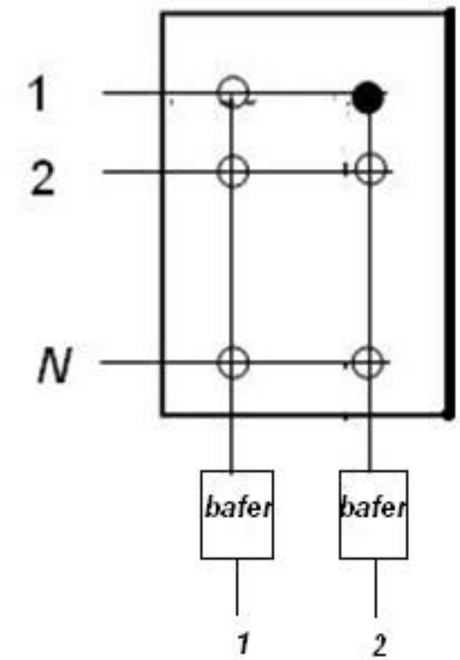
Primjer 1

Na prvi ulaz krosbar prostornog komutatora sa 2 izlaza dolazi saobraćaj sa Poasonovom raspodjelom, srednje dolazne brzine λ

Vjerovatnoća da se sa prvog ulaza paketi prosleđuju na prvi izlaz je *p*. Baferi na izlaznim portovima su beskonačne veličine. Modelovati saobraćaje na ulazima izlaznih bafera.



Primjer 2 a

Za prvi izlaz važi:

$$P(X_1 = k) = \frac{\left(p\lambda t\right)^k}{k!} e^{-p\lambda t}$$

$$X_1(z) = e^{p\lambda t(z-1)}$$

za drugi izlaz važi:

$$P(X_2 = k) = \frac{\left(\left(1-p\right)\lambda t\right)^k}{k!} e^{-\left(1-p\right)\lambda t}$$

$$X_2(z) = e^{(1-p)\lambda t(z-1)}$$

Primjer 2

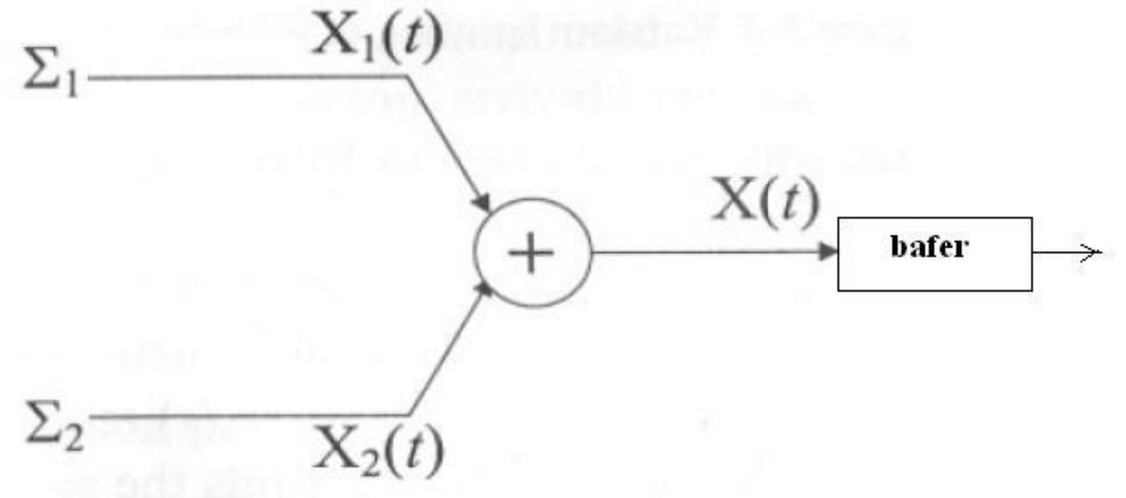
Posmatra se 2x2 komutator sa baferima na izlazu. Neka na oba ulaza komutatotra dolazi saobraćaj sa Poasonovom raspodjelom, srednjih dolaznih brzina λ_1 i λ_2 Vjerovatnoća da se prvog ulaza paketi prosleđuju na prvi izlaz je p_1, dok je vjerovatnoća da se paketi sa drugog ulaza prosleđuju na prvi izlaz p_2. U beskonačni izlazni bafer se tokom jednog slota mogu prihvatiti do dva paketa sa različitih ulaza. Modelovati saobraćaje na ulazima izlaznih bafera.

