Uvod u teoriju telekomunikacionog saobraćaja

Markovljevi lanci i teorija redova čekanja

Redovi čekanja i stohastički procesi

U telekomunikacionim mrežama veoma često dolazi do kolizije vezane za određeni resurs. Tipični su primjeri:

- Različiti telefonski pozivi dolaze na telefonsku centralu koja ih mora usmjeriti prema ograničenom broju odlaznih linkova.
- Različiti paketi dolaze na različite ulaze komutatora paketa, a treba da budu proslijeđeni na isti izlaz.

Redovi čekanja i stohastički procesi

Zahtjevi za zauzimanjem resursa telekomunikacione mreže mogu biti posledica jednog ili više procesa koji dijele isti prenosni resurs. Ako nema dovoljno resursa za ostvarivanje njihovog simultanog prenosa svi ovi slučajevi uključuju formiranje redova čekanja paketa ili poziva.

Redovi čekanja i stohastički procesi

Tipični problemi u kojima se koristi teorija redova čekanja su:

- Analiza performansi bafera na prenosnim kapacitetima i njihovo dimenzionisanje
- Planiranje mreže (planiranje kapaciteta sistema koji povezuju mrežna čvorišta)
- Utvrđivanje performansi protokola pristupa za različite korisnike koji se takmiče za isti resurs

Redovi čekanja i stohastički procesi

Red čekanja

- Specijalni slučaj stohastičkog procesa koji se opisuje stanjem X(t), koje predstavlja broj zahtjeva (paketa ili poziva) smještenih u redu u trenutku t.
- Opisuje se sa dolaznim procesom zahtjeva, načinom izbora zahtjeva za posluživanje i procesom posluživanja.

Redovi čekanja i stohastički procesi

Stohastički proces

- se identifikuje različitim raspodjelama slučajne promjenljive X u različitim trenucima vremena.
- opisuje se sa:
  - Prostorom stanja, koji predstavlja skup mogućih vrijednosti slučajne promjenljive X(t). Ovaj prostor može biti kontinualan ili diskretan (u tom slučaju se stohastički proces zove lancem - chain).
  - Promjenljivom vremena koja pripada kontinualnom ili diskretnom skupu.
  - Korelacionim karakteristikama slučajne promjenljive X(t) u različitim trenucima vremena.

Redovi čekanja i stohastički procesi

Stohastički proces

- Opisuje se funkcijom raspodjele koja se dobija kao združena raspodjela u različitim trenucima vremena t_i i za različite vrijednosti x_i.

$$F_X(x,t) = P\left(X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2, \ldots, X(t_n) \le x_n\right)$$

- Proces je stacionaran u striktnom smislu ako za bilo koje x, t i τ važi

$$F_X(x, t+\tau) = F_X(x,t)$$

Funkcija raspodjele vjerovatnoća je invarijantna na privremene translacije

Redovi čekanja i stohastički procesi

Stohastički proces

- Proces je stacionaran u širem smislu ako je srednja vrijednost E[X(t)] ne zavisi od t, a korelacija E[X(t) X(t+τ)] ne zavisi od τ.
- Proces je nezavisan ako važi:

$$F_X(x,t) = P\left(X(t_1) \le x_1\right) P\left(X(t_2) \le x_2\right) \ldots P\left(X(t_n) \le x_n\right)$$

- Slična relacija važi za funkciju gustine raspodjele.
- Za nezavisan slučajan proces važi da su slučajne promjenljive u različitim trenucima vremena potpuno nekorelisane.

Redovi čekanja i stohastički procesi

Stohastički proces

- Specijalan slučaj je Markovljev lanac gdje slučajna promjenljiva uzima samo diskretne vrijednosti, pri čemu stanje $X[t_{n+1}]$ zavisi samo od stanja $X[t_n]$ u neposrednom prethodnom trenutku.
- Lanac se razvija u vremenu tranzicijama između stanja.
- Razvoj stohastičkog procesa se opisuje vrijednostima stanja u posmatranom trenutku, a ne u vremenu provedenom u tom stanju. Ova memoryless osobina je garantovana eksponencijalnom raspodjelom vremena boravka u određenom stanju za kontinualni lanac (geometrijska za diskretni lanac).
- Formalna definicija Markovljevog lanca kontinualnog u vremenu je:

$$P\Big(X\left(t_{n+1}\right)=x_{n+1}\,\Big|\,X\left(t_n\right)=x_n, X\left(t_{n-1}\right)=x_{n-1},\ldots,X\left(t_1\right)=x_1\Big)=$$

$$=P\Big(X\left(t_{n+1}\right)=x_{n+1}\,\Big|\,X\left(t_n\right)=x_n\Big)$$

Redovi čekanja i stohastički procesi

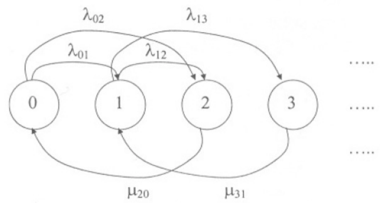
Stohastički proces

- U slučaju da imamo da su trenuci tranzicija diskretni, radi se diskretnom lancu.
- Važni Markovljevi lanci su:
  - Proces rađanja i umiranja (*birth and dead*), kod koga je iz stanja X=i, moguće preći samo u stanja X=i+1 ili X=i-1.
  - Procesi reprodukcije (*renewal*) koji predstavljaju dolazne procese čistog rađanja. Vremena između dva dolaska su nezavisna ali imaju identične raspodjele. Primjer je Poasonov dolazni proces kod kojeg vrijeme između dva dolaska ima eksponencijalnu raspodjelu, konstantnog parametra.
  - Semi-Markovljevi lanci su lanci kod kojih vrijeme boravka u određenom stanju ima opštu raspodjelu. Posmatranjem ovih lanaca u trenucima tranzicija stanja dobijamo *imbedded* Markovljev lanac, koji se može riješiti kao Markovljev lanac u diskretnom vremenu.

