

Pri algebarskim operacijama vektore tretiramo kao vektore kolone, $(a, b) = a^*b$; a^* transponovana matrica.

Karakteristična funkcija slučajnog vektora $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ je

$$f_\zeta(r) := Ee^{i(r, \zeta)}, \quad r = (r_1, \dots, r_n), \quad r_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

I u višedimenzionalnom slučaju važi teorema jedinstvenosti.

Slučajni vektor $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ nazivamo Gausovim (ili normalno raspodijeljenim) ako je njegova karakteristična funkcija

$$f_\xi(t) = e^{i(t, m) - \frac{1}{2}(Rt, t)},$$

gdje je $m = (m_1, \dots, m_n)$, $R = (r_{k,l})$ je simetrična, pozitivno definitna matrica formata $n \times n$.

Pokazuje se da je ovo karakteristična funkcija vektora ξ čija je gustina

$$g_\xi(x) = ((2\pi)^n \det(R))^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}(R^{-1}(x-m), (x-m))}.$$

Koristi se zapis $\xi : \mathcal{N}(m, R)$ i čita se: vektor ξ ima Gausovu (normalnu) raspodjelu sa parametrima m i R . Pokazuje se da je $m_i = E\xi_i$, $r_{k,l} = cov(\xi_k, \xi_l)$ te je m vektor očekivanja, a R kovarijaciona matrica slučajnog vektora ξ .

Ekvivalentna definicija. Sučajni vektor ξ je Gausov ako je njegova gustina

$$g_\xi(x) = Ce^{-Q(x)}, \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

gdje je $Q(x)$ pozitivno definitna kvadratna forma.

Svojstva Gausovog vektora.

1. Svaki podvektor Gausovog vektora je Gausov.
2. Kod Gausovog vektora nekoreliranost komponenti je ekvivalentna sa njihovom nezavisnošću.
3. Vektor $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ je Gausov ako i samo ako za svaki vektor $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ slučajna promjenljiva $(\xi, \lambda) = \lambda_1\xi_1 + \dots + \lambda_n\xi_n$ ima Gausovu raspodjelu.
4. Ako je $X : \mathcal{N}(m, C)$ tada je $Y = BX + b : \mathcal{N}(Bm + b, BCB^*)$.
5. Ako je $X : \mathcal{N}(m, R)$ tada važi: $X \doteq m + AZ$, (jednakost u raspodjeli) gdje je A kvadratni korijen iz R tj. $R = AA^*$, a $Z : \mathcal{N}(0, E)$, E je jedinična matrica.

6. $(X, Y) : \mathcal{N}(m, R)$, $m = (m_x, m_y)$, $R = \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y \\ \rho_{X,Y}\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$. Tada

$$Y|X = x : \mathcal{N}(m_Y + \rho_{X,Y}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - m_X); \sigma_Y^2(1 - \rho_{X,Y}^2)).$$

Višedimenzionalni slučaj Moivre Laplasove teoreme. U opitu pratimo tri događaja A_1, A_2, A_3 , ovi događaji čine potpun sistem, odgovarajuće vjerovatnoće su p_1, p_2, p_3 . Opit ponavljamo n puta i slučajne promjenljive ν_1, ν_2, ν_3 predstavljaju broj realizacija događaja A_1, A_2, A_3 u tih n ponavljanja. Važi:

$$\left(\frac{\nu_1 - np_1}{\sqrt{n}}, \frac{\nu_2 - np_2}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{R} (\xi_1, \xi_2) : \mathcal{N}(0, R), R = \begin{pmatrix} p_1(1 - p_1) & -p_1p_2 \\ -p_1p_2 & p_2(1 - p_2) \end{pmatrix}.$$

Višedimenzionalna CGT. Neka su $X_i = (X_{i,1}, \dots, X_{i,n})$, $i = 1, 2, \dots$ nezavisni, jednako raspodijeljeni slučajni vektori, $EX_{i,j} = m_j$, $j = 1, \dots, n$, $cov(X_{i,k}, X_{i,l}) = b_{k,l}$. Tada važi:

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - m) \xrightarrow{R} \xi : \mathcal{N}(0, B), B = (b_{k,l}).$$

