Primjer 1

Paket se prenosi po linku. Vjerovatnoća neuspješnog prenosa je q. Vjerovatnoća uspješnog prenosa je 1-q. Odrediti srednji broj neuspješnih pokušaja do uspješnog prenosa.

Kako glasi funkcija generisanja vjerovatnoća za odgovarajuću slučajnu promjenljivu.

a) $q=0.2$ b) $q=0.9$

Primjer 1 - Rešenje

Geometrijska raspodjela:

$$P(X = k) = (1 - q)q^k \quad k = 0,1,2\ldots$$

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k(1 - q)q^k = (1 - q)q \sum_{k=0}^{\infty} kq^{k-1} = (1 - q)q \cdot \frac{d}{dq} \sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

$$= (1 - q)q \cdot \frac{d}{dq} \frac{1}{1 - q} = \frac{(1 - q)q}{(1 - q)^2} = \frac{q}{1 - q}$$

Funkcija generisanja vjerovatnoće: $X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - q)(zq)^k = \frac{1 - q}{1 - zq}$

a) E[X]=0.25 , b) E[X]=9

Primjer 2

Pretpostavimo da se dva servera A i B koriste za pružanje Web servisa. Brzina pružanja servisa zavisi od opterećenosti mreže i može se modelovati eksponencijalnom raspodjelom parametara λ_A , u slučaju servera A, odnosno λ_B u slučaju servera B. Pretpostaviti da se performanse servera procjenjuju tako što im se šalju identični zahtjevi i mjeri se vrijeme potrebno za opsluživanje istih. Odrediti raspodjelu slučajne promjenljive Z koja predstavlja broj poslatih zahtjeva do trenutka kada server A prvi put ne obradi zahtjev prije servera B. Neka je p vjerovatnoća da server A obrađuje zahtjev prije servera B. Neka je X slučajna raspodjela vremena obrade zahtjeva od strane servera A, a Y slučajna raspodjela vremena obrade zahtjeva od stane servera B.

Primjer 2 - Rešenje

$$p = P(X < Y) = \int_0^\infty P(X < y \mid Y = y) f_Y(y)\,dy = \int_0^\infty F_X(y) f_Y(y)\,dy =$$

$$= \int_0^\infty \left(1 - e^{-\lambda_A y}\right) \lambda_B e^{-\lambda_B y}\,dy = 1 - \lambda_B \int_0^\infty e^{-(\lambda_A + \lambda_B) y}\,dy = 1 - \frac{\lambda_B}{\lambda_A + \lambda_B} = \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}$$

Radi se modifikovanoj geometrijskoj raspodjeli parametra: $\dfrac{\lambda_B}{\lambda_B + \lambda_A}$

$$q = 1 - p = \frac{\lambda_B}{\lambda_B + \lambda_A}$$

$$P(Z = n) = (1 - q) q^{n-1} = \frac{\lambda_A}{\lambda_B + \lambda_A} \left(\frac{\lambda_B}{\lambda_B + \lambda_A}\right)^{n-1}, \quad 0 < q < 1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Primjer 3

Neka se dolazni saobraćaj karakteriše Pareto raspodjelom. U Pareto raspodjeli *a* je parametar oblika koji je pozitivan realan broj, dok je *b* minimalna vrijednost slučajne promjenljive.

Za vrijednosti a=1.4, 1.5 , 1.6, i b=2, odrediti srednju vrijednost slučajne promjenljive?

Kako utiču parametri raspodjele na srednju vrijednost?

Odrediti Laplasovu transformaciju Pareto raspodjele.

Primjer 3 - Rešenje

$$f_x\left(x\right)=\frac{\alpha b^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}, \quad x\geq b$$

$$E(X)=\int_b^{\infty} x f_{\mathrm{x}}\left(x\right)dx=\int_b^{\infty} x\frac{\alpha b^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}dx=\alpha b^{\alpha}\int_b^{\infty} x^{-\alpha}dx=\frac{\alpha b}{\alpha-1}$$

$$\alpha=1.4,\ \mathrm{b=2},\ E(X)=\frac{1.4*2}{0.4}=7$$

$$\alpha=1.5,\ \mathrm{b=2},\ E(X)=\frac{1.5*2}{0.5}=6$$

$$\alpha=1.6,\ \mathrm{b=2},\ E(X)=\frac{1.6*2}{0.6}=5.33$$

$$X\left(s\right)=\int_b^{\infty}\frac{\alpha b^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}e^{-sx}dx=\alpha b^{\alpha}\int_b^{\infty}\frac{e^{-sx}}{x^{\alpha+1}}dx$$

$$X\left(s\right)=\alpha b^{\alpha}s^{\alpha}\Gamma\left(-\alpha,sb\right),\ \ gdje\ \ \ je\ \Gamma\left(-\alpha,sb\right)=\int_{sb}^{\infty}\frac{e^{-t}}{t^{\alpha+1}}dt$$