Redovi čekanja i stohastički procesi

Markovljev lanac

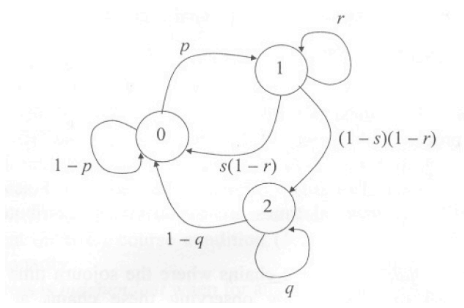
- Opisuje se dijagramima stanja koji se sastoje od stanja (kružići) i dozvoljenih tranzicija između njih (linije sa strelicama).
- Kod lanaca kontinualnih u vremenu tranzicija se može javiti u bilo kojem trenutku i opisane su parametrom eksponencijalne raspodjele.



Redovi čekanja i stohastički procesi

Markovljev lanac

- Kod lanaca diskretnih u vremenu tranzicija se može javiti u tačno definisanim trenucima i opisani su vjerovatnoćama tranzicija koje zavise od geometrijske raspodjele vremena zadržavanja u posmatranom stanju. U ovom slučaju stanja mogu imati tranzicuju u same sebe. Suma svih vjerovatnoća napuštanja stanja mora biti jednaka 1.



Poasonov dolazni proces

- Koristi se za opisivanje broja dolazaka N_t u intervalu t.
- Ako sa λ označimo srednju dolaznu brzinu, imamo Poasonov dolazni proces ako važi:

$$P(N_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \qquad \text{Za bilo koji interval t}$$

- Funkcija generisanja vjerovatnoća je

$$N_t(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t z)^k}{k!} = e^{-\lambda t} e^{\lambda t z} = e^{\lambda t (z-1)}$$

$$E(N_t) = \frac{dN_t(z)}{dz}\Big|_{z=1} = \lambda t e^{\lambda t (z-1)}\Big|_{z=1} = \lambda t$$

$$E(N_t^2) = \frac{d^2 N_t(z)}{dz^2}\Big|_{z=1} + \frac{dN_t(z)}{dz}\Big|_{z=1} = (\lambda t)^2 e^{\lambda t(z-1)}\Big|_{z=1} + \lambda t e^{\lambda t(z-1)}\Big|_{z=1} = (\lambda t)^2 + \lambda t$$

Poasonov dolazni proces

$$IDC_t = \frac{Var(N_t)}{E(N_t)} \quad \textit{indeks disperzivnosti}$$

- IDC_t=1 – Poasonova raspodjela
- IDC_t<1 – dolazni proces je uglačan (smoothed)
- IDC_t>1 – dolazni proces je šiljast (peaked)
- Što je manja vrijednost parametra više dolazaka se pojavljuje u regularnim intervalima.
- IDC_t=0 proces je deterministički.
- IDC_t>1, dolasci se pojavljuju u grupama (bursts). Ovi procesi izazivaju iznenadno punjenje reda čekanja i samim tim visoke vrijednosti srednjeg kašnjenja. Veće IDC, veće srednje kašnjenje.

Poasonov dolazni proces

- Razmotrimo statistiku vremena između dolazaka t_a za Poasonov dolazni proces.
- Neka je t=0 trenutak poslednjeg dolaska.
- Razmatramo vjerovatnoću da će sledeći dolazak biti u proizvoljnom trenutku t, što je ekvivalentno da u intervalu (0,t) nema dolazaka tj $e^{-\lambda t}$. Prema tome:

$$P(t_a > t) = e^{-\lambda t} \Leftrightarrow P(t_a \le t) = 1 - e^{-\lambda t} \Leftrightarrow f_{t_a}(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t \ge 0$$

- Vidimo da t_a ima eksponencijalnu raspodjelu srednje vrijednosti $1/\lambda$.
- Vremena između dolazaka su nezavisna i imaju identičnu eksponencijalnu raspodjelu!

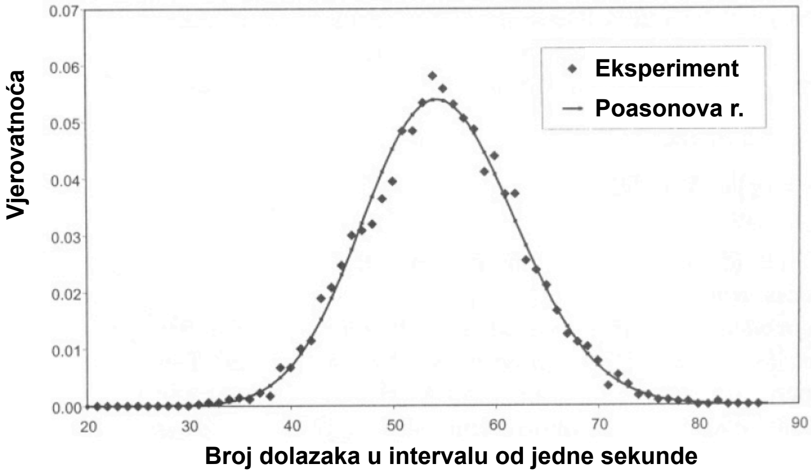
Poasonov dolazni proces

Poasov proses je važan!

- Opisuje dolaske novih poziva na telefonsku centralu u mreži sa komutacijom kola.
- Opisuje uspostavljanje novih Web sesija za posmatranog ISPa ili korisnika.
- Dolazak email poruka u mreži sa komutacijom paketa.
- Dolazak paketa u slučajnim i neslučajnim protokolima pristupa.

Poasonov dolazni proces

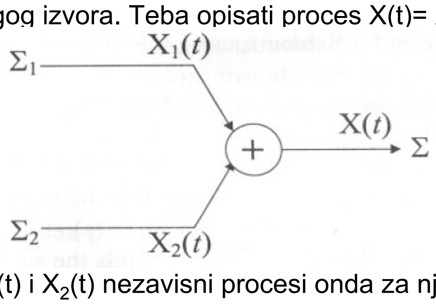
Primjer histograma dolazaka telefonskih poziva u telefonskoj mreži



Poasonov proces

Suma nezavisnih Poasonovih procesa

- Razmatraju se dva nezavisna izvora Poasonovih dolazaka srednjih dolaznih brzina λ_1 i λ_2.
- Dolasci dva procesa se sumiraju i dobija se novi proces.
- Sa $X_1(t)$ i $X_2(t)$ se označava broj dolazaka u intervalu vremena t prvog i drugog izvora. Teba opisati proces $X(t) = X_1(t) + X_2(t)$.