Konstrukcija Vinerovog procesa. Čestica se pomjera u trenucima $k\Delta t$, $k = 1, 2, \dots$, pomjera se sa jednakim vjerovatnoćama za $\pm\Delta x$, $\Delta x > 0$. Slučajna promjenljiva $X(t)$ jednaka je položaju čestice nakon $n = \frac{t}{\delta t}$ koraka. Zbog Markovljevidosti i homogenosti slučajne promjenljive $X(t) - X(s)$ i $X(s) - X(0)$ su nezavisne i slučajne promjenljive $X(t) - X(s)$ i $X(t - s) - X(0)$ su jednako raspodijeljene. Označimo $DX(t) = \sigma^2(t)$. Imamo

$$X(t) = X(s) - X(0) + X(t) - X(s) \Rightarrow \sigma^2(t) = \sigma^2(s) + \sigma^2(t - s), 0 < s < t \Rightarrow \sigma^2(t) = \sigma^2t,$$

σ^2 je koeficijent difuzije.

Neka je S_n broj pomjerenja u desno do momenta t .

$$X(t) = S_n\Delta x - (n - S_n)\Delta x = (2S_n - n)\Delta x \Rightarrow DX(t) = \sigma^2t = 4n\frac{1}{2}(\Delta x)^2 = \frac{t}{\Delta t}(\Delta x)^2 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}; S_n^* = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} = \frac{2S_n - n}{\sqrt{n}} \Rightarrow X(t) = S_n^*\sqrt{n}\Delta x = S_n^*\sigma\sqrt{t} \Rightarrow X(t) \xrightarrow{R} W : \mathcal{N}(0, \sigma^2t), n \rightarrow \infty.$$

Formalno, Vinerov proces se zdaje kao proces $W(T)$, $t \geq 0$ za koji važi:

a) $W(0) \stackrel{si}{=} 0$,

b) priraštaji procesa na disjunktanim intervalima su nezavisni,

c) $W(t) - W(s) : \mathcal{N}(0, t - s), 0 \leq s < t$.

Egzistencija procesa sa ovim svojstvima se dokazuje primjenom Kolmogorovljeve teoreme.

Pretpostavimo da je preslikavanje $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definisano sa $y_k = f_k(x_1, \dots, x_n)$, $k = 1, \dots, n$ obostrano jednoznačno. To znači da se iz

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ y_n &= f_n(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

mogu jednoznačno odrediti

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1(y_1, \dots, y_n) \\ x_2 &= g_2(y_1, \dots, y_n) \\ &\vdots \\ x_n &= g_n(y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

Pretpostavimo da Jakobijan

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

ne mijenja znak. Neka je gustina vektora (X_1, \dots, X_n) funkcija $\varphi(x_1, \dots, x_n)$. Gustina vektora (Y_1, \dots, Y_n) je

$$\psi(y_1, \dots, y_n) = \varphi(g_1(y_1, \dots, y_n), \dots, g_n(y_1, \dots, y_n)) |J|.$$

U primjerima koji slijede, $\sigma^2 = 1$.

Primjer. Naći raspodjelu vektora $(W(t_1), \dots, W(t_k))$, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k$.

Neka je $\eta_1 = W(t_1)$, $\eta_2 = W(t_2) - W(t_1)$, ..., $\eta_k = W(t_k) - W(t_{k-1})$. Sada je $W(t_1) = \eta_1$, $W(t_2) = \eta_1 + \eta_2$, ..., $W(t_k) = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_k$. Formirali smo preslikavanja $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_k) \rightarrow (W(t_1), \dots, W(t_k)) = W$. Imamo

$$\begin{aligned} p_W(x_1, \dots, x_k, t_1, \dots, t_k) &= p_\eta(x_1, x_2 - x_1, \dots, x_k - x_{k-1}) = p_{\eta_1}(x_1) p_{\eta_2}(x_2 - x_1) \dots p_{\eta_k}(x_k - x_{k-1}) = \\ &= \prod_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} e^{-\sum_{i=1}^k \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}}. \end{aligned}$$

Ovim je pokazano da je Winerov proces Gausov.