Primjer 4

Odrediti raspodjelu sume N slučajnih promjenljivih koje imaju identičnu modifikovanu geometrijsku raspodjelu. Broj slučajnih promjenljivih N takođe ima modifikovanu geometrijsku raspodjelu.

$$P(X=k)=q^{k-1}(1-q) \quad k=1,\ 2,3\ldots$$

$$X(z)=\sum_{k=1}^{\infty} z^k P(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty} z^k(1-q)q^{k-1}=z(1-q)\sum_{k=1}^{\infty}(zq)^{k-1}=\frac{z(1-q)}{1-zq}$$

Modifikovana geometrijska

$$P(N=j)=p^{j-1}(1-p) \quad j=1,\ 2,3\ldots \qquad \Rightarrow \quad N(z)=\frac{z(1-p)}{1-zp}$$

$$Y=\sum_{i=1}^{N} X_i$$

$$Y(z)=\prod_{i=1}^{N} X_i(z)$$

$$Y(z)=\sum_{j}\prod_{i=1}^{j} X_i(z)P(N=j)=\sum_{j}\left[X(z)\right]^{j}P(N=j)=N(X(z))$$

$$Y(z)=\frac{\dfrac{z(1-q)}{1-zq}(1-p)}{1-\dfrac{z(1-q)}{1-zq}p}=\frac{z(1-q)(1-q)}{1-z[q+p-pq]}=\frac{z(1-p)(1-q)}{1-z[1-(1-q)(1-p)]}$$

I dalje modifikovana geometrijska raspodjela parametra (1-q)(1-p)

Primjer 5

Neka je trajanje slota u vremenskom multipleksu T_{slot}.

Ukoliko 6 korisnika ravnopravno dijeli resurse koliko je potrebno vremena korisniku za prenos 10 paketa (jedan paket se prenosi u jednom slotu)?

Ako je u slučaju statističkog multipleksa vjerovatnoća da je slot zauzet q, koliko je potrebno vremena korisniku za prenos 10 paketa. Kada korisnik dobije prazan slot za slanje paketa, preostale pakete šalje bez čekanja. Kako vjerovatnoća q utiče na rezultat?

Primjer 5 - Rešenje

U vremenskom multipleksu $T_{frame} = 6T_{slot}$.

$$T = 9 \cdot 6T_{slot} + iT_{slot} = (54 + i)T_{slot}$$

i - redni broj slota datog korisnika

U slučaju statističkog multipleksa vjerovatnoća da će nakon k neuspješnih pokušaja slot biti slobodan je:

$$P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k (1-q)$$

$$E(X) = \frac{q}{1-q}$$

$$T = \frac{q}{1-q} T_{slot} + 10T_{slot} = \left(\frac{q}{1-q} + 10\right) T_{slot}$$

Primjer 5 - Rešenje

$$T = \left(\frac{q}{1-q} + 10 \right) T_{slot}$$

$$q = 0.1, \quad T = \left(\frac{0.1}{0.9} + 10 \right) T_{slot} = 10.111 T_{slot}$$

$$p = 0.5, \quad T = \left(\frac{0.5}{0.5} + 10 \right) T_{slot} = 11 T_{slot}$$

$$q = 0.8, \quad T = \left(\frac{0.8}{0.2} + 10 \right) T_{slot} = 14 T_{slot}$$

$$q = 0.95, \quad T = \left(\frac{0.95}{0.05} + 10 \right) T_{slot} = 29 T_{slot}$$

$$q = 0.97, \quad T = \left(\frac{0.97}{0.03} + 10 \right) T_{slot} = 42.3 T_{slot}$$

Primjer 6

Ukupno 8 korisnika dijeli resurse. Ako je u slučaju statističkog multipleksa vjerovatnoća da je slot zauzet q, koliko je potrebno vremena korisniku za prenos 100 paketa. Kada korisnik dobije prazan slot za slanje paketa, šalje najviše 15 paketa, a zatim ponovo čeka prazan slot.

Koliko u vremenskom multipleksu iznosi dato vrijeme?
Kako vjerovatnoća q utiče na rezultat?