- Kako su $X_1(t)$ i $X_2(t)$ nezavisni procesi onda za njihovu sumu važi:

$$X(z) = X_1(z) X_2(z) = e^{\lambda_1 t(z-1)} e^{\lambda_2 t(z-1)} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)t(z-1)}$$

Poasonov proces

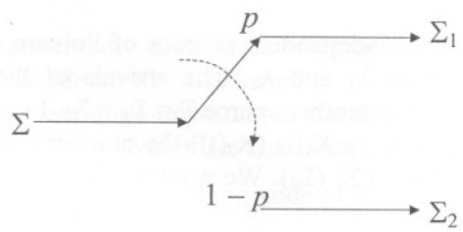
Suma nezavisnih Poasonovih procesa

- Očigledno je da je novi proces Poasonov sa srednjom dolaznom brzinom $\lambda_1 + \lambda_2$.
- Čvorišta mogu dobijati zahtjeve od nezavisnih i različitih izvora.
- PBX dobija zahtjeve od različitih telefonskih korisnika.

Poasonov proces

Slučajno razdvajanje Poasonovog procesa

- Poasonov proces dolazaka srednje dolazne brzine λ se slučajno komutira na dva izlaza.
- Dolazak se šalje na izlaz jedan sa vjerovanoćom p, a na izlaz 2 sa vjerovatnoćom 1-p



- Neka se proces na izlazu jedan opisuje sa vremenom između dolazaka $t_{a1.}$ Potrebno je pronaći njegovu vezu sa $t_{a.}$

Poasonov proces

Slučajno razdvajanje Poasonovog procesa

- Slučajna promjenljiva t_a ima eksponencijalnu raspodjelu srednje vrijednosti 1/ λ i ima Laplasovu transformaciju funkcije gustine raspodjele $T_a(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s}$.
- Pretpostaviti da u trenutku t=0 dolazni proces zatiče komutator u poziciji 1, tj dolazni proces je adresiran na izlaz 1. Prema tome t_{a1} predstavlja naredni trenutak kada će dolazni proces biti adresiran na izlaz 1.
- Treba odredit statistiku t_{a1} brojem dolazaka k koje je generisao Poasonov slučajni proces tako da je samo poslednji dolazak adresiran za izlaz 1
  - Sa vjerovatnoćom p, k=1, $t_{a1}= t_a$
  - Sa vjerovatnoćom p(1-p), k=2, t_{a1} je suma dvije nezavisne slučajne promjenljive raspodjele kao t_a
  - Sa vjerovatnoćom $p(1-p)^2$, k=3, t_{a1} je suma tri nezavisne slučajne promjenljive raspodjele kao t_a

Poasonov proces

Slučajno razdvajanje Poasonovog procesa

- Korišćenjem osobina Laplasove transformacije dobijamo:

$$T_{a1}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(T_a(s)\right)^k p(1-p)^{k-1} = \frac{pT_a(s)}{1 - T_a(s)(1-p)}$$

- Lako je zapaziti da t_{a1} predstavlja sumu k eksponencijalnih slučajnih promjenljivih t_a , pri čemu k ima modifikovanu geometrijsku raspodjelu.
- Konačno

$$T_{a1}(s) = \frac{p\frac{\lambda}{\lambda+s}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda+s}(1-p)} = \frac{\lambda p}{\lambda p + s}$$

Eksponencijalna raspodjela srednje brzine pλ!!!

Poasonov proces

Slučajno razdvajanje Poasonovog procesa

- Slično se može pokazati i za drugi izlaz.
- Takođe ovim primjerom je pokazano da se kompozicijom (modifikovane) geometrijske i eksponencijlne raspodjele ponovo dobija eksponencijalnq raspodjelu.
- Ovaj primjer se može iskoristiti za modelovanje rutiranja poziva u mrežama sa komutacijom kola (stohastičko rutiranje)

Poasonov proces

Združeni Poasonovi procesi

- Razmotriti Poasonov dolazni proces srednje brzine λ.
- Svaki dolazak ne predstavlja jedan objekat, već grupu objekata čiji se broj može opisati sa M(z).
- Broj dolazaka ima Poasonovu raspodjelu čija je funkcija generisanja vjerovatnoća

$$N_t(z) = e^{\lambda t(z-1)}$$

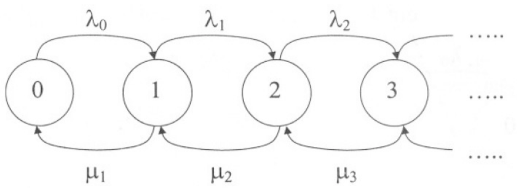
- Prema tome funkcija generisanja vjerovatnoća broja dolazaka u intervalu t $N_{tc}(z)$ se može dobiti uslovljavanjem brojem dolazaka k u intervalu vremena t $N_{tc|k}(z)=M^k(z)$.

$$N_{tc}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} M^k(z) \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = N_t(M(z)) = e^{\lambda t(M(z)-1)}$$

- Pogodan za modelovanje dolaznog procesa na menadžeru resursa nivoa 2 gdje su poruke viših nivoa fragmentirane u pakete.

Markovljev lanac rađanja i umiranja

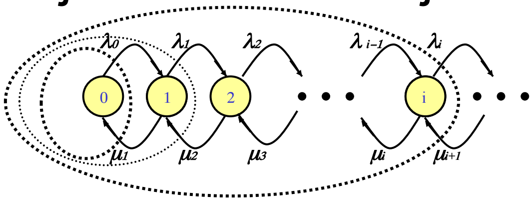
- Razmotriti Markovljeve lance kontinualne u vremenu koji opisuju ponašanje "populacije" čije stanje je prikazano prirodnim brojevima.
- Za posmatrano stanje k, dozvoljene su tranzicije samo u k+1 ili k-1.
- Označiti sa:
  - λ_i srednju brzinu rađanja iz stanja i u stanje i+1
  - μ_m srednju brzinu umiranja iz stanja m u stanje m-1.
  - P_n vjerovatnoću da se lanac nalazi u stanju n.