Primjer 2

Dolasci dva procesa se sumiraju i dobija se novi proces.

Sa X1(t) i X2(t) označimo broj paketa koji se prosleđuju ka datom izlazu u intervalu vremena t sa prvog odnosno drugog ulaza. Treba da opišemo proces

X(t)= X1(t) + X2(t).



Primjer 2

Kako su X1(t) i X2(t) nezavisni procesi važi, za prvi izlaz važi:

$$X(z) = X_1(z) X_2(z) = e^{p_1 \lambda_1 t (z-1)} e^{p_2 \lambda_2 t (z-1)} =$$

$$= e^{\left(p_1 \lambda_1 + p_2 \lambda_2\right) t (z-1)}$$

za drugi izlaz važi:

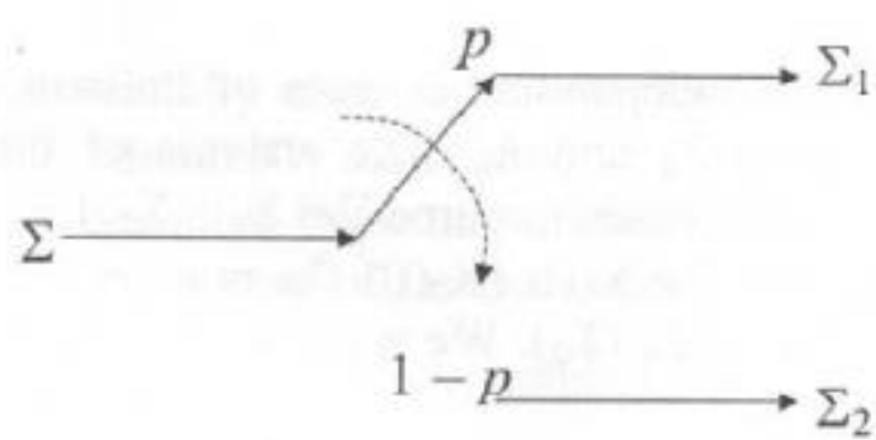
$$X(z) = X_1(z) X_2(z) = e^{(1-p_1) \lambda_1 t (z-1)} e^{\left(1-p_2\right) \lambda_2 t (z-1)} =$$

$$= e^{\left((1-p_1) \lambda_1 + \left(1-p_2\right) \lambda_2\right) t (z-1)}$$

Primjer 3

Poasonov proces dolazaka srednje dolazne brzine λ se slučajno komutira na dva izlaza.

Dolazak se šalje na izlaz jedan sa vjerovanoćom p, a na izlaz 2 sa vjerovatnoćom 1-p



Neka se proces na izlazu jedan opisuje sa vremenom između dolazaka $t_{a1.}$ Potrebno je pronaći njegovu vezu sa $t_{a.}$

Primjer 3

Slučajna promjenljiva t_a ima eksponencijalnu raspodjelu srednje vrijednosti $1/\lambda$ i ima laplasovu transformaciju funkcije gustine raspodjele $T_a(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s}$

Pretpostavimo da u trenutku t=0 dolazni proces zatiče komutator u poziciji 1, tj dolazni proces je adresiran na izlaz 1. Prema tome t_{a1} predstavlja naredni trenutak kada će dolazni proces biti adresiran na izlaz 1.

