Vjezbe 2
Telekomunikacione mreže

Slučajna promjenljiva: osnovne definicije i osobine

- Slučajna promjenljiva X se definiše na slučajnom eksperimentu za koji je definisana matematička vjerovatnoća.
- Radi se o funkciji koja preslikava skup elementarnih događaja u skup realnih brojeva
- Sa Ω se označava skup vrijednosti slučajne promjenljive X.
- Slučajna promjenljiva se obično definiše na sledeći način:

$$P(X = x) = P\left\{\omega \in S : X\left(\omega\right) = x\right\}$$

Funkcija slučajne promjenljive

$$F_X(x) = p(X \leq x)$$

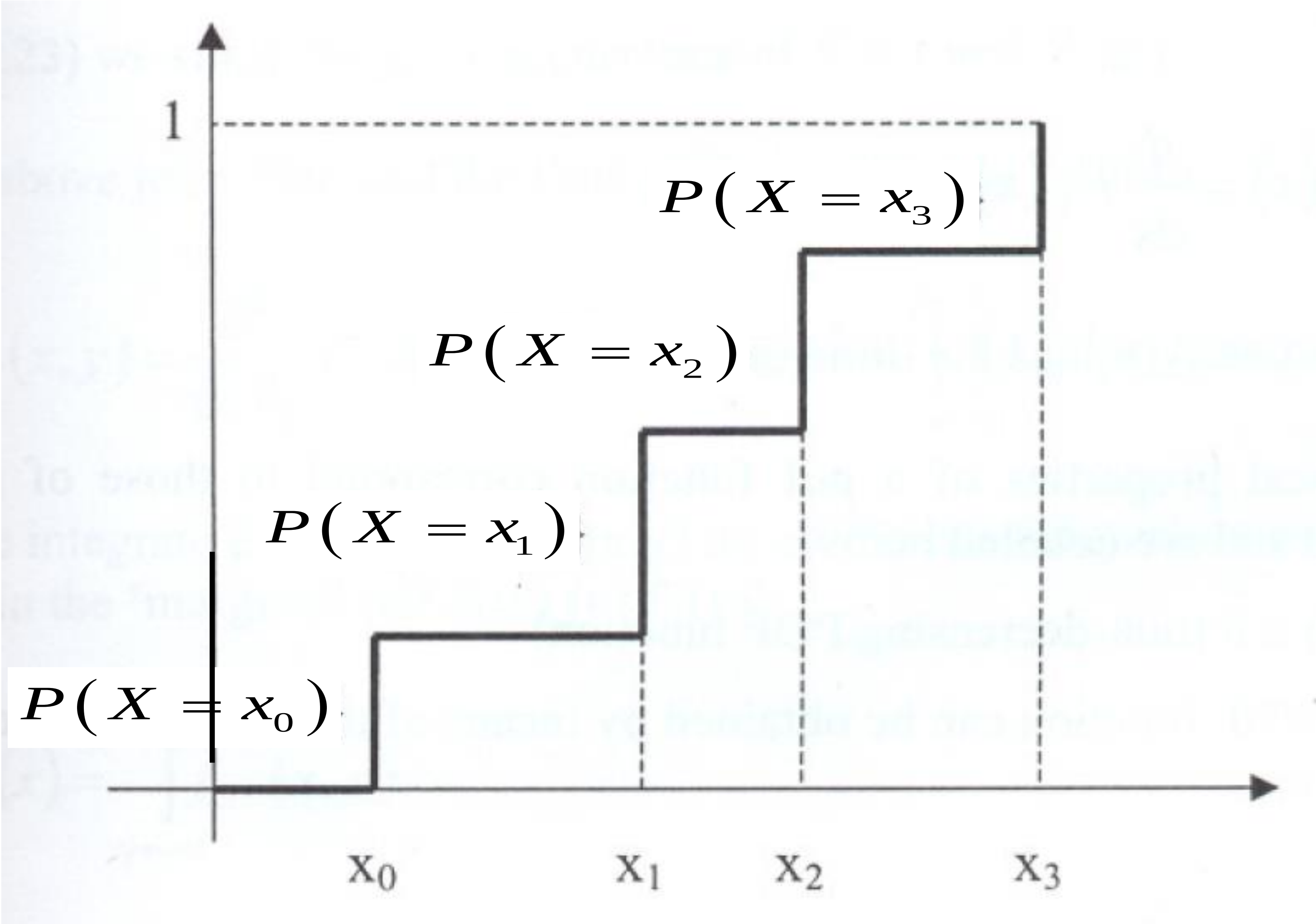
- $0 \leq F_X(x) \leq 1$
- bezdimenziona veličina
- $F_X(x)$ je neopadajuća funkcija
- $F_X(x)$ teži 1 kada x teži +∞, odnosno 0 kada x teži -∞
- $F_X(x)$ je kontinualna funkcija