Markovljev lanac rađanja i umiranja

- Vremensko ponašanje ovog lanca je opisano Kolmogorov-Chapmanovim jednačinama.
- Mi se bavimo samo karakteristikama lanca u ravnoteži, ako ona postoji.
- Dovoljan uslov da postoji ravnoteža je uslov ergodičnosti
  - $\exists$ indeks k_0 tako da za $\forall k \geq k_0$ imamo $\lambda_k/\mu_k<1$
- Fizički smisao je da postoji stanje u kome je brzina rađanja manja od brzine umiranja.
- Ovaj lanac se može riješiti korišćenjem zakona o održanju fluksa.
- Treba kreirati na pogodan način zatvorene površine i primijeniti ovaj zakon.

Markovljev lanac rađanja i umiranja



Dijagram stanja za proces rađanja i umiranja

- Napraviti balansne jednačine za svaki presjek.

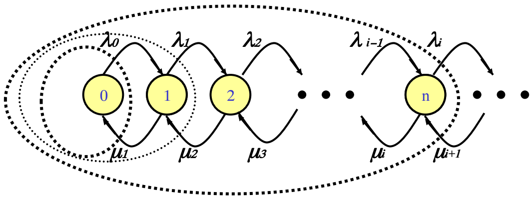
$$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1 \Rightarrow P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

$$\lambda_1 P_1 = \mu_2 P_2 \Rightarrow P_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} P_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_2}\frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

...

$$\lambda_{i-1} P_{i-1} = \mu_i P_i \Rightarrow P_i = \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} P_{i-1} = P_0 \prod_{n=1}^{i} \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}, \forall i \geq 1$$

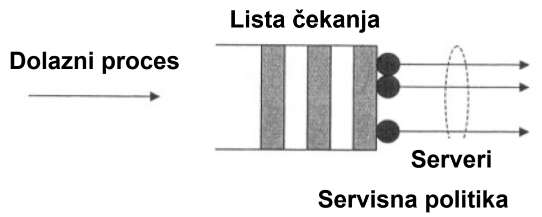
Markovljev lanac rađanja i umiranja



Dijagram stanja za proces rađanja i umiranja

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1 \Rightarrow P_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{P_i}{P_0} = 1 \Rightarrow P_0 \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{n=1}^{i} \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}\right) = 1 \Rightarrow P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{n=1}^{i} \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}}$$

Notacija za redove čekanja



- Kendalova notacija iz 1953
- A/B/C/D/E
- A je tip dolaznog procesa (M – Poasonov proces, GI – dolazni proces reprodukcije)
- B je statistika vremena posluživanja (M – eksponencijalna raspodjela, G – opšta raspodjela)
- C – je broj servera
- D – broj mjesta u redu čekanja
- E – broj izvora koji generišu saobraćaj

Notacija za redove čekanja

- Servisna politika
  - First Input First Out (FIFO)
  - Last Input First Out (LIFO)
  - Slučajno
  - Round Robin (RR)
  - ....
- U polju telekomunikacija dolazni proces je tipično vezan za pojavljivanje telefonskoh poziva ili poruka/paketa koji treba da budu poslati preko linka.
- Dolazni proces i proces posluživanja karakterišu saobraćaj.
- Neka λ predstavlja srednju dolaznu brzinu, a E(X) srednje vrijeme posluživanja.
- Intenzitet saobraćaja se definiše kao $\rho = \lambda E(X)$

Litlova teorema

Redovi čekanja se mogu opisati sa

- Srednjim brojem zahtjeva (N) uključujući one koji se poslužuju i one koje su na listi čekanja.
- Srednjim kašnjenjem (T) koje unosi red čekanja od trenutka ulaska u red čekanja do završetka posluživanja.
- Razmotriti teoremu koja važi za najopštiji slučaj G/G/S pod sledećim pretpostavkama:
  - Red čekanja dostiže ravnotežno stanje
  - Red čekanja se opisuje ergodičnim procesom što znači da su trenutne srednje vrijednosti jednake stacionarnim srednjim vrijednostima
  - Red čekanja je *work-conserving* (serveri su uvijek dostupni za posluživanje zahtjeva i ne postoje situacije zaustavljanja posluživanja ako su serveri dostupni)

Litlova teorema

Pretpostavimo da je red čekanja u trenutku t=0 slobodan. Uvedimo sledeće oznake:

- $\alpha(t)$ broj zahtjeva koji su stigli u intervalu (0,t),
- $\beta(t)$ broj zahtjeva koji su posluženi u intervalu (0,t),
- t_i trenutak dolaska i-tog zahtjeva
- t_i' trenutak odlaska (završetak posluživanja) i-tog zahtjev
- $T_i = t_i' - t_i$ vrijeme koje je i-ti zahtjev proveo u redu čekanja
- $N(t) = \alpha(t) - \beta(t)$ broj zahtjeva u redu čekanja u trenutku t, $t \geq 0$

Litlova teorema

Zanemariti slučaj višestrukih dolazaka ili odlazaka u istom trenutku.

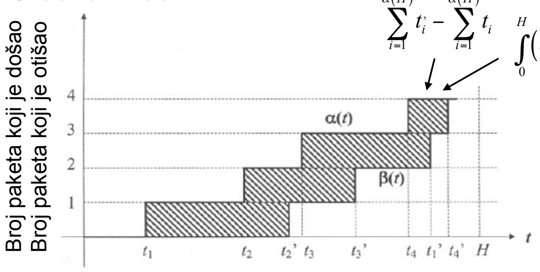
- $\alpha(t)$ i $\beta(t)$ variraju za vrijednost 1 zavisno od dolazaka, odnosno odlazaka,
- $t_1<t_2<t_3<t_4\ldots$
- Rangiranje t_i' zavisi od servisne politike (FIFO, LIFO,…)
- Litlova teorema se izvodi za slučaj opšte servisne politike.