Odredimo statistiku t_{a1} brojem dolazaka k koje je generisao Poasonov slučajni proces tako da je samo poslednji dolazak adresiran za izlaz 1

- Sa vjerovatnoćom p, k=1, $t_{a1} = t_a$
- Sa vjerovatnoćom p(1-p), k=2, t_{a1} je suma dvije nezavisne slučajne promjenljive raspodjele kao t_a
- Sa vjerovatnoćom $p(1-p)^2$, k=3, t_{a1} je suma tri nezavisne slučajne promjenljive raspodjele kao t_a

Primjer 3

Korišćenjem osobina Laplasove transformacije dobijamo:

$$T_{a1}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(T_a(s)\right)^k p(1-p)^{k-1} = \frac{pT_a(s)}{1 - T_a(s)(1-p)}$$

Lako je zapaziti da t_{a1} predstavlja sumu k eksponencijalnih slučajnih promjenljivih t_a , pri čemu k ima modifikovanu geometrijsku raspodjelu.

Konačno

$$T_{a1}(s) = \frac{p\dfrac{\lambda}{\lambda+s}}{1 - \dfrac{\lambda}{\lambda+s}(1-p)} = \frac{\lambda p}{\lambda p + s}$$

Eksponencijalna raspodjela srednje brzine pλ.

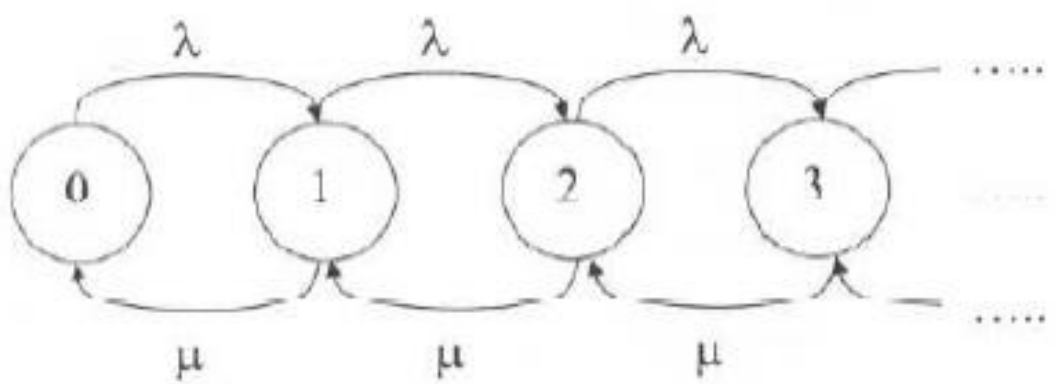
Primjer 4

Na ulaz E1 multipleksera dolazi prosječno 2000 paketa u sekundi saglasno Poasonovoj raspodjeli. Ako je srednja veličina paketa 1000 bita koliko iznosi srednji broj paketa u multiplekseru i srednje kašnjenje u prenosu paketa koje multiplekser unosi?

Primjer 4

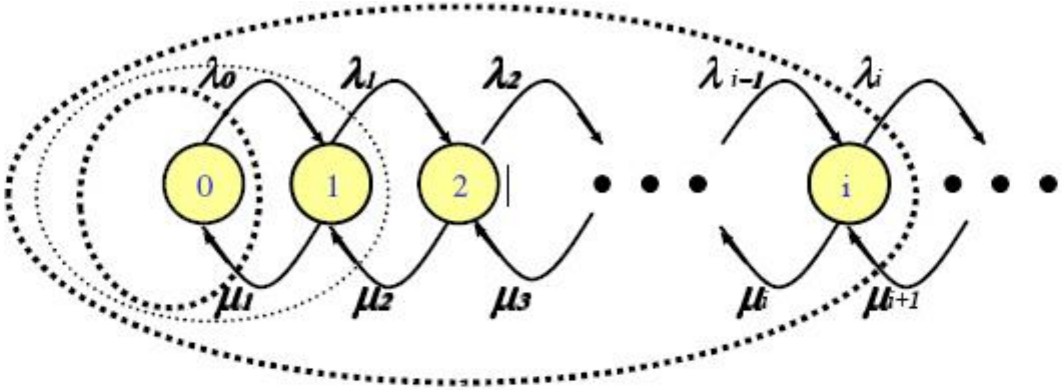
U pitanju je M/M/1 red čekanja.