$$\lim_{x \to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$$

- Za diskretnu slučajnu promjenljivu $F_X(x)$ je stepeničasta funkcija sa koracima jednakim vjerovatnoći diskretnih događaja

$$F_X(x) = P(X \leq x_n) = \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) u(X - x_i)$$

Funkcija slučajne promjenljive



Funkcija slučajne promjenljive

• Primjer izračunavanja vjerovatnoće da se slučajna promjenljiva nalazi u opsegu

$$\{X \le x_2\} = \{X \le x_1\} \cup \{x_1 < X \le x_2\}$$

$$\mathrm{Prob}\{X \le x_2\} = \mathrm{Prob}\{X \le x_1\} + \mathrm{Prob}\{x_1 < X \le x_2\}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Prob}\{x_1 < X \le x_2\} &= \mathrm{Prob}\{X \le x_2\} - \mathrm{Prob}\{X \le x_1\} = \\ &= F_X(x_2) - F_X(x_1) \end{aligned}$$

Funkcija gustine slučajne promjenljive

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

- $f_X(x) \geq 0$
- Dimenzija x^{-1}
- Dobijanje funkcije raspodjele iz $f_X(x)$ $\quad \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy = F(x)$
- Uslov normalizovanosti $\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$
- Vjerovatnoća i gustina $\quad \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx = p(x_1 < X \leq x_2)$

$$f(x)\, dx = p(x < X \leq x + dx)$$

- Za diskretnu slučajnu promjenljivu

$$f_X(x) = \sum_{i=0}^{n} \text{Prob}\{X = x_i\}\delta(x - x_i)$$

Združena raspodjela

$$F_{XY}(x, y) = p(X \leq x, Y \leq y)$$

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x,y) \Leftrightarrow F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

Marginalna raspodjela

$$f_X(x) = \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} f_{XY}(x,y)\,dy$$

Statistički nezavisne slučajne promjenljive

$$f_{X_1,X_2 \ldots X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x) \Leftrightarrow$$

$$F_{X_1,X_2 \ldots X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_X(x)$$

Uslovna raspodjela

$$F_{X|Y}(x \mid y) = \mathrm{Prob}\{X \leq x \mid Y = y\}$$

$$f_{X|Y}(x \mid y) = \frac{\partial}{\partial x} F_{X|Y}(x \mid y) = \frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)}$$

$$F_X(x) = \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} F_{X|Y}(x \mid y) f_Y(y) dy$$

Raspodjela slučajne promjenljive X i funkcija g()

