $\mu x + \nu y = \theta$, $\mu, \nu \in \mathbb{R}$. Ako djelujemo operatorom $\mathscr{A}$ na ovu jednakost, nalazimo $\mathscr{A}(\mu x + \nu y) = \mu\mathscr{A}x + \nu\mathscr{A}y = (\alpha\mu + \beta\nu)x + (\alpha\nu - \beta\mu)y = \theta$. Dakle, imamo $\mu x + \nu y = \theta$ i $(\alpha\mu + \beta\nu)x + (\alpha\nu - \beta\mu)y = \theta$. Prvu jednakost pomonožimo sa $-(\alpha\nu - \beta\mu)$, a drugu sa ν i potom ih saberimo. Lako dobijamo $\beta(\mu^2 + \nu^2)x = 0$. Kako je $\beta \neq 0$ i $x \neq 0$, imamo $\mu^2 + \nu^2 = 0$, pa je $\mu = \nu = 0$. Prema tome, sistem $\{x, y\}$ je zaista linearno nezavisan.

Ovim je teorema dokazana. Vidimo da u slučaju kada operator $\mathscr{A}$ ima svojstvenu vrijednost tada postoji invarijantni potprostor dimenzije 1, a ukoliko nema svojstvenih vrijednost, tada smo pokazali da postoji invarijantni potprostor dimenzije 2. □

1.5 Polinom od linearnog operatora. Teorema Hamiltona-Kejli

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{P}$ i neka je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$.

Definicija 1.5.1. Izraz

$$p(\mathscr{A}) = a_n\mathscr{A}^n + \alpha_{n-1}\mathscr{A}^{n-1} + \cdots + \alpha_2\mathscr{A}^2 + \alpha_1\mathscr{A} + \alpha_0\mathscr{I},$$

gdje je $a_j \in \mathbb{P}$, $j = \overline{0, n}$, $a_n \neq 0$, se naziva polinomom stepena n od linearnog operatora $\mathscr{A}$.

Primijetimo da je polinom od operatora takođe linearni operator, tj. $p(\mathscr{A}) \in \mathcal{L}(V \to V)$.

Teorema 1.5.2 (Hamilton-Kejli)**.** *Ako je $\mathscr{A} \in \mathcal{L}(V \to V)$, tada je $\chi_{\mathscr{A}}(\mathscr{A}) \equiv \mathscr{O}$, tj. svaki linearni operator je korijen svog karakterističnog polinoma.*

Dokaz. Neka je

$$\chi_{\mathscr{A}}(t) = \det(\mathscr{A} - t\mathscr{I}) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_{n-1}t^{n-1} + (-1)^n t^n$$

karakteristični polinom opertora $\mathscr{A}$. Treba pokazati da $\chi(\mathscr{A}) = \mathscr{O}$ (gdje je $\mathscr{O}$ je nula-operator).

Izaberimo bazu v u V i formirajmo matricu $A = A(v)$ operatora $\mathscr{A}$ u izabranoj bazi. Razmotrimo

$$A(t) = A - tI = \begin{pmatrix} \alpha_{11} - t & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - t & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - t \end{pmatrix}$$

i formirajmo pridruženu (adjugovanu) matricu matrici $A(t)$:

$$B(t) = \begin{pmatrix} A_{11}(t) & A_{21}(t) & \dots & A_{n1}(t) \\ A_{12}(t) & A_{22}(t) & \dots & A_{n2}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n}(t) & A_{2n}(t) & \dots & A_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Napomenimo da je $A_{ij}(t)$ algebarska dopuna elementa sa indeksima (j, i) matrice $A(t)$. Lako je zaključiti da su $A_{ij}(t)$ polinomi od t i to stepena $n-1$. Dakle, svi elementi matrice $B(t)$ su polinomi stepena $n-1$, pa se matrica $B(t)$ može zapisati na sljedeći način $B(t) = C_0 + C_1 t + \dots + C_{n-1}t^{n-1}$, gdje su $C_k \in \mathbb{P}^{n\times n}$, $k = \overline{0, n-1}$ matrice sastavljene od koeficijenata pored t^k u polinomima $A_{ij}(t)$. Iz svojstava pridruženih matrica imamo $A(t)B(t) = \det A(t) I$, tj.

$$(A - tI)(C_0 + C_1 t + \dots + C_{n-1}t^{n-1}) = (\alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_{n-1}t^{n-1} + (-1)^n t^n)I.$$

Posljednja jednakost dva polinoma stepena n se može zapisati kao $n+1$ jednakosti koeficijenata pored svih stepena t^k, $k = 0, 1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} AC_0 &= \alpha_0 I && (5.0)\\ AC_1 - C_0 &= \alpha_1 I && (5.1)\\ AC_2 - C_1 &= \alpha_2 I && (5.2)\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ AC_{n-1} - C_{n-2} &= \alpha_{n-1} I && (5.n-1)\\ -C_{n-1} &= (-1)^n I && (5.n) \end{aligned}$$

Ako jednakost u $(5.k)$ pomnožimo s lijeve strane sa matricom A^k, $k = \overline{0, n}$ i ako sve saberemo dobijamo

$$\begin{aligned} O &= AC_0 + A^2C_1 - AC_0 + A^3C_2 - A^2C_1 + \dots + A^nC_{n-1} - A^nC_{n-1} \\ &= \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_{n-1}A^{n-1} + (-1)^n A^n = \chi_{\mathscr{A}}(A). \end{aligned}$$

Dakle, pokazali smo da je $\chi_{\mathscr{A}}(A)$ nula-matrica. Jednakost $\chi_{\mathscr{A}}(\mathscr{A}) = \mathscr{O}$ slijedi iz činjenice da je $\operatorname{rank}\chi_{\mathscr{A}}(\mathscr{A}) = \operatorname{rank}\chi_{\mathscr{A}}(A)$. □

Primjer 1.5.3. Za operator projekcije $\mathscr{P} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2)$ karakteristični polinom je $\chi_{\mathscr{P}}(t) = t^2 - t$. Prema teorema Hamiltona-Kejli imamo da važi $\mathscr{P}^2 - \mathscr{P} = \mathscr{O}$, tj. $\mathscr{P}^2 = \mathscr{P}$. Nije teško vidjeti da operator projekcije zaista zadovoljava ovu jednakost. Takođe, možemo zapisati matricu P operatora $\mathscr{P}$ u nekoj bazi i uvjeriti se da važi matrična jednakost $P^2 - P = O$.