- Poasonov dolazni proces srednje dolazne brzine λ
- Eksponencijalno vrijeme posluživanja parametra μ
- Jedan server
- Beskonačna širina liste čekanja
- Beskonačan broj izvora saobraćaja



Primjer 4

U opštem slučaju dijagram stanja za proces rađanja i umiranja je



Iz balansnih jednačina za svaki presjek:

$$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1 \Rightarrow P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

Primjer 4

$$\lambda_1 P_1 = \mu_2 P_2 \Rightarrow P_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} P_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_2}\frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

...

$$\lambda_{i-1} P_{i-1} = \mu_i P_i \Rightarrow P_i = \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} P_{i-1} = P_0 \prod_{n=1}^{i} \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}, \forall i \geq 1$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1 \Rightarrow P_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{P_i}{P_0} = 1 \Rightarrow P_0 \left(1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{n=1}^{i} \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}\right) = 1 \Rightarrow P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{n=1}^{i} \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}}$$

Primjer 4

$\lambda_i = \lambda,$

$\mu_i = \mu,$

pa slijedi:

$$P_i = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i = P_0 \rho^i$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \rho^i} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i} = 1 - \rho$$

$$P_i = (1 - \rho)\rho^i, \qquad i \geq 0$$

Primjer 4

$$P(z)=\sum_{i=0}^{\infty}(1-\rho)\,\rho^i z^i=\frac{1-\rho}{1-z\rho}$$

$$N=\sum_{i=0}^{\infty}i(1-\rho)\,\rho^i z^i=\frac{dP(z)}{dz}\Big|_{z=1}=\frac{\rho}{1-\rho}$$

$$T=\frac{N}{\lambda}=\frac{1}{\mu-\lambda}$$

$$\gamma=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(1-\rho)\rho^i=\mu(1-P_0)$$

Primjer 4

$$\lambda = 2000\, paketa / s,$$

$$\lambda = 2000000 b / s = 2 Mb / s,$$

$$\mu = 2.048 Mb / s,$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0.9765$$

pa slijedi:

$$N = \frac{\rho}{1-\rho} = 41.55$$

$$T = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{48} = 0.0208 s$$

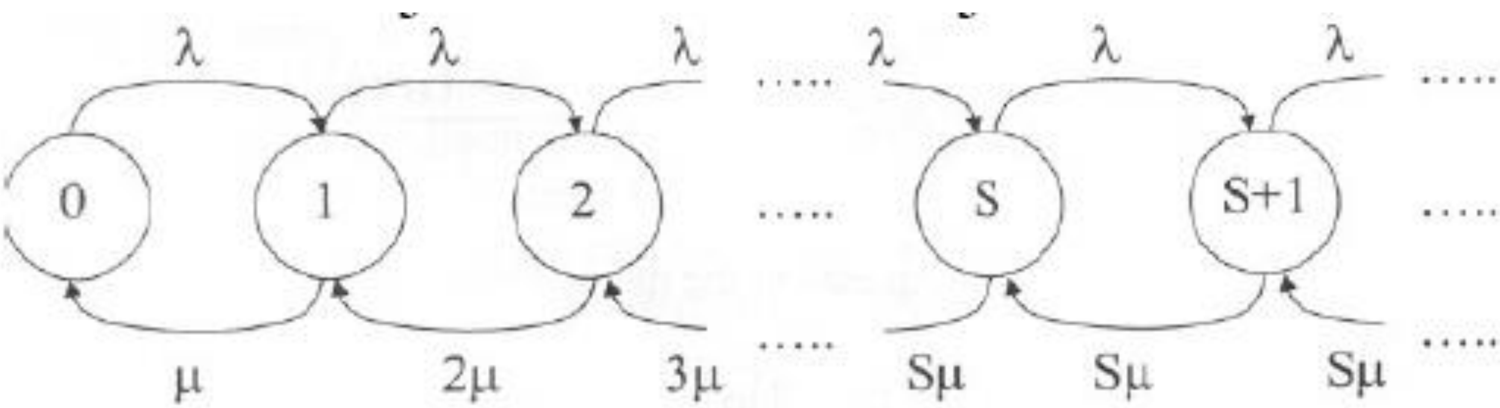
Primjer 5

Pretpostavimo da je na raspolaganju linija koja omogućava brzinu prenosa od 40kb/s. Ova linija se može koristiti na dva načina: kao vremenski multipleks od četiri 10kb/s kanala ili linija od 40kb/s bez multipleksa. Pretpostavimo da poruke dolaze Poasonovom brzinom i da imaju eksponencijalnu raspodjelu. Prvi slučaj se može aproksimirati sistemom M/M/4, a drugi M/M/1. Za srednju dolaznu brzinu od 30 Kb/s odrediti srednje kašnjenje.

Primjer 5

Za M/M/S red čekanja

- Poasonov dolazni proces srednje dolazne brzine λ
- Eksponencijalno vrijeme posluživanja parametra μ
- S servera
- Beskonačan broj mjesta u redu čekanja
- Beskonačan broj izvora saobraćaja



Primjer 5

$$\lambda P_0 = \mu P_1 \Rightarrow P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0 = \rho P_0$$

$$\lambda P_1 = 2\mu P_2 \Rightarrow P_2 = \frac{\lambda}{2\mu} P_1 = \frac{\rho^2}{2} P_0$$

$$\ldots$$

$$\lambda P_{S-1} = S\mu P_S \Rightarrow P_S = \frac{\lambda}{S\mu} P_{S-1} = \frac{\rho^S}{S!} P_0$$

$$\lambda P_S = S\mu P_{S+1} \Rightarrow_{+1} P_{S+1} = \frac{\lambda}{S\mu} P_S = \frac{\rho^{S+1}}{S \cdot S!} P_0$$

$$\ldots$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{n=1}^{i} \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{S-1} \frac{\rho^i}{i!} + \sum_{i=S}^{\infty} \frac{\rho^i}{S!S^{i-S}}} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{S-1} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{S\rho^S}{S!(S-\rho)}}$$

Primjer 5

$$S = 4$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 3$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{4 * 3^4}{4!(4-3)}} = 0.037$$

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P_k = P_0 \left(\sum_{k=0}^{S-1} \frac{(z\rho)^k}{k!} + \sum_{k=S}^{\infty} \frac{(z\rho)^k}{S!S^{k-S}} \right)$$

$$P(z) = 0.037 \left(\sum_{k=0}^{S-1} \frac{(z\rho)^k}{k!} + \frac{S(z\rho)^S}{S!(S - z\rho)} \right)$$

Primjer 5

$$P(z)=\left(\sum_{k=0}^{S-1}\frac{(z\rho)^k}{k!}+\frac{S(z\rho)^S}{S!(S-z\rho)}\right)0.037$$

$$\frac{d}{dz}P(z)=\left(\sum_{k=1}^{S-1}\frac{\rho^k}{k!}kz^{k-1}+\frac{\rho^S}{(S-1)!}\left(\frac{Sz^{S-1}}{(S-z\rho)}+\frac{z^S\rho}{(S-z\rho)^2}\right)\right)0.037$$

$$N=\frac{d}{dz}P(z=1)=\left(\sum_{k=1}^{S-1}\frac{\rho^k}{k!}k+\frac{\rho^S}{(S-1)!}\left(\frac{S}{(S-\rho)}+\frac{\rho}{(S-\rho)^2}\right)\right)0.037$$

$$N=\frac{d}{dz}P(z=1)=\left(\sum_{k=1}^{S-1}\frac{\rho^k}{k!}k+\frac{\rho^S}{(S-1)!}\frac{S^2-S\rho+\rho}{(S-\rho)^2}\right)0.037$$