$$F_Y(y) = \text{Prob}\{Y \le y\} = P\{g(X) \le y\}$$

$$F_Y(y) = P\{g(X) \le y\} = P\{X \le g^{-1}(y)\} = F_X\left(g^{-1}(y)\right)$$

$$Y = g(X)$$

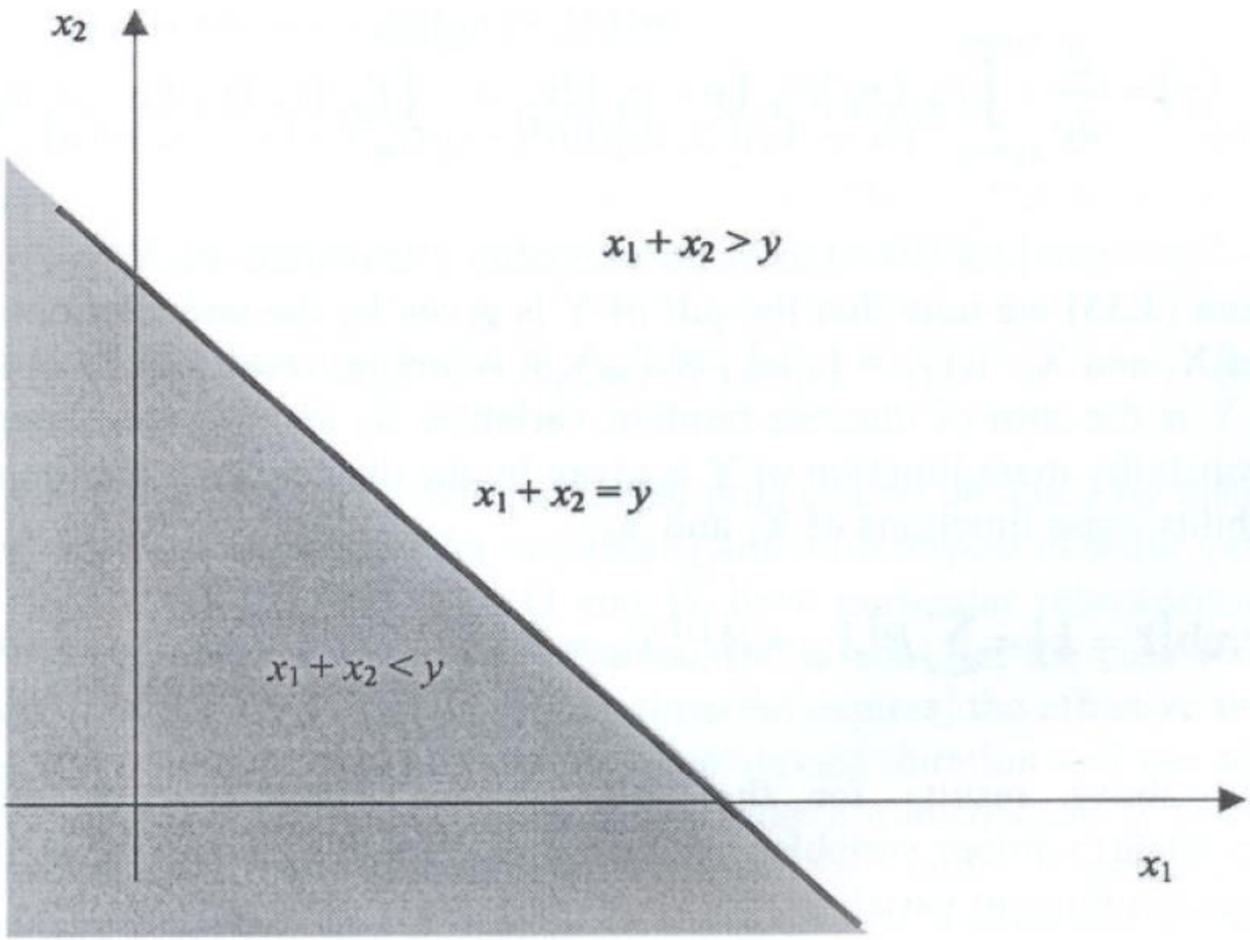
$$p(x \le X \le x + dx) = f_X(x)\,dx$$

$$|f_Y(y)\,dy| = |f_X(x)\,dx|$$

$$f_Y(y) = f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|$$

Suma nezavisnih slučajnih promjenljivih

$$F_Y(y) = \mathrm{Prob}\{Y \le y\} = P\{X_1 + X_2 \le y\}$$



Suma nezavisnih slučajnih promjenljivih

$$F_Y(y) = P\{X_1 + X_2 \le y\} = \int_{x_2=-\infty}^{x_2=+\infty} \int_{x_1=-\infty}^{y-x_2} f_{X_1X_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$F_Y(y) = \int_{x_2=-\infty}^{x_2=+\infty} \int_{x_1=-\infty}^{y-x_2} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) dx_1 dx_2 = \int_{x_2=-\infty}^{x_2=+\infty} f_{X_2}(x_2) \left[\int_{x_1=-\infty}^{x_1=y-x_2} f_{X_1}(x_1) dx_1 \right] dx_2 =$$

$$= \int_{x_2=-\infty}^{x_2=+\infty} f_{X_2}(x_2) F_{X_1}(y - x_2) dx_2$$

Šta je ovo?

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} \int_{x_2=-\infty}^{x_2=+\infty} f_{X_2}(x_2) F_{X_1}(y - x_2) dx_2 = \int_{x_2=-\infty}^{x_2=+\infty} f_{X_2}(x_2) f_{X_1}(y - x_2) dx_2$$