Litlova teorema

Uočiti trenutak H u kome je:

- $\alpha(t) = \beta(t)$ tj $N(t)=0$,

$$\sum_{i=1}^{\alpha(H)} t_i' - \sum_{i=1}^{\alpha(H)} t_i \qquad \int_0^H \big(\alpha(t)-\beta(t)\big)dt = \int_0^H \big(N(t)\big)dt$$



- Srednje kašnjenje paketa koji se u red čekanja došli tokom intervala (0,H) je

$$\overline{T_H} = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha(H)} T_i}{\alpha(H)} = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha(H)} (t'_i - t_i)}{\alpha(H)} = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha(H)} t'_i - \sum_{i=1}^{\alpha(H)} t_i}{\alpha(H)}$$

Litlova teorema

- Pošto $\overline{N_H} = \frac{1}{H}\int_0^H (N(t))dt$ predstavlja srednji broj zahtjeva u redu čekanja u intervalu (0,H) i $\overline{\lambda_H} = \frac{\alpha(H)}{H}$ je srednja dolazna brzina paketa u intervalu (0,H) slijedi

$$\overline{T_H} = \frac{\int_0^H (N(t))dt}{\alpha(H)} = \frac{H}{\alpha(H)}\frac{1}{H}\int_0^H (N(t))dt = \frac{\overline{N_H}}{\overline{\lambda_H}}$$

- Korišćenjem osobine ergodičnosti slijedi

$$T = \frac{N}{\lambda} \Leftrightarrow N = \lambda T$$

- Ova teorema se može dokazati i za slučaj $\alpha(t)>\beta(t)$

Litlova teorema

Prethodna relacija se može koristiti za analizu dva dijela reda čekanja liste čekanja i servisnog dijela. Uvedimo sledeću notaciju:

- E[X] – srednje vrijeme posluživanja paketa
- E[W] – srednje vrijeme provedeno u redu čekanja čekajući na posluživanje
- $\overline{N}_q$ – srednji broj paketa na listi čekanja
- $\overline{N}_s$ – srednji broj paketa čije je posluživanje u toku

Litlova teorema

Slijede relacije:

$$\bar{T} = E(X) + E(W)$$

$$\lambda\bar{T} = \lambda E(X) + \lambda E(W) \Rightarrow \bar{N} = \bar{N}_S + \bar{N}_Q$$

$$\bar{N}_S = \rho$$

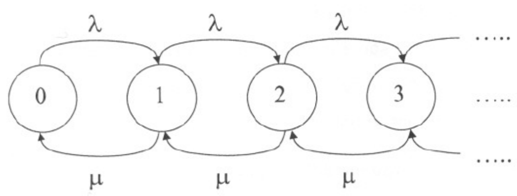
$$\varphi = \frac{\bar{N}_S}{S}$$ Faktor iskorišćenja servera $\varphi \in [0,1)$

Veoma važna teorema u telekomunikacijama zato što se svako čvorište može prikazati kao skup bafera povezanih na određene linkove.

Analiza M/M/1 reda čekanja

Red čekanja sa sledećim karakteristikama

- Poasonov dolazni proces srednje dolazne brzine λ
- Eksponencijalno vrijeme posluživanja parametra μ
- Jedan server
- Beskonačna širina liste čekanja
- Beskonačan broj izvora saobraćaja



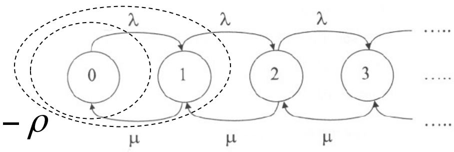
Markovljev lanac rađanja i umiranja sa $\lambda_i=\lambda$ i $\mu_i=\mu$.
Intenzitet dolaznog saobraćaj $\rho=\lambda/\mu$

Analiza M/M/1 reda čekanja

Korišćenjem relacija datih za opšti slučaj Markovljevog lanca rađanja i umiranja dobija se

$$P_i = P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i = P_0\rho^i$$

$$P_0 = \frac{1}{1+\sum_{i=1}^{\infty}\rho^i} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i} = 1-\rho$$



$$P_i = (1-\rho)\rho^i, \qquad i \geq 0$$

Koja je ovo raspodjela?

- Uslov ergodičnosti za stabilnost reda čekanja je ispunjen ako je intenzitet saobraćaja manji od 1E. To znači da je P_0>0, tj. red čekanja mora nekada biti slobodan.

Analiza M/M/1 reda čekanja

$$P(z) = \sum_{i=0}^{\infty}(1-\rho)\rho^i z^i = \frac{1-\rho}{1-z\rho}$$

$$\bar{N} = \sum_{i=0}^{\infty} i(1-\rho)\rho^i z^i = \frac{dP(z)}{dz}\Big|_{z=1} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$\bar{T} = \frac{\bar{N}}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

T ne zavisi od servisne politike, osim ako redosled posluživanja ne zavisi od vremena provedenog u redu čekanja.

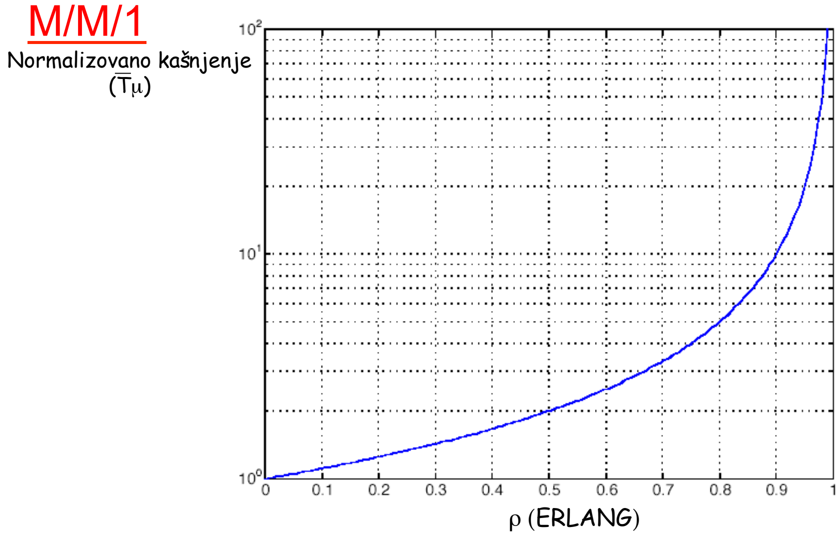
$\rho \to 1 Erlang$ **Red postaje zagušen, srednji broj paketa i srednje kašnjenje rastu.**

$$\gamma = \sum_{i=1}^{\infty}\mu(1-\rho)\rho^i = \mu(1-P_0)$$

Propusnost reda čekanja ili saobraćaj koji prenosi red čekanja. U stabilnom stanju propusnost je jednaka λ.

Analiza M/M/1 reda čekanja

M/M/1



Analiza M/M/1 reda čekanja

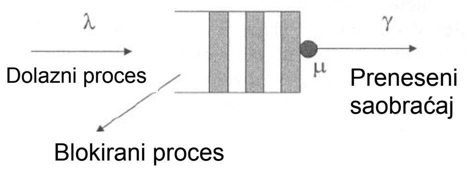
Primjer 4:

Na ulaz E1 multipleksera dolazi prosječno 2000 paketa u sekundi saglasno Poasonovoj raspodjeli. Ako je srednja veličina paketa 1000 bita koliko iznosi srednji broj paketa u multiplekseru i srednje kašnjenje u prenosu paketa koje multiplekser unosi.

Analiza M/M/1/K reda čekanja

Red čekanja sa sledećim karakteristikama

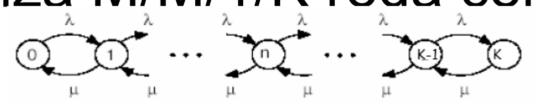
- Poasonov dolazni proces srednje dolazne brzine λ
- Eksponencijalno vrijeme posluživanja parametra μ
- Jedan server
- Veličina bafera iznosi K-1 paketa (poziva)
- Beskonačan broj izvora saobraćaja
- Ako paket dođe kada je u sistemu K paketa (stanje K) biva odbačen.



PRIMJER
PBX sa jednom odlaznom linijom i mogućnošću stavljanja K-1 poziva na čekanje

Markovljev lanac rađanja i umiranja sa $\lambda_i=\lambda$ za $i<K$ i $\mu_i=\mu$. za $i\le K$
Intenzitet dolaznog saobraćaj $\rho=\lambda/\mu$

Analiza M/M/1/K reda čekanja



Korišćenjem relacija datih za opšti slučaj Markovljevog lanca rađanja i umiranja dobija se

$$P_i = P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i = P_0\rho^i$$

$$P_0 = \frac{1}{1+\sum_{i=1}^{K}\rho^i} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{K}\rho^i} = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}$$

- Uslov ergodičnosti za stabilnost reda čekanja je uvijek ispunjen bez obzira na intenzitet saobraćaja koji može biti veći od 1E. Šta je razlog?
- Vjerovatnoća stanja K karakteriše stanje zagušenje reda čekanja.

Analiza M/M/1/K reda čekanja

- U slučaju Poasonovog dolaznog procesa konstantne brzine (koja ne zavisi od stanja) vjerovatnoća da zahtjev koji dolazi zatiče red čekanja u posmatranom stanju *i* odgovara vjerovatnoći stanja P_i. Ova osobina je poznata pod nazivom PASTA (Poisson Arrivals See Times Averages).
- Polazeći od prethodnog vjerovatnoća blokiranja dolaznog zahtjeva je

$$P_B \equiv P_K = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\rho^K$$

Analiza M/M/1/K reda čekanja

$$\gamma = \sum_{i=1}^{K} \mu P_i = \mu\left(1-P_0\right)$$

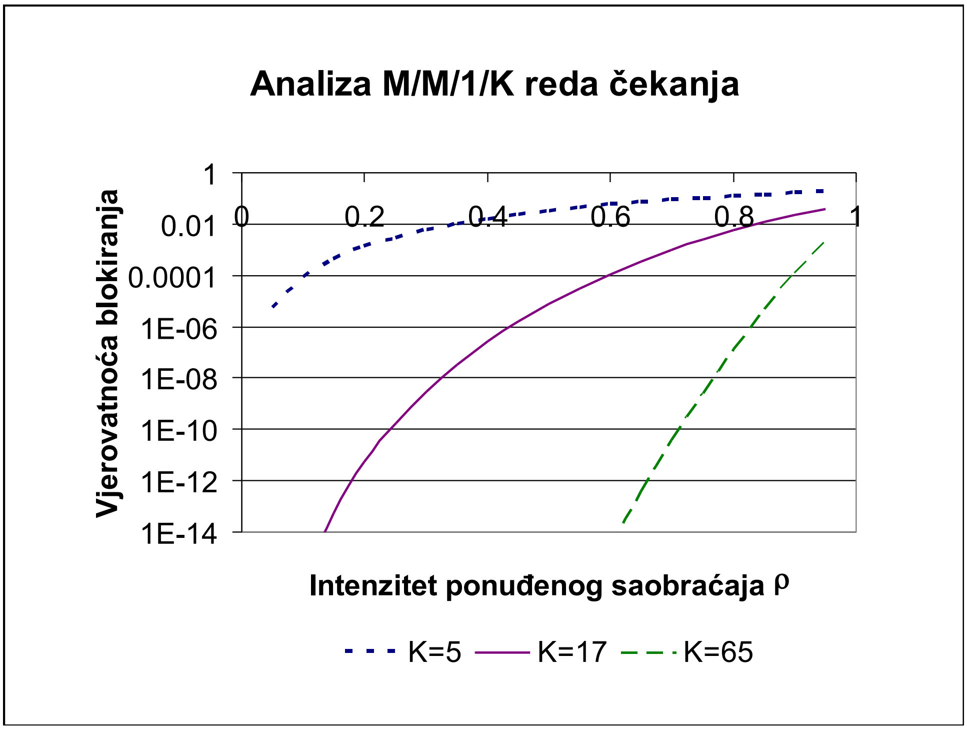
$$\lambda - \lambda P_B = \mu\left(1-P_0\right) \Rightarrow \rho\left(1-P_B\right) = 1-P_0$$

$$P\left(z\right) = \sum_{i=0}^{K} \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\rho^i z^i = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\frac{1-\left(\rho z\right)^{K+1}}{1-\rho z}$$

$$\bar{N} = \frac{dP\left(z\right)}{dz}\Big|_{z=1} = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{\left(K+1\right)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}}$$

$$\bar{T} = \frac{N}{\lambda - \lambda P_B} = \frac{1}{\lambda(1-P_B)}\frac{\rho}{1-\rho} - \frac{1}{\lambda(1-P_B)}\frac{\left(K+1\right)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}}$$

Propusnost komutatora ili saobraćaj koji prenosi komutator. U stabilnom stanju propusnost je jednaka λ umanjeno za onaj saobraćaja koji se gubi.