Primjer 5

$$T = \frac{N}{\lambda},\ \mu = 10Kb/s,\ \lambda = 30Kb/s, \rho = 3, S = 4$$

$$T = \frac{\left(\sum_{k=1}^{S-1} \frac{\rho^K}{k!} k + \frac{\rho^S}{(S-1)!} \frac{S^2 - S\rho + \rho}{\left(S - \rho\right)^2} \right) 0.037}{\lambda}$$

$$T = \frac{0.037}{30*10^3} \left(3 + \frac{3^2}{2!} 2 + \frac{3^3}{3!} 3 + \frac{3^4}{(4-1)!} \frac{4^2 - 4*3 + 3}{\left(4-3\right)^2} \right)$$

$$T = \frac{0.037}{30*10^3} 57 = 0.07ms$$

Primjer 5

Za M/M/1 red čekanja:

$$\mu = 40Kb/s, \lambda = 30Kb/s,$$

$$T = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{10*10^3} = 0.1ms$$

Primjer 6

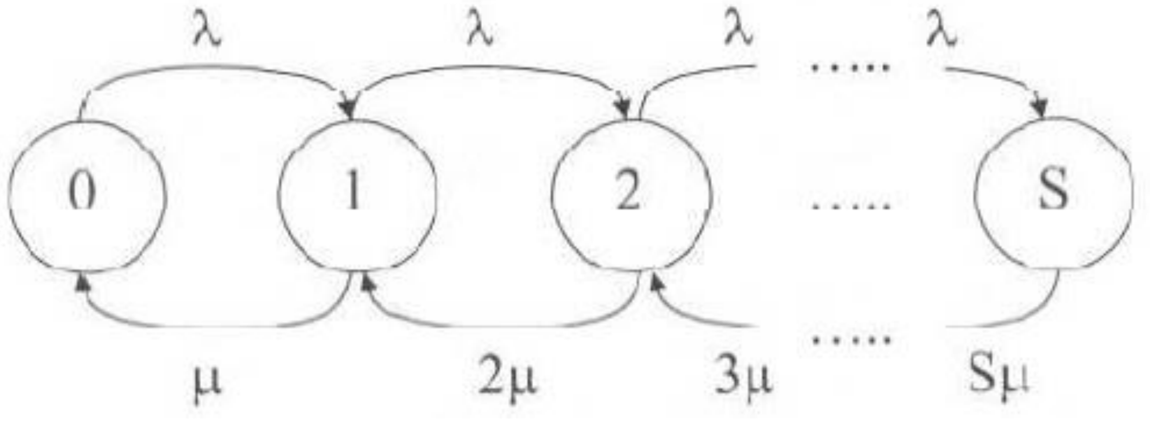
Poruke konstantne veličine od 1000 bita stižu na multiplekser koji ima 16 izlaza, od kojih svaki funkcioniše brzinom 50kb/s. Pretpostaviti da poruke dolaze prosječnom brzinom od 1440000 poruka tokom ČNO. Nema prostora za baferovanje, tako da ako se poruka odmah ne posluži biva izgubljena. Izračunati vjerovatnoću blokiranja.

.

Primjer 6

Za M/M/S/0 red čekanja

- Poasonov dolazni proces srednje dolazne brzine λ
- Eksponencijalno vrijeme posluživanja parametra μ
- S servera
- Nema prostora za baferovanje
- Beskonačan broj izvora saobraćaja



Primjer 6

$$P_i = \frac{\rho^i}{i!} P_0$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{S} \frac{\rho^i}{i!}}$$

$$P_B \equiv P_S = \frac{\rho^S}{S! \sum_{i=0}^{S} \frac{\rho^i}{i!}}$$

Primjer 6

$$L = 1000b$$

$$S = 16$$

$$\mu = 50Kb/s$$

$$\lambda = 1440000\,poruka/h = 400Kb/s$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 8$$

$$P_b = P_s = \frac{\rho^S}{S!\sum_{i=0}^{S}\frac{\rho^i}{i!}} = \frac{8^{16}}{16!\sum_{i=0}^{16}\frac{8^i}{i!}} = \frac{13.45}{\sum_{i=0}^{16}\frac{8^i}{i!}} = 0.0045 = 0.45\%$$