Za slučaj diskretne slučajne promjenljive

$$\mathrm{Prob}\{Y = k\} = \sum_i P\{X_1 = i\} P\{X_2 = k - i\}$$

Minimum i maksimum slučajnih promjenljivih

$$Q = \max\{X, Y\} \qquad W = \min\{X, Y\}$$

$$F_Q(q) = \text{Prob}\{Q \le q\} = \text{Prob}\{X \le q, Y \le q\}$$

Ako su X i Y nezavisne

$$F_Q(q) = \text{Prob}\{X \le q\} \times \text{Prob}\{Y \le q\} = F_X(q) \times F_Y(q)$$

$$F_W(w) = \text{Prob}\{W \le w\} = \text{Prob}\{\{X \le w\} \cup \{Y \le w\}\} =$$
$$= \text{Prob}\{X \le w\} + \text{Prob}\{Y \le w\} - \text{Prob}\{\{X \le w\} \cap \{Y \le w\}\}$$

Ako su X i Y nezavisne

$$F_W(w) = F_X(w) + F_Y(w) - F_X(w) \times F_Y(w)$$

Poređenje slučajnih promjenljivih

$$\text{Prob}\{X > Y\} = \int \text{Prob}\{X > y \mid Y = y\} f_Y(y)dy$$

Ako su X i Y nezavisne

$$\text{Prob}\{X > Y\} = \int \text{Prob}\{X > y\} f_Y(y)dy = \int [1 - F_X(y)] f_Y(y)dy$$

Momenti slučajnih promjenljivih

Matematičko očekivanje

$$E[X] = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx & \text{Za kontinualne slučajne promjenljive} \\ \sum_i x_i P\{X = x_i\} & \text{Za diskretne slučajne promjenljive} \end{cases}$$

$$E[aX + b] = aE[X] + b$$

$$E[X+Y] = \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} (x+y) f_{XY}(x,y) dx dy =$$

$$= \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} x f_{XY}(x,y) dx dy + \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} y f_{XY}(x,y) dx dy =$$

$$= \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} x \left[\int_{y=-\infty}^{y=+\infty} f_{XY}(x,y) dy \right] dx + \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} y \left[\int_{x=-\infty}^{x=+\infty} f_{XY}(x,y) dx \right] dy =$$

$$= \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} x f_X(x) dx + \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} y f_Y(y) dy = E[X] + E[Y]$$

Ovo važi bez obzira na zavisnost slučajnih promjenljivih

Momenti slučajnih promjenljivih

Matematičko očekivanje proizvoda slučajnih promjenljivih

$$E[X \times Y] = \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} (x \times y) f_{XY}(x, y) dx dy =$$

$$= \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} y f_Y(y) dy \times \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} x f_X(x) dx = E[X] \times E[Y]$$

Važi ako su X i Y nezavisne slučajne promjenljive

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) \times f_Y(y)$$

m-ti moment slučajne promjenljive

$$E[X^m] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m f_X(x) dx$$

m=2 predstavlja srednju kvadratnu vrijednost.

Momenti slučajnih promjenljivih

Varijansa

$$\mathrm{Var}[X] = E\left[(X - E[X])^2\right] = E\left[X^2 + \{E[X]\}^2 - 2XE[X]\right] =$$
$$= E\left[X^2\right] + \{E[X]\}^2 - 2\{E[X]\}^2 = E\left[X^2\right] - \{E[X]\}^2$$

$$\mathrm{Var}[X+Y] = E\left[(X + Y - E[X] - E[Y])^2\right] =$$
$$= \int\limits_{y=-\infty}^{y=+\infty} \int\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} (x+y-E[X]-E[Y])^2 f_{XY}(x,y)\,dx\,dy =$$
$$= E\left[(X - E[X])^2 + (Y - E[Y])^2 + 2(X - E[X])(Y - E[Y])\right] =$$
$$= E\left[(X - E[X])^2\right] + E\left[(Y - E[Y])^2\right] + 2E[(X - E[X])(Y - E[Y])] =$$
$$= \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] + 2E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

kovarijansa

$$\mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y]$$

Ako su X i Y nezavisne

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$$

Standardna devijacija

$$C_X = \frac{\sigma_X}{E[X]}$$

Koeficijent varijabilnosti, koji je jednak 0 za determinističke slučajne promjenljive

Momenti slučajnih promjenljivih

centralni moment m-tog reda

$$E\left[(X - E[X])^m\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])^m f_X(x)\,dx$$

Kovarijansa

$$c_{XY} = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$$

Transformacije slučajnih promjenljivih

- Funkcija generisanja vjerovatnoće
  - Primjenjuje se na diskretne slučajne promjenljive, poznate raspodjele vjerovatnoća, koje uzimaju nenegativne i cjelobrojne vrijednosti.

$$X(z) = E\left[z^X\right] = \sum_k z^k \mathrm{Prob}\{X = k\}, \qquad \text{for } |z| \le 1$$