Primjer 6 - Rešenje

U vremenskom multipleksu $T_{frame} = 8T_{slot}$.

$$T = 99 \cdot 8T_{slot} + iT_{slot} = (792 + i)T_{slot}$$

i - redni broj slota datog korisnika.
U slučaju statističkog multipleksa vjerovatnoća da će nakon *k* neuspješnih pokušaja slot biti slobodan je:

$$P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} p^k (1-p)$$

$$E(X) = \frac{q}{1-q}$$

$$T = 6\left(\frac{q}{1-q}T_{slot} + 15T_{slot}\right) + \frac{q}{1-q}T_{slot} + 10T_{slot} = 7\left(\frac{q}{1-q} + 15\right)T_{slot} - 5T_{slot}$$

Primjer 6 - Rešenje

$$T = 7\left(\frac{q}{1-q} + 15\right)T_{slot} - 5T_{slot}$$

$$q = 0.1, \quad T = 7\left(\frac{0.1}{0.9} + 15\right)T_{slot} - 5T_{slot} = 100.7T_{slot}$$

$$q = 0.5, \quad T = 7\left(\frac{0.5}{0.5} + 15\right)T_{slot} - 5T_{slot} = 107T_{slot}$$

$$q = 0.8, \quad T = 7\left(\frac{0.8}{0.2} + 15\right)T_{slot} - 5T_{slot} = 128T_{slot}$$

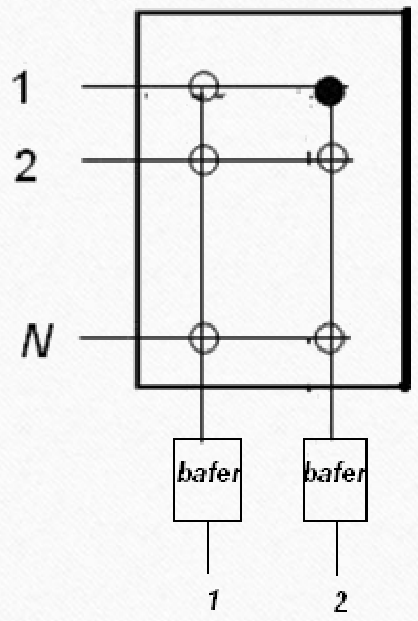
$$q = 0.95, \quad T = 7\left(\frac{0.95}{0.05} + 15\right)T_{slot} - 5T_{slot} = 233T_{slot}$$

$$q = 0.97, \quad T = 7\left(\frac{0.97}{0.03} + 15\right)T_{slot} - 5T_{slot} = 326.3T_{slot}$$

Primjer 7

Na prvi ulaz krosbar prostornog komutatora sa 2 izlaza dolazi saobraćaj sa Poasonovom raspodjelom, srednje dolazne brzine λ.

Vjerovatnoća da se sa prvog ulaza paketi prosleđuju na prvi izlaz je p. Baferi na izlaznim portovima su beskonačne veličine. Modelovati saobraćaje na ulazima izlaznih bafera.



Primjer 7 - Rešenje

Za prvi izlaz važi:

$$P(X_1 = k) = \frac{(p\lambda t)^k}{k!} e^{-p\lambda t}$$

$$X_1(z) = e^{p\lambda t(z-1)}$$

za drugi izlaz važi:

$$P(X_2 = k) = \frac{((1-p)\lambda t)^k}{k!} e^{-(1-p)\lambda t}$$

$$X_2(z) = e^{(1-p)\lambda t(z-1)}$$

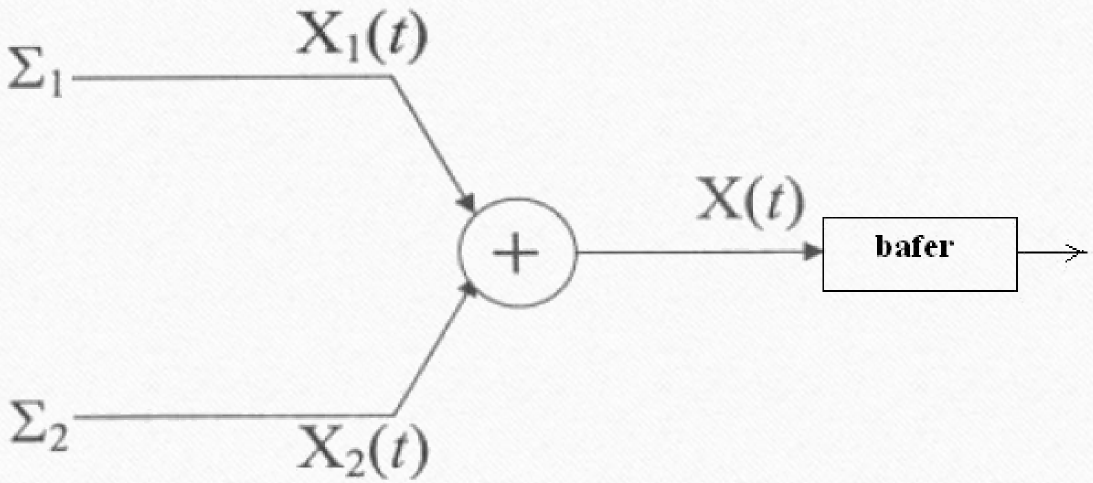
Primjer 8

Posmatra se 2x2 komutator sa baferima na izlazu. Neka na oba ulaza komutatotra dolazi saobraćaj sa Poasonovom raspodjelom, srednjih dolaznih brzina λ_1 i λ_2 .

