1 Zadatak 1.

Odrediti korak odabiranja za signal:

a) $x(t) = \cos 200\pi t \qquad y(t) = x^2(t)$

tako da bude zadovoljena teorema o odabiranju.

Rješenje:

Spektar sinusoide predstavljaju pikovi na učestanostima:

$$f_{1,2} = \frac{200\pi}{2\pi} = \pm 100Hz$$

Zaključujemo da je maksimalna učestanost signala zadatog pod a):

$$fx_{\max} = 100Hz$$

Da bi bila zadovoljena teorema o odabiranju, potrebno je da bude zadovoljen uslov:

$$Tx_{\max} = \frac{1}{2fx_{\max}} = \frac{1}{2 \cdot 100Hz} = 5ms.$$

b)

$$y(t) = x^2(t) = \cos^2 200\pi t = \frac{1 - \cos 400\pi t}{2}$$

Prva komponenta je konstanta, dok je maksimalna učestanost druge komponente, i time i cijelog signala:

$$fy_{\max} = \frac{400\pi}{2\pi} = 200Hz$$

Korak odabiranja mora biti takava da važi:

$$Ty_{\max} = \frac{1}{2fy_{\max}} = \frac{1}{200Hz} = 2.5ms.$$

2 Zadatak 2.

Ako je $X(e^{j\omega})$ Fourier-ova transformacija signala $x(n)$ naći Fourier-ovu transformaciju signala $y(n) = (-1)^n x(n)$.

Rješenje:

Pođimo od definicije za Fourier-ovu transformaciju diskretnog signala $x(n)$:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}.$$

S druge strane je:

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x(n) e^{-j\omega n}$$

Pokušavamo zadnju formulu povezati sa Fourier-ovom transformacijom signala $x(n)$. Znamo da je:

$$(-1)^n = e^{\pm j\pi n},$$

pa pišemo:

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{\pm j\pi n}e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\omega\pm\pi)n} = X(e^{j(\omega\pm\pi)})$$

Dakle, Fourier-ova transformacija signala $y(n)$ je jedaka Fourier-ovoj transformaciji signala $x(n)$ pomjerenoj po frekvenciji za $\pm\pi$. Obzirom da je u pitanju Fourier-ova transformacija diskretnog signala, svejedno je da li ćemo uzeti π ili $-\pi$.

U slučaju da nam je poznata FT signala $x(n)$ samo u opsegu $-\pi \leq \omega \leq \pi$, uzeli bi da je:

$$Y(e^{j\omega}) = \begin{cases} X(e^{j(\omega-\pi)}) \text{ za } 0 \leq \omega \leq \pi \\ X(e^{j(\omega+\pi)}) \text{ za } -\pi \leq \omega \leq 0 \end{cases}.$$

3 Zadatak 3.

Diskretni signal $x(n)$ dobijen je odabiranjem analognog signala $x_a(t)$ sa korakom odabiranja $T = 0.1$. Poznato je da je spektar analognog signala ograničen na učestanosti manje od $5Hz$.

a) Provjeriti da li se analogni signal $x_a(t)$ može rekonstruisati na osnovu dobijenih odbiraka;

b) Ako je $X(e^{j\omega}) = 1+\cos(\omega)$, odrediti $X(j\omega_a)$ za $\omega_a = 5\pi rad/s$. Skicirajte spektar analognog signala.

Rješenje:

a)

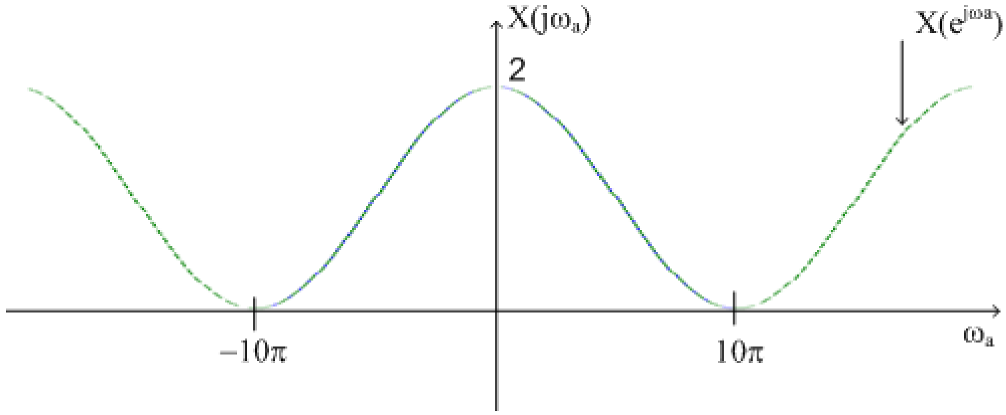
$$T = T_{\max} = \frac{1}{2f_{\max}} = \frac{1}{2\cdot 5Hz} = 0.1s$$

b) $X(j\omega_a) =?$, znamo da je $\omega = \omega_a \cdot T$, pa je:

$$X(j\omega_a) = X(e^{j\omega})|_{\omega=\omega_a\cdot T} = 1+\cos(\omega_a\cdot T) = 1+\cos(5\pi rad/s\cdot 0.1s) = 1+\cos(\pi/2) = 1$$

A traženi spektar analognog signala je prikazan na slici 1 punom linijom, dio prikazan u intervalu $-\pi \leq \omega \leq \pi$.

Spektar diskretnog signala dobijenog odabiranjem analognog sa korakom odabiranja $T = 0.1$ je periodično produžen sa periodom $\frac{2\pi}{T} = 20\pi$ i prikazan je isprekidanim linijama na slici 1 (naravno uključuje i dio u intervalu $-\pi \leq \omega \leq \pi$).



Slika 1

4 Zadatak 4.

Dokazati Parseval-ovu relaciju za slučaj periodičnih diskretnih signala:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x_p(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X_p(k)|^2$$

Rješenje:

Inverzna DFT (IDFT) predstavlja način dobijanja originalnog signala $x(n)$ na osnovu njegove DFT i data je izrazom:

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

Izraz za IDFT ćemo iskoristiti prilikom dokazivanja Parseval-ove relacije. Pođimo od lijeve strane jednakosti i na osnovu formule za IDFT pokušajmo dokazati Parseval-ovu jednakost.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N-1} |x_p(n)|^2 &= \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) x_p^*(n) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{k_1=0}^{N-1} X_p(k_1) e^{j\frac{2\pi}{N}nk_1} \left(\frac{1}{N} \sum_{k_2=0}^{N-1} X_p(k_2) e^{j\frac{2\pi}{N}nk_2} \right)^* = \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{k_1=0}^{N-1} \sum_{k_2=0}^{N-1} X_p(k_1) X_p^*(k_2) \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}n(k_1-k_2)}\end{aligned}$$

$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}n(k_1-k_2)}$ je suma geometrijskog reda, pa na osnovu slične sume sa Vježbi

4 zaključujemo da je:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}n(k_1-k_2)} = \begin{cases} N, \text{ za } k_1 = k_2 \\ 0, \text{ za } k_1 \neq k_2 \end{cases}$$

Imajući ovo u vidu, dvostruka suma po k_1 i k_2 se svodi na jednu sumu, recimo po k_1 pa će važiti:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x_p(n)|^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{k_1=0}^{N-1} X_p(k_1) X_p^*(k_1) N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X_p(k)|^2$$

čime je relacija dokazana.