Primjer. $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Dokazati

$$E\left(\sum_{i=0}^{n-1} (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 - (b-a)\right)^2 \rightarrow 0, \text{ kad } \max(t_{i+1} - t_i) \rightarrow 0.$$

$E\left(\sum_{i=0}^{n-1} (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2\right) = \sum_{i=0}^{n-1} D(W(t_{i+1}) - W(t_i)) = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = b - a$ te je na lijevoj strani jednakosti koju treba dokazati

$$\begin{aligned} D\left(\sum_{i=0}^{n-1} (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2\right) &= \sum_{i=0}^{n-1} \left[E(W(t_{i+1}) - W(t_i))^4 - (E(W(t_{i+1}) - W(t_i))^2)^2 \right] = \\ \sum_{i=0}^{n-1} \left[3(t_{i+1} - t_i)^2 - (t_{i+1} - t_i)^2 \right] &\leq 2 \max(t_{i+1} - t_i) \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) = 2(b-a) \max(t_{i+1} - t_i) \rightarrow 0, \\ E(W(t_{i+1}) - W(t_i))^4 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_{i+1}-t_i)}} e^{-\frac{x^2}{2(t_{i+1}-t_i)}} dx = 2 \int_0^{\infty} x^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_{i+1}-t_i)}} e^{-\frac{x^2}{2(t_{i+1}-t_i)}} dx = \\ \left(v = \frac{x^2}{2(t_{i+1}-t_i)} \right) &= 4 \frac{(t_{i+1}-t_i)^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} v^{1,5} e^{-v} dv = 4 \frac{(t_{i+1}-t_i)^2}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = 3(t_{i+1} - t_i)^2. \end{aligned}$$

Vinerova mjera na $C[0, 1]$. $\mu(x(t) : x(t_1) \in I_1, \dots, x(t_n) \in I_n) = \int_{I_1} \dots \int_{I_n} p(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_n$.

Primjer. Izračunati $P\{W(\frac{1}{2}) > 0, W(1) > 0\}$.

$p_W(x_1, x_2; \frac{1}{2}, 1) = g(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} e^{-2x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2}$ te je

$$p = P\{W(\frac{1}{2}) > 0, W(1) > 0\} = \iint_{x_1 > 0, x_2 > 0} g(x_1, x_2) dx_1 dx_2.$$

Nakon smjena $x_1 = r \cos \varphi, x_2 = r \sin \varphi$ dobijamo $p = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\infty} r e^{-r^2 A} dr \right) d\varphi$, gdje je $A = 2 \cos^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos \varphi + \cos^2 \varphi$. Kako je $\int_0^{\infty} r e^{-r^2 A} dr = \frac{1}{2A}$ to je $p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{A}$. Nakon uvođenja smijena $\tan \varphi = z$ i $u = z - 1$ dobijamo $p = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{\infty} \frac{du}{u^2 + 1} = \frac{3}{8}$.

Primjer. Izračunati $E(W(s) | W(t))$ i $D(W(s) | W(t)), 0 < s < t$.

$g(x | y)$ - gustina slučajne promjenljive $W(s)$ uz uslov da je $W(t) = y$.

$$g(x | y) = \frac{p(x, y; s, t)}{p(y; t)} = \left(2\pi \frac{s}{t} (t-s) \right)^{-0,5} \exp \left\{ -\frac{\left(x - y \frac{s}{t} \right)^2}{2 \frac{s}{t} (t-s)} \right\} \Rightarrow$$

$$E(W(s) | W(t) = y) = \frac{s}{t}y; E(W(s) | W(t)) = \frac{s}{t}W(t); D(W(s) | W(t)) = \frac{s}{t}(t - s).$$

Maksimum Vinerovog procesa

$\xi_t = \max_{0 \leq s \leq t} W(s)$, $\tau_x = \min\{t : W(t) = x\}$. U analizi ćemo koristiti jako Markovljevo svojstvo (tj. procesi do momenta zaustavljanja (to je slučajni momenat) i od tog momenta su nezavisni) i skoro izvjesnu neprekidnost Vinerovog procesa.

