Uvod u teoriju telekomunikacionog saobraćaja

Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

Diskretne
- Geometrijska raspodjela
- Poasonova raspodjela
- Binomna raspodjela…

Kontinualne
- Eksponencijalna raspodjela
- Uniformna raspodjela
- Gausova raspodjela
- Pareto raspodjela…

Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

- Geometrijska raspodjela

$$\mathrm{Prob}\{X = k\} = (1-q)q^k, \quad 0 < q < 1, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

q je bezdimenziona veličina

PRIMJER:

Pretpostavimo da za slot vemenskog multipleksa konkuriše više korisnika. Neka je vjerovatnoća da je slot na raspolaganju posmatranom izvoru 1-q. Slot se dodjeljuje drugim izvorima sa vjerovatnoćom q. Slučajna promjenljiva X predstavlja broj neuspjelih pokušaja zauzimanja kanala do prvog uspješnog pokušaja zauzimanja kanala.

Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

- Modifikovana geometrijska raspodjela:

$$\mathrm{Prob}\{X = k\} = (1-q)q^{k-1}, \quad 0 < q < 1, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

PRIMJER:

Paket se prenosi po linku. Vjerovatnoća neuspješnog prenosa je q. Vjerovatnoća uspješnog prenosa je 1-q. Slučajna promjenljiva X predstavlja broj pokušaja do uspješnog prenosa.

Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

Osobine geometrijske raspodjele

- Uslov normalizovanosti:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Prob}\{X = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} (1-q)q^k = (1-q) \times \sum_{k=0}^{\infty} q^k = (1-q) \times \frac{1}{1-q} = 1$$

- Srednja vrijednost:

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \times \mathrm{Prob}\{X = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-q)q^k = (1-q)q \times \sum_{k=0}^{\infty} kq^{k-1} =$$

$$= (1-q)q \times \frac{d}{dq} \sum_{k=0}^{\infty} q^k = (1-q)q \times \frac{d}{dq} \frac{1}{1-q} = \frac{(1-q)q}{(1-q)^2} = \frac{q}{1-q}$$

Ovo je moguće ako je red konvergentan

Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

…Osobine geometrijske raspodjele:

- Srednja kvadratna vrijednost:

$$E\left[X^2\right] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \times \text{Prob}\{X = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 (1-q) q^k = (1-q) q \times \sum_{k=0}^{\infty} k\left(k q^{k-1}\right) = (1-q) q \times \frac{d}{dq} \sum_{k=0}^{\infty} k q^k$$

$$E\left[X^2\right] = (1-q) q \times \frac{d}{dq} \frac{q}{(1-q)^2} = (1-q) q \times \frac{1+q}{(1-q)^3} = \frac{(1+q) q}{(1-q)^2}$$

Zamjena sume i izvoda

- Varijansa:

$$\text{Var}[X] = E\left[X^2\right] - \{E[X]\}^2 = \frac{(1+q) q}{(1-q)^2} - \frac{q^2}{(1-q)^2} = \frac{q}{(1-q)^2}$$

PRIMJER: Osobine modifikovane geometrijske raspodjele.

Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

- Poasonova raspodjela

$$\mathrm{Prob}\{X = k\} = \frac{\rho^k}{k!}e^{-\rho}, \quad \rho > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

ρ je bezdimenziona veličina (intenzitet saobraćaja)

PRIMJER:

Pretpostavimo da brojimo telefonske pozive koji tokom posmatranog vremena dolaze na telefonsku centralu. Ako je taj broj izbrojanih poziva k, a vrijeme t, onda se radi o Poasonovoj raspodjeli (eksperimentalni rezultat). ρ je proporcionalna vremenu t i srednjoj dolaznoj brzini poziva λ.

$$\rho = \lambda t$$

Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

Osobine Poasonove raspodjele:

- Uslov normalizovanosti:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Prob}\{X = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho} = e^{-\rho} \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} = e^{-\rho} \times e^{\rho} = 1$$

- Srednja vrijednost:

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \times \mathrm{Prob}\{X = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho} = e^{-\rho} \times \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\rho^k}{k!} =$$

$$= \rho e^{-\rho} \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^{k-1}}{(k-1)!} = \rho e^{-\rho} \times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\rho^j}{j!} = \rho e^{-\rho} \times e^{\rho} = \rho$$

Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

…Osobine Poasonove raspodjele

- Srednja kvadratna vrijednost:

$$E\left[X^2\right] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \times \mathrm{Prob}\{X = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho} = e^{-\rho} \times \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\rho^k}{k!} =$$

$$= \rho e^{-\rho} \times \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\rho^{k-1}}{(k-1)!} = \rho e^{-\rho} \times \frac{d}{d\rho}\left[\rho \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^{k-1}}{(k-1)!}\right] =$$

$$= \rho e^{-\rho} \times \frac{d}{d\rho}\left[\rho \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\rho^j}{j!}\right] = \rho e^{-\rho} \times \frac{d}{d\rho}[\rho e^{\rho}] = \rho e^{-\rho} \times [e^{\rho} + \rho e^{\rho}] = \rho(1+\rho)$$

- Varijansa:

$$\mathrm{Var}[X] = E\left[X^2\right] - \{E[X]\}^2 = \rho(1+\rho) - \rho^2 = \rho \longrightarrow$$

E[x]=Var[X]

Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

- Binomna raspodjela

$$\mathrm{Prob}\{X = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad 0 < p < 1, k = 0, 1, 2, \ldots n$$

p je bezdimenziona veličina

PRIMJER:

Pretpostavimo prenos poruke (koja sadrži n paketa) preko kanala koji sa vjerovatnoćom p unosi grešku tokom prenosa paketa. Slučajna promjenljiva koja predstavlja broj pogrešno prenesenih paketa ima binomnu raspodjelu.

Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

Osobine binomne raspodjele:

- Uslov normalizovanosti:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Prob}\{X=k\} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = [p+1-p]^n = 1$$

Njutnova binomna formula

- Srednja vrijednost:

$$E[X] = \sum_{k=0}^{n} k \times \mathrm{Prob}\{X=k\} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} =$$

$$= np \times \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)![n-1-(k-1)]} p^{k-1} (1-p)^{n-1-(k-1)} =$$

$$= np \times \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{j![n-1-j]} p^j \mid (1-p)^{n-1-j} = np \times [p+1-p]^{n-1} =$$

$$= np$$

Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

…Osobine binomne raspodjele:

- Srednja kvadratna vrijednost:

$$E[X^2] = \sum_{k=0}^{n} k^2 \times \mathrm{Prob}\{X = k\} = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$$
$$= np + np^2(n-1)$$

- Varijansa:

$$\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - \{E[X]\}^2 = np + np^2(n-1) - (np)^2 = np - np^2$$

Slučajne promjenljive u telekomunikacijama

- Veza binomne i Poasonove raspodjele:

Poasonova raspodjela je granični slučaj binomne raspodjele kada broj pokušaja n teži beskonačnosti, a vjerovatnoća dogadjaja p teži 0, pri čemu njihov proizvod ostaje konstantan i jednak ρ.

$$\boxed{N! \approx \sqrt{2\pi} N^N e^{-N}}$$

Stirlingova formula

$$p(k)=\binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} = \frac{N!}{k!(N-k)!} p^k (1-p)^{N-k} =$$

$$= \frac{N^N e^{-N}}{k!(N-k)^{N-k} e^{-(N-k)}} \left(\frac{\rho}{N}\right)^k \left(1-\frac{\rho}{N}\right)^{N-k} = \frac{\rho^k}{k!}\left(\frac{N}{N-k}\right)^{N-k} e^{-k} \left(1-\frac{\rho}{N}\right)^{N-k} =$$

$$= \frac{\rho^k}{k!} e^{-k} \left(\left(1-\frac{k}{k-N}\right)^{\frac{k-N}{k}}\right)^{-k} \left(\left(1-\frac{\rho}{N}\right)^{\frac{N}{\rho}}\right)^{\frac{\rho}{N}(N-k)} = \frac{\rho^k}{k!} e^{-k} e^{k} e^{-\rho} = \frac{\rho^k}{k!} e^{-\rho}$$