Analiza M/M/1/K reda čekanja

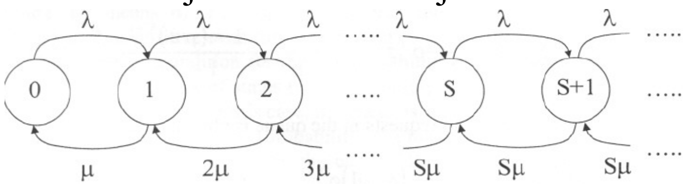
Primjer 5

Primijeniti model M/M/1/K na multiplekser govornih poruka. Govorni signal se digitalizuje brzinom 64kb/s. Srednja dužina govorne poruke je 3s. Poruke se prenose preko E1 linije kapaciteta 2.048Mb/s. Dok čekaju prenos poruke se smještaju u bafer kapaciteta 10^6 bita. Izračunati vjerovatnoću gubitka poruka u funkciji brzine dolaska poziva.

Analiza M/M/S reda čekanja

Red čekanja sa sledećim karakteristikama

- Poasonov dolazni proces srednje dolazne brzine λ
- Eksponencijalno vrijeme posluživanja parametra μ
- S servera
- Beskonačna širina liste čekanja
- Beskonačan broj izvora saobraćaja

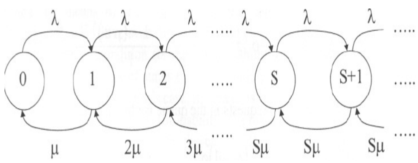


Markovljev lanac rađanja i umiranja sa $\lambda_i \equiv \lambda$ i $\mu_i \equiv i\mu$. $i \le S$,odnosno $\mu_i \equiv S\mu$ $i>S$.
Intenzitet dolaznog saobraćaj $\rho=\lambda/\mu$

Zašto?

Analiza M/M/S reda čekanja

Korišćenjem relacija datih za opšti slučaj Markovljevog lanca rađanja i umiranja dobija se



$$\lambda P_0 = \mu P_1 \Rightarrow P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 = \rho P_0$$

$$\lambda P_1 = 2\mu P_2 \Rightarrow P_2 = \frac{\lambda}{2\mu} P_1 = \frac{\rho^2}{2} P_0$$

$$\ldots$$

$$\lambda P_{S-1} = S\mu P_S \Rightarrow P_S = \frac{\lambda}{S\mu} P_{S-1} = \frac{\rho^S}{S!} P_0$$

$$\lambda P_S = S\mu P_{S+1} \Rightarrow P_{S+1} = \frac{\lambda}{S\mu} P_S = \frac{\rho^{S+1}}{S \cdot S!} P_0$$

$$\ldots$$

$$P_0 = \frac{1}{1+\sum_{i=1}^{\infty}\prod_{n=1}^{i}\frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{S-1}\frac{\rho^i}{i!} + \sum_{i=S}^{\infty}\frac{\rho^i}{S!S^{i-S}}} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{S-1}\frac{\rho^i}{i!} + \frac{S\rho^S}{S!(S-\rho)}}$$

- Uslov ergodičnosti za stabilnost reda čekanja je ispunjen ako je $\lambda/S\mu<1$ tj ako je intenzitet saobraćaja manji od S Erlanga.

Analiza M/M/S reda čekanja

Vjerovatnoća da paket zatekne sve servere zauzete je data Erlang C formulom

$$P_C = \sum_{i=S}^{\infty} P_i = P_0 \sum_{i=S}^{\infty} \frac{P_i}{P_0} = \frac{\frac{S\rho^S}{S!(S-\rho)}}{\sum_{i=0}^{S-1} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{S\rho^S}{S!(S-\rho)}}$$

Najčešće se koristi da se odredi broj servera koji obezbjeđuju razumnu vjerovatnoću baferovanja npr. $P_c \leq 1\%$.

- Vjerovatnoće stanja se dobijaju na bazi iterativnog računa
- M/M/S/0/N, N≥S (Engsetova raspodjela)

Analiza M/M/S reda čekanja

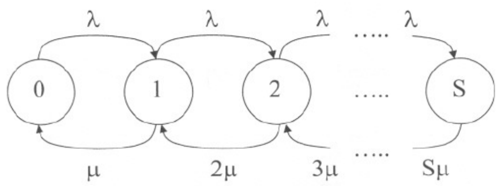
Primjer 6 (domaci)

Pretpostavimo da je na raspolaganju linija koja omogućava brzinu prenosa od 160kb/s. Ova linija se može koristiti na dva načina: kao vremenski multipleks od šestnaest 10kb/s kanala ili linija od 160kb/s bez multipleksa. Pretpostavimo da poruke dolaze Poasonovom brzinom i da imaju eksponencijalnu raspodjelu. Prvi slučaj se može aproksimirati sistemom M/M/16, a drugi M/M/1. Za srednju dužinu poruka od 2000b prikazati zavisnost srednjeg kašnjenja u funkciji brzine dolaska poruka.

Analiza M/M/S/0 reda čekanja

Red čekanja sa sledećim karakteristikama

- Poasonov dolazni proces srednje dolazne brzine λ
- Eksponencijalno vrijeme posluživanja parametra μ
- S servera
- Dužina liste čekanja je jednaka 0
- Beskonačan broj izvora saobraćaja



Markovljev lanac rađanja i umiranja sa $\lambda_i \equiv \lambda$ i $\mu_i \equiv i\mu$. Intenzitet dolaznog saobraćaj $\rho=\lambda/\mu$

Analiza M/M/S/0 reda čekanja

Korišćenjem relacija dobijenih za M/M/S dolazi se do

$$P_i = \frac{\rho^i}{i!} P_0$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{S} \frac{\rho^i}{i!}}$$

- Uslov ergodičnosti za stabilnost reda čekanja je uvijek ispunjen jer je u redu čekanja moguće smjestiti konačan broj paketa.
- Pomoću PASTA osobine dobija se

$$P_B \equiv P_S = \frac{\rho^S}{S! \sum_{i=0}^{S} \frac{\rho^i}{i!}}$$

ERLANG B formula

- Pretpostavlja se da je blokirani poziv izgubljen, tj da nema ponovnog pokušaja. Ponovni pokušaj nije korelisan sa propalim tako da on ulazi u dolaznu brzinu λ.