  - Radi se o nizu sa nenegativnim koeficijentima, koji je definisan za sve vrijednosti slučajne promjneljive.

$$X(z = 1) = \sum_k \mathrm{Prob}\{X = k\} = 1$$

Uslov normalizovanosti

$$X(z = 0) = \mathrm{Prob}\{X = 0\} \le 1$$

$$|X(z)| = \left|\sum_k z^k \mathrm{Prob}\{X = k\}\right| \le \sum_k \left|z^k \mathrm{Prob}\{X = k\}\right| = \sum_k \left|z^k\right| \mathrm{Prob}\{X = k\} \le \sum_k \mathrm{Prob}\{X = k\} = 1$$

Transformacije slučajnih promjenljivih

- Funkcija generisanja vjerovatnoće

$$X'(z) = \frac{d}{dz}\sum_k z^k \mathrm{Prob}\{X = k\} = \sum_k \frac{d}{dz} z^k \mathrm{Prob}\{X = k\} = \sum_k k z^{k-1} \mathrm{Prob}\{X = k\}$$

$$\Rightarrow X'(z = 1) = \sum_k k \mathrm{Prob}\{X = k\} = E[X]$$

$$X''(z) = \frac{d}{dz}\sum_k k z^{k-1} \mathrm{Prob}\{X = k\} = \sum_k k \frac{d}{dz} z^{k-1} \mathrm{Prob}\{X = k\} = \sum_k k(k-1) z^{k-2} \mathrm{Prob}\{X = k\}$$

$$\Rightarrow X''(z = 1) = \sum_k k^2 \mathrm{Prob}\{X = k\} - \sum_k k \mathrm{Prob}\{X = k\}$$

$$X''(z = 1) + X'(z = 1) = E\left[X^2\right]$$

Transformacije slučajnih promjenljivih

- Funkcija generisanja vjerovatnoće
  - Razmotrimo dvije slučajne promjenljive X i Y, i nađimo funkciju generisanja vjerovatnoća njihove sume W=X+Y

$$\mathrm{Prob}\{W=j\}=\sum_k \mathrm{Prob}\{X=k\}\mathrm{Prob}\{Y=j-k\}=$$

$$=\mathrm{Prob}\{X=k\}\otimes_d \mathrm{Prob}\{Y=k\}$$

Konvolucija

$$W(z)=X(z)Y(z)$$

Na osnovu osobina Z-transformacije

ILI

$$W(z)=\sum_j z^j \mathrm{Prob}\{W=j\}=\sum_j\sum_k z^j \mathrm{Prob}\{X=k\}\mathrm{Prob}\{Y=j-k\}=$$

$$=\sum_k \mathrm{Prob}\{X=k\}\sum_j z^j \mathrm{Prob}\{Y=j-k\}=$$

$$=\sum_k \mathrm{Prob}\{X=k\}z^k\sum_j z^{j-k} \mathrm{Prob}\{Y=j-k\}=X(z)Y(z)$$

Transformacije slučajnih promjenljivih

- Funkcija generisanja vjerovatnoće
  - Nekada je poznata funkcija generisanja vjerovatnoća, a treba odrediti raspodjelu vjerovatnoća.

$$X(z) = \sum_k z^k \text{Prob}\{X = k\} \longrightarrow \text{Prob}\{X = k\} = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dz^k} X(z) \Big|_{z=0}$$

Na bazi razvoja Mac Laurin-ovog reda

Laplasova transformacija funkcije gustine vjerovatnoća

- Za slučajnu promjenljivu X (kontinualnu definisanu za x$\in$[0,+∞} ili diskretnu) sa funkcijom gustine raspodjele $f_X(x)$ Laplasova transformacija X(s) je definisana kao

$$X(s) = E\left[e^{-sX}\right] = \begin{cases} \int_0^{+\infty} f_X(x) e^{-sX} dx & \text{Za kontinualne slučajne promjenljive} \\ \sum_i \mathrm{Prob}\{X = k\} e^{-sk} & \text{Za diskretne slučajne promjenljive} \end{cases}$$

- Veza između Laplasove transformacije i karakateristične funkcije za kontinualne slučajne promjenljive i x$\in$[0,+∞} se dobija za s=-jω
- X(s=0)=1 uslov normalizovanosti
- Slično kao za karakterističnu funkciju može se pokazati

$$E\left[X^m\right] = (-1)^m X^{(m)}(s = 0)$$