Vjerovatnoća da se prvog ulaza paketi prosleđuju na prvi izlaz je p_1, dok je vjerovatnoća da se paketi sa drugog ulaza prosleđuju na prvi izlaz p_2. U beskonačni izlazni bafer se tokom jednog slota mogu prihvatiti do dva paketa sa različitih ulaza. Modelovati saobraćaje na ulazima izlaznih bafera.

Primjer 8 - Rešenje

Dolasci dva procesa se sumiraju i dobija se novi proces.
Sa X1(t) i X2(t) označimo broj paketa koji se prosleđuju ka datom izlazu u intervalu vremena *t* sa prvog odnosno drugog ulaza. Treba da opišemo proces X(t)= X1(t) + X2(t).



Primjer 8 - Rešenje

Kako su X1(t) i X2(t) nezavisni procesi važi, za prvi izlaz važi:

$$X(z) = X_1(z)X_2(z) = e^{p_1\lambda_1 t(z-1)}e^{p_2\lambda_2 t(z-1)} =$$

$$= e^{\left(p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2\right)t(z-1)}$$

za drugi izlaz važi:

$$X(z) = X_1(z)X_2(z) = e^{(1-p_1)\lambda_1 t(z-1)}e^{(1-p_2)\lambda_2 t(z-1)} =$$

$$= e^{\left((1-p_1)\lambda_1 + (1-p_2)\lambda_2\right)t(z-1)}$$

Primjer 9

Paketi dolaze na interfejs ruter u skladu sa Poasonovim procesom srednje dolazne brzine λ. Dolazni paketi se zatim komutiraju na dva izlaza. Paket se šalje na prvi izlaz sa vjerovatnoćom p, a na drugi izlaz sa vjerovatnoćom 1-p. Odrediti raspodjelu slučajne promjenjive koja predstavlja vrijeme između uzastopnih dolazaka paketa na prvom izlaznom interfejsu.

Primjer 9 - Rešenje

Neka se dolazni proces opisuje sa vremenom između uzastopnih dolazaka t_a, a process na prvom izlazu sa vremenom između dolazaka t_{a1}. Potrebni na naći vezu između t_{a1} i t_a.

Slučajna promjenjiva t_a ima eksponencijalnu raspodjelu srednje vrijednosti $\frac{1}{\lambda}$ i Laplasovu transformaciju funkcije gustine raspodjele $T_a(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s}$.

Pretpostavimo da u trenutku t=0 dolazni proces zatiče komutato u poziciji 1, tj. dolazni proces je adresiran na izlaz 1 Prema tome, t_{a1} predstavlja naredni trenutak kada će dolazni proces biti adresiran na izlaz 1. Odredimo statistiku t_{a1} brojem dolazaka *k* koje je generisao Poasonov slučajni proces tako da je samo poslednji dolazak adresiran na izlaz 1:

- Sa vjerovatnoćom p, *k*=1, $t_{a1}= t_a$
- Sa vjerovatnoćom $p(1-p)$, *k=2*, t_{a1} je suma dvije nezavisne slučajne promjenjive raspodjele kao t_a
- Sa vjerovatnoćom $p(1-p)^2$, *k=3*, t_{a1} je suma tri nezavisne slučajne promjenjive raspodjele kao t_a

Primjer 9 - Rešenje

Korišćenjem osobina Laplasove transformacije dobijamo:

$$T_{a1}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} T_a(s)^k \, p(1-p)^{k-1} = \frac{pT_a(s)}{1 - T_a(s)(1-p)}$$

Lako je zapaziti da t_{a1} predstavlja sumu k eksponencijalnih slučajnih promjenjivih t_a, pri čemu k ima modifikovanu geometrijsku raspodjelu.

Konačno:

$$T_{a1}(s) = \frac{p\dfrac{\lambda}{\lambda+s}}{1-(1-p)\dfrac{\lambda}{\lambda+s}} = \frac{\lambda p}{\lambda p + s}$$

Eksponencijalna raspodjela parametra $\boldsymbol{p\lambda}$