Analiza M/M/S/0 reda čekanja

Tipičan problem

Dat je intenzitet saobraćaja ρ. Treba odrediti broj servera tako da vjerovatnoća blokiranja P_B bude manja od neke definisane vrijednosti (npr 0.1%). U tu svrhu se koristi Erlangova tablica. Na primjer neka je ρ=12.5, P_B=5% odrediti S.

Pogodna je i za proračun kapaciteta vodova koji povezuju komutatore kola.

Analiza M/M/S/0 reda čekanja

Table 5-1. Erlang-B table.

S	1%	2%	3%	5%	7%
1	0. 0101	0. 0204	0. 0309	0. 0526	0. 0753
2	0. 153	0. 223	0. 282	0. 381	0. 470
3	0. 455	0. 602	0. 715	0. 899	1. 06
4	0. 869	1. 09	1. 26	1. 52	1. 75
5	1. 36	1. 66	1. 88	2. 22	2. 50
6	1. 91	2. 28	2. 54	2. 96	3. 30
7	2. 50	2. 94	3. 25	3. 74	4. 14
8	3. 13	3. 63	3. 99	4. 54	5. 00
9	3. 78	4. 34	4. 75	5. 37	5. 88
10	4. 46	5. 08	5. 53	6. 22	6. 78
11	5. 16	5. 84	6. 33	7. 08	7. 69
12	5. 88	6. 61	7. 14	7. 95	8. 61
13	6. 61	7. 40	7. 97	8. 83	9. 54
14	7. 35	8. 20	8. 80	9. 73	10. 5
15	8. 11	9. 01	9. 65	10. 6	11. 4
16	8. 88	9. 83	10. 5	11. 5	12. 4
17	9. 65	10. 7	11. 4	12. 5	13. 4
18	10. 4	11. 5	12. 2	13. 4	14. 3
19	11. 2	12. 3	13. 1	14. 3	15. 3
20	12. 0	13. 2	14. 0	15. 2	16. 3
21	12. 8	14. 0	14. 9	16. 2	17. 3
22	13. 7	14. 9	15. 8	17. 1	18. 2
23	14. 5	15. 8	16. 7	18. 1	19. 2
24	15. 3	16. 6	17. 6	19. 0	20. 2
25	16. 1	17. 5	18. 5	20. 0	21. 2
26	17. 0	18. 4	19. 4	20. 9	22. 2
27	17. 8	19. 3	20. 3	21. 9	23. 2
28	18. 6	20. 2	21. 2	22. 9	24. 2
29	19. 5	21. 0	22. 1	23. 8	25. 2
30	20. 3	21. 9	23. 1	24. 8	26. 2

Analiza M/M/S/0 reda čekanja

ERLANG B raspodjela je izvedena pod pretpostavkom Poasonovog dolaznog procesa.

- U klasičnoj telefoniji dolazne pozive generišu korisnici, koji se ponašaju ON-OFF. Periodi korišćenja i nekorišćenja se smjenjuju i imaju eksponencijalne raspodjele.
- Prema tome kada postoji konačan broj korisnika U, rezultujući saobraćaj nije Poasonov.
- U tom slučaju se može napraviti Markovljev lanac čija je dolazna brzina λ_i=(U-i)λ.
- PASTA više ne važi.
- Koristi se aproksimacija ERLANG B raspodjelom pri čemu je λ_i=Uλ

Analiza M/M/S/0 reda čekanja

- Može se pokazati da ERLANG B raspodjela važi i za slučaj M/G/S/0 reda čekanja.
- To je veoma važno kada se uzme u obzir da današnje fiksne telefonske mreže usmjeravaju pozive (Pareto raspodjela) prema ISP

$$\bar{N} = \sum_{i=0}^{S} iP_i = P_0 \sum_{i=1}^{S} i\frac{P_i}{P_0} = P_0 \sum_{i=1}^{S} i\frac{\rho^i}{i!} = \rho P_0 \sum_{i=1}^{S} \frac{\rho^{i-1}}{(i-1)!} = \rho(1-P_S)$$

$$\bar{\lambda} = \sum_{i=0}^{S-1} \lambda_i P_i = \lambda \sum_{i=0}^{S-1} P_i = \lambda(1-P_S)$$ **= propusnosti**

- Iako je dolazni proces Poasonov, odlazni proces i proces odbijanja nijesu Poasonovi. Radi se o *smoothed* i *peaked* saobraćajima.

$$\bar{T} = \frac{\bar{N}}{\lambda(1-P_S)} = \frac{1}{\mu}$$

Analiza M/M/S/0 reda čekanja

Primjer7

Poruke konstantne veličine od 1000 bita stižu na multiplekser koji ima 16 izlaza, od kojih svaki funkcioniše brzinom 50kb/s. Predpostaviti da poruke dolaze prosječnom brzinom od 1440000 poruka tokom ČNO. Nema prostora za baferovanje, tako da ako se poruka odmah ne posluži biva izgubljena. Izračunati vjerovatnoću blokiranja.

Analiza M/M/∞ reda čekanja

Red čekanja sa sledećim karakteristikama

- Poasonov dolazni proces srednje dolazne brzine λ
- Eksponencijalno vrijeme posluživanja parametra μ
- Beskonačan broj server
- Beskonačna širina liste čekanja
- Beskonačan broj izvora saobraćaja
- Granični slučaj prethodna dva kada S teži beskonačno
- Markovljev lanac rađanja i umiranja sa $\lambda_i \equiv \lambda$ i $\mu_i \equiv i\mu$. Intenzitet dolaznog saobraćaj $\rho = \lambda/\mu$

$$P_i = \frac{\rho^i}{i!} P_0, \qquad P_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\rho^i}{i!}} = e^{-\rho}$$

Poasonova raspodjela

$$P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i \rho^i}{i!} e^{-\rho} = e^{-\rho} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(z\rho)^i}{i!} = e^{-\rho} e^{z\rho} = e^{\rho(z-1)}$$

Analiza M/M/∞ reda čekanja

$$\bar{N} = \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{\rho^i}{i!} e^{-\rho} = \frac{dP(z)}{dz}\Big|_{z=1} = \rho e^{\rho(z-1)}\Big|_{z=1} = \rho$$

$$\bar{T} = \frac{\bar{N}}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$$

- Može se pokazati da ovi rezultati važe za slučaj M/G/∞.
- Prethodno se može primijeniti kod M/D/∞ koji je relevantan za Aloha protokole kontrole pristupa.