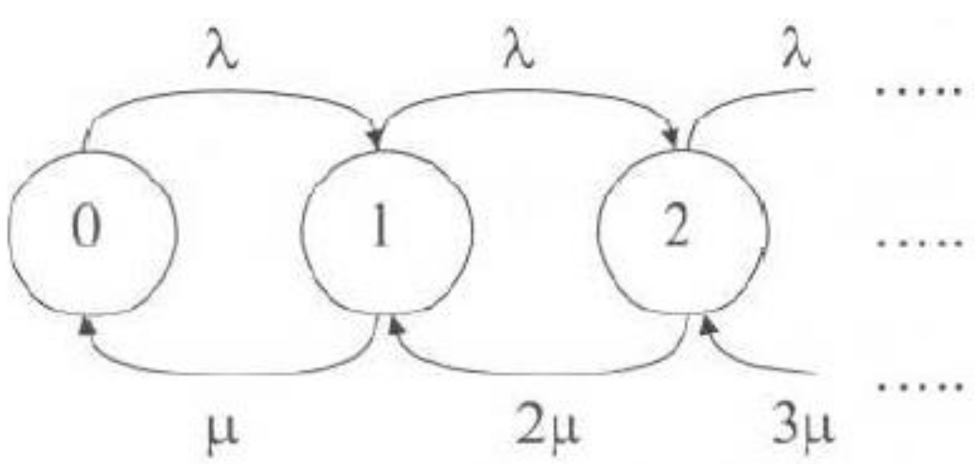
Primjer 7

Poruke konstantne veličine 1000b stižu na multiplekser koji ima *N* izlaza, od kojih svaki funkcioniše brzinom 50kb/s. Koliko iznosi srednje kasnjenje? Može se smatrati da je *N* veoma veliko.

Primjer 7

Za $M / M / \infty$ red čekanja

- Poasonov dolazni proces srednje dolazne brzine
- Eksponencijalno vrijeme posluživanja parametra
- Beskonačan broj servera
- Beskonačno mjesta u baferu
- Beskonačan broj izvora saobraćaja

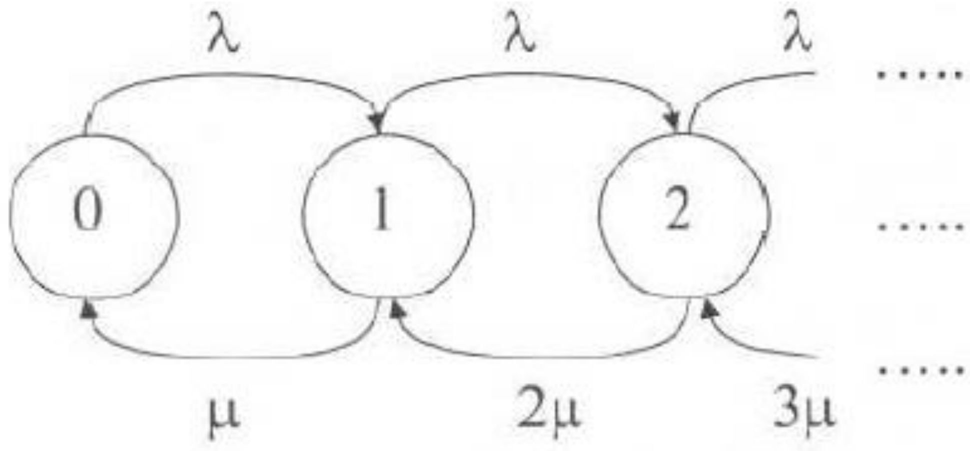


Primjer 7

$$P_i = \frac{\rho^i}{i!} P_0,$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\rho^i}{i!}} = e^{-\rho}$$

$$P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i \rho^i}{i!} e^{-\rho} = e^{-\rho} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(z\rho)^i}{i!} = e^{-\rho} e^{z\rho} = e^{\rho(z-1)}$$



Primjer 7

$$N = \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{\rho^i}{i!} e^{-\rho} = \frac{dP(z)}{dz}\Big|_{z=1} = \rho e^{\rho(z-1)}\Big|_{z=1} = \rho$$

$$T = \frac{N}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$$

$$T = 1/50Kb/s = 0.02ms$$