DIGITALNA OBRADA SIGNALA

-zadaci za vježbu-

Zadatak 1.

Izračunati energiju signala $x(n) = 2^{-n}u(n)$

Rješenje:

$$\begin{aligned} E &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|2^{-n}u(n)\right|^2 = \qquad (1) \\ &= \sum_{n=-0}^{\infty} \left(2^{-n}\right)^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-2n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 4^{-n} \end{aligned}$$

Da bi izračunali energiju signala koristimo činjenicu da gornja suma zapravo predstavlja geometrijski red. Suma geometrijskog reda se dobija pomoću formule:

$$S = a_0 \frac{1-q^N}{1-q} \qquad (2)$$

gdje je a_0 prvi član reda, N broj elemenata reda, q koeficient susjednih članova (vrijednost kojom je potrebno pomnožiti i-ti element reda da bi se dobio (i+1)-vi element, $a_{i+1} = qa_i$).

Primjenjujući ovo na red koji mi imamo (1), biće:

$$E = 1\frac{1-\left(4^{-1}\right)^{\infty}}{1-4^{-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

jer je za prethodni geometrijski red bilo: $a_0 = 1$, $q = 4^{-1}$ i $\left(4^{-1}\right)^{\infty} \to 0$.

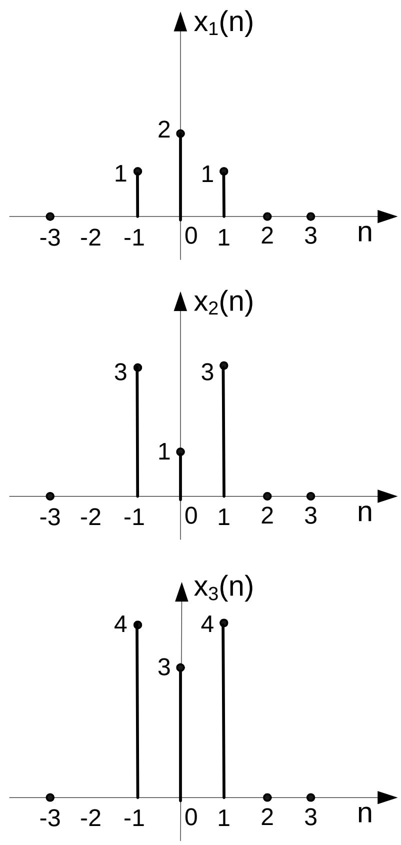
Zadatak 2.

Izračunati energiju signala $x_1(n)$, $x_2(n)$ *i* $x_3(n) = x_1(n)+x_2(n)$. *Signali* $x_1(n)$, $x_2(n)$ *i* $x_3(n)$ *su dati na slici 1. Prokomentarisati.*

Rješenje:

Energiju prvog signala lako dobijamo polazeći od definicije i posmatrajući grafički prikaz tog signala:

$$E_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_1(n)|^2 = 1+4+1 = 6$$



Slika 1

Na isti način dobijamo:

$$E_2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_2(n)|^2 = 9 + 1 + 9 = 19$$

odnosno:

$$E_3 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_3(n)|^2 = 16 + 9 + 16 = 41$$

Primjetite da se energija signala $x_3(n)$ koji je dobijen sabiranjem signala $x_1(n)$ i $x_2(n)$, ne može odrediti prostim sabiranjem energija signala od kojih je sastavljen ($E_3 \neq E_1 + E_2$).

Zadatak 3.

Koliki korak odabiranja T bi trebalo uzeti pa da se signal $x_a(t)$,

$$x_a(t) = sin(\omega_{a1}t) + \frac{1}{2}sin(\omega_{a2}t) + 2cos(\omega_{a3}t + \theta_3),$$

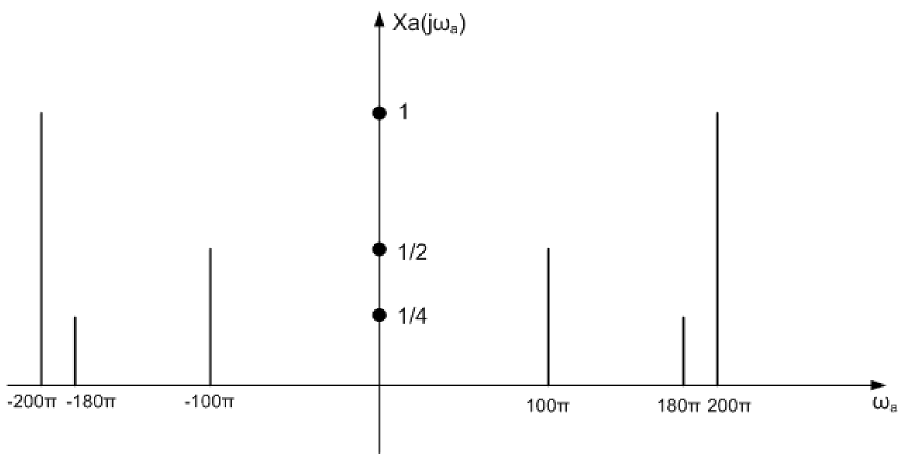
gdje je $\omega_{a1} = 100\pi[1/s]$, $\omega_{a2} = 180\pi[1/s]$, $\omega_{a3} = 200\pi[1/s]$ i $\theta_3 = \pi/4$, može rekonstruisati na osnovu odbiraka bez izobličenja.

