Vjezbe 6
Telekomunikacione mreže

Primjer 1

U pošti postoje dva telefona. Kada osoba A odluči da koristi telefon i dođe u poštu utvrdi da ih već koriste osobe B i C, pri čemu niko više ne čeka. Pretpostavimo da vrijeme korišćenja telefona ima eksponencijalnu raspodjelu parametra μ. Koliko iznosi vjerovatnoća da osoba A završi korišćenje telefona prije osobe B? Što ako je vrijeme korišćenja računara determinističko?

Primjer 1

- X – vrijeme trajanja korišćenja telefona od strane osobe A
- Y – vrijeme trajanja korišćenja telefona od strane osobe B

$$P(X<Y)=\int_0^\infty P(X<y|Y=y)f_Y(y)dy=\int_0^\infty F_X(y)f_Y(y)dy=$$

$$=\int_0^\infty\left(1-e^{-\mu y}\right)\mu e^{-\mu y}dy=1-\mu\int_0^\infty e^{-2\mu y}dy=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Za slučaj determinističke raspodjele

$$P(X<Y)=0$$

Primjer 2

Pretpostavimo da se studenti A i B takmiče ko će prije završiti zadatak. Pretpostavimo da vremena završetka imaju eksponencijalnu raspodjelu parametara λ_A, odnosno λ_B. Odrediti raspodjelu slučajne promjenljive Z koja predstavlja broj takmičenja do prve pobjede studenta A. Neka je p vjerovatnoća da student A pobjeđuje Studenta B. Neka je X slučajna raspodjela vremena rada studenta A na zadatku, a Y slučajna raspodjela vremena rada studenta B na zadatku.

Primjer 2

$$p = P(X < Y) = \int_0^{\infty} P(X < y | Y = y) f_Y(y)\,dy = \int_0^{\infty} F_X(y) f_Y(y)\,dy =$$

$$= \int_0^{\infty} \left(1 - e^{-\lambda_A y}\right) \lambda_B e^{-\lambda_B y} dy = 1 - \lambda_B \int_0^{\infty} e^{-(\lambda_A + \lambda_B) y} dy = 1 - \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} = \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}$$

Neka je q vjerovatnoća pobjede studenta B

$$q = 1 - p = \frac{\lambda_B}{\lambda_B + \lambda_A}$$

$$P(Z = n) = (1 - q) q^{n-1} = \frac{\lambda_A}{\lambda_B + \lambda_A} \left(\frac{\lambda_B}{\lambda_B + \lambda_A} \right)^{n-1}, \quad 0 < q < 1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Radi se modifikovanoj geometrijskoj raspodjeli parametra $\dfrac{\lambda_B}{\lambda_B + \lambda_A}$

Primjer 3

Neka se dolazni saobraćaj karakteriše Pareto raspodjelom. U Pareto raspodjeli *a* je parametar oblika koji je pozitivan realan broj, dok je *b* minimalna vrijednost slučajne promjenljive.

Za vrijednosti a=1.4, 1.5 , 1.6, i b=2, odrediti srednju vrijednost slučajne promjenljive?

Kako utiču parametri raspodjele na srednju vrijednost?

Odrediti Laplasovu transformaciju Pareto raspodjele.

Primjer 3

$$f_X(x) = \frac{\alpha b^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}, \quad x \geq b$$

$$E(X) = \int_b^{\infty} x f_{\mathrm{x}}(x)\,dx =$$

$$= \int_b^{\infty} x \frac{\alpha b^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}\,dx = \alpha b^{\alpha} \int_b^{\infty} x^{-\alpha}\,dx =$$

$$= \frac{\alpha b}{\alpha - 1}$$

Primjer 4

$$E(X) = \frac{\alpha b}{\alpha - 1}$$

$$\alpha = 1.4,\ \text{b=2},\ E(X) = \frac{1.4 * 2}{0.4} = 7$$

$$\alpha = 1.5,\ \text{b=2},\ E(X) = \frac{1.5 * 2}{0.5} = 6$$

$$\alpha = 1.6,\ \text{b=2},\ E(X) = \frac{1.6 * 2}{0.6} = 5.33$$

Primjer 4

$$f(x) = \frac{\alpha b^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}, \qquad b \le x < \infty$$

$$X(s) = \int_{b}^{\infty} \frac{\alpha b^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} e^{-sx} dx = \alpha b^{\alpha} \int_{b}^{\infty} \frac{e^{-sx}}{x^{\alpha+1}} dx$$

$$X(s) = \alpha b^{\alpha} s^{\alpha} \Gamma(-\alpha, sb), \;\; gdje \;\; je \; \Gamma(-\alpha, sb) = \int_{sb}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{\alpha+1}} dt$$

Primjer 5

Pomoću Z transformacije odrediti srednju vrijednost i varijansu slučajne promjenljive sa geometrijskom raspodjelom

$$X(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} z^k \text{Prob}\{X=k\}=\sum_{k=0}^{+\infty}(1-q)(zq)^k=\frac{1-q}{1-zq}$$

$$E[X]=X'(1)=\frac{d}{dz}\frac{1-q}{1-zq}\bigg|_{z=1}=\frac{q(1-q)}{(1-zq)^2}\bigg|_{z=1}=\frac{q}{1-q}$$

$$E[X^2]=X'(1)+X''(1)=\frac{q}{1-q}+\frac{d}{dz}\frac{q(1-q)}{(1-zq)^2}\bigg|_{z=1}=$$

$$=\frac{q}{1-q}+\frac{2q^2(1-q)}{(1-zq)^3}\bigg|_{z=1}=\frac{q}{1-q}+\frac{2q^2}{(1-q)^2}=\frac{q(1+q)}{(1-q)^2}$$

$$X(z)=\sum_{k=1}^{+\infty} z^k \text{Prob}\{X=k\}=\sum_{k=1}^{+\infty} z^k(1-q)q^{k-1}=$$

$$=z(1-q)\sum_{k=1}^{+\infty}(zq)^{k-1}=\frac{z(1-q)}{1-zq}$$

Modifikovana geometrijska

Primjer 5

Odrediti raspodjelu sume slučajnih promjenljivih koje imaju identičnu modifikovanu geometrijsku raspodjelu. Broj slučajnih promjenljivih takođe ima geometrijsku raspodjelu:

$$X(z)=\frac{z(1-q)}{1-zq}$$

$$N(z)=\frac{z(1-p)}{1-zp}$$

$$Y(z)=\sum_j\left[\prod_{i=1}^{j}X_i(z)\right]\text{Prob}\{N=j\}$$

$$Y(z)=\sum_j[X(z)]^j\,\text{Prob}\{N=j\}=N[X(z)]$$

$$Y=\sum_{i=1}^{N}X_i \longrightarrow Y(z)=N[X(z)]=\frac{\frac{z(1-q)}{1-zq}(1-p)}{1-\frac{z(1-q)}{1-zq}p}=\frac{z(1-q)(1-p)}{1-z[q+p-pq]}=$$

$$=\frac{z(1-q)(1-p)}{1-z[1-(1-q)(1-p)]}$$

Modifikovana geom. raspodjela parametra (1-q)(1-p)