Očigledno, $\{\xi_t \geq x\} = \{\tau_x \leq t\}$ i $\{W(t) \geq x\} \subset \{\tau_x \leq t\}$.

$$\frac{1}{2} = P\{W(t) \geq x | \tau_x \leq t\} = \frac{P\{W(t) \geq x\}}{P\{\tau_x \leq t\}} \Rightarrow P\{\tau_x \leq t\} = 2P\{W(t) \geq x\}.$$

Znamo $W(t) : \mathcal{N}(0, t)$.

$$\begin{aligned} P\{\xi_t \geq x\} &= P\{\tau_x \leq t\} = 2P\{W(t) \geq x\} = 2 \int_x^\infty \frac{\exp\{-\frac{u^2}{2t}\}}{\sqrt{2\pi t}} du \left(u = \sqrt{\frac{t}{z}}x \right) \\ &= \int_0^t \frac{x}{\sqrt{2\pi z^{1,5}}} \exp\{-\frac{x^2}{2z}\} dz \Rightarrow g_{\tau_x}(z) = \frac{x}{\sqrt{2\pi z^{1,5}}} \exp\{-\frac{x^2}{2z}\} dz, z > 0. \\ P\{\xi_t(x) \geq x\} &= \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \int_x^\infty \exp\{-\frac{u^2}{2t}\} du \Rightarrow g_{\xi_t}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \exp\{-\frac{x^2}{2t}\}, x > 0. \end{aligned}$$

Neka je τ tačka (vrijeme) dostizanja apsolutnog maksimuma procesa $W(u)$, $0 < u < t$. Ako je tačaka dostizanja više, biramo prvu tačku. Potražimo raspodjelu slučajne promjenljive τ . Prvo nađimo raspodjelu vektora (τ, ξ_t) . $\xi_t | \tau_a = s$ ima istu raspodjelu kao $a + \max_{0 < u < t-s} W(u) = a + \xi_{t-s}$ te je

$$\begin{aligned} p_{\xi_t}(x | s) &= \sqrt{\frac{2}{\pi(t-s)}} \exp\{-\frac{(x-a)^2}{2(t-s)}\}. \\ p_{\tau_a, \xi_t}(s, x) &= p_{\xi_t}(x | s)p_{\tau_a}(s) = \frac{a}{\pi s \sqrt{s(t-s)}} \exp\{-\frac{a^2}{2s}\} \exp\{-\frac{(x-a)^2}{2(t-s)}\}, 0 < s < t, x \geq a. \\ P_{\tau, \xi_t}(s, a) &= p_\tau(s | a)p_{\xi_t}(a) = p_{\tau_a}(s | a)p_{\xi_t}(a) = p_{\tau_a, \xi_t}(s, a) = \frac{a}{\pi s \sqrt{s(t-s)}} \exp\{-\frac{a^2}{2s}\}, 0 < s < t, a \geq 0. \\ P_\tau(s) &= \int_0^\infty P_{\tau, \xi_t}(s, a) da = \frac{1}{\pi \sqrt{s(t-s)}}, 0 < s < t. \\ P\{\tau \leq s\} &= \int_0^s \frac{du}{\pi \sqrt{u(t-u)}} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{s}{t}}, 0 < s < t. \end{aligned}$$

Primjer. Dokazati da Vinerov proces skoro izvjesno dostiže svaki nivo x , $x > 0$. (ranije ili kasnije, za konačno vrijeme)

$$\{\tau_x < \infty\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\tau_x \leq n\}, \{\tau_x < n\} = A_n \uparrow \text{ te je}$$

$$P\{\tau_x < \infty\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{\tau_x \leq n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \frac{x}{\sqrt{2\pi z^{1,5}}} \exp\{-\frac{x^2}{2z}\} dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} I_{(0,n)} \frac{x}{\sqrt{2\pi z^{1,5}}} \exp\{-\frac{x^2}{2z}\} dz$$

$$(\text{iz Bepo-Levijeva leme slijedi}) = \int_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi z^{1,5}}} \exp\{-\frac{x^2}{2z}\} dz = \left(\frac{x^2}{2z} = u\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-u} du = 1.$$

Koristili smo:

$$I_{(0,n)} \frac{x}{\sqrt{2\pi z^{1,5}}} \exp\{-\frac{x^2}{2z}\} = f_n(z) \uparrow f(z) = \frac{x}{\sqrt{2\pi z^{1,5}}} \exp\{-\frac{x^2}{2z}\}, z > 0.$$

Literatura.

Nikola Sarapa: Teorija vjerojatnosti (odlična knjiga, lijepo obrađena simetrična slučajna šetnja)

Mario Lefebvre: Applied Stochastic Processes

Shiryaev: Probability (opšte o procesima)

Rozanov: Random Processes, lijep uvod u Puasonov proces

Gnedenko: The Theory of Probability, konstrukcija Puasonovog procesa