Rješenje:

Prilikom izbora koraka odabiranja signala $x_a(t)$ potrebno je voditi računa da bude zadovoljena teorema o odabiranju. Po teoremi o odabiranju korak kojim se može izvršiti odabiranje mora zadovoljavati uslov $T_o \leq 1/(2f_{max})$. Signal $x_a(t)$ se sastoji od tri sinusoide i na učestanostima:

$$f_{a1} = 50\,\mathrm{Hz},\ f_{a2} = 90\,\mathrm{Hz},\ f_{a3} = 100\,\mathrm{Hz}.$$

Na slici dolje je dat spektar signala $x(t)$. Prilikom crtanja spektra smo koristili činjenicu da je Fourier-ova transformacija signala $x(t) = Asin(\omega_0 t)$, sastavljena od dvije komponente na učestanostima $\pm\omega_0$, a čije su amplitude proporcionalne sa $\pm 1/2Aj$. Na slici je crtan spektar signala, apsolutna vrijednost Fourier-ove transformacije. Uzeta je aproksimacija da je amplituda jednaka $1/2A$.



Na osnovu gornje slike se zaključuje da je maksimalna učestanost $f_{max} = 100\,\mathrm{Hz}$, odnosno korak odabiranja mora biti

$$T_0 \leq 1/2f_{max} = 1/200.$$

Zadatak 4.

Ako se zna da je frekvencija odabiranja signala prilikom zapisa na audio CD-u $f_0 = 44.1\,\mathrm{K\,Hz}$, kolika je najveća frekvencija audio signala koji se može zapisati na CD-u bez izobličenja?

Rješenje:

Po teoremi o odabiranju korak kojim se može izvršiti odabiranje mora zadovoljavati uslov

$$T_o \leq 1/(2f_{max}),$$

analogno, za učestanost odabiranja važi:

$$f_0 = \frac{1}{2T_o} \geq 2f_{max}.$$

Dalje će biti:

$$f_{max} \leq \frac{f_0}{2} = \frac{44.1\,\mathrm{K\,Hz}}{2} = 22.05\,\mathrm{K\,Hz}.$$

Dobijena vrijednost za maksimalnu učestanost odgovara maksimalnoj učestanosti muzike.

Zadatak 5.

Diskretni signal $x(n)$ dobijen je odabiranjem analognog signala $x_a(t)$ sa korakom odabiranja $T = 0.1$. Kolika je najveća učestanost koju može imati signal $x_a(t)$ da bi mogao rekonstruisati iz svojh odbiraka bez izobličenja.

Rješenje:

Da bi se signal mogao rekonstruisati iz odbiraka bez izobličenja potrebno je da korak odabiranja zadovoljava teoremu o odabiranju, odnosno da je:

$$T \leq \frac{1}{2f_{max}}.$$

Mi imamo dat korak odabiranja pa na osnovu prethodne jednakosti zaključujemo da maksimalna frekvencija u signalu koji se odabira sa ovim korakom mora da zadovoljava:

$$f_{max} \leq \frac{1}{2T} = \frac{1}{2 \cdot 0.1} = 5\,\mathrm{Hz} \tag{3}$$

Dakle, mora biti $f_{max} \leq 5\,\mathrm{Hz}$. Traži se maksimalna vrijednost koju može imati frekvencija signala, a to će biti:

$$f_{max} = 5\,\mathrm{Hz}.$$

Zadatak 6.

Analogni signal $x(t) = sin(\pi t)$ odabiran je sa korakom odabiranja $T = 1.25$. Provjeriti da li je zadovoljen uslov teoreme o odabiranju, i izvršiti rekonstrukciju analognog signala iz odbiraka.

Rješenje:

Maksimalna frekvencija prisutna u signalu $x(t)$ je $\omega_{max} = \pi$ odnosno:

$$f_{max} = \frac{\omega_{max}}{2\pi} = \frac{\pi}{2\pi} = 0.5Hz,$$

tako da je, prema teoremi o odabiranju, minimalni korak odabiranja:

$$T_{min} = \frac{1}{2f_{max}} = 1.$$

Zaključujemo da pri odabiranju sa korakom $T = 1.25$ uslovi teoreme o odabiranju nisu ispunjeni, tako da rekonstrukcija signala neće biti moguća.

I način

Odbirci se dobiju uvrštavanjem u $x(t)$ $t = nT$, pa će biti $x(nT) = sin(1.25n\pi)$ a signal rekonstruisan iz odbiraka:

$$\begin{aligned} x_a(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\frac{sin(\frac{\pi}{T}(t-nT))}{\frac{\pi}{T}(t-nT)} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} sin(1.25n\pi)\frac{sin(\frac{\pi}{T}(t-nT))}{\frac{\pi}{T}(t-nT)} \end{aligned} \tag{4}$$

Prilikom rekonstrukcije signala uzima se samo dio spektra između $-\pi$ i π, osnovna perioda Fourier-ove transformacije diskretnog signala, pa prethodnu jednakost pišemo kao:

$$\begin{aligned} x_a(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} sin(1.25n\pi - 2n\pi)\frac{sin(\frac{\pi}{T}(t-nT))}{\frac{\pi}{T}(t-nT)} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} sin(-0.75n\pi)\frac{sin(\frac{\pi}{T}(t-nT))}{\frac{\pi}{T}T(t-nT)} \end{aligned} \tag{5}$$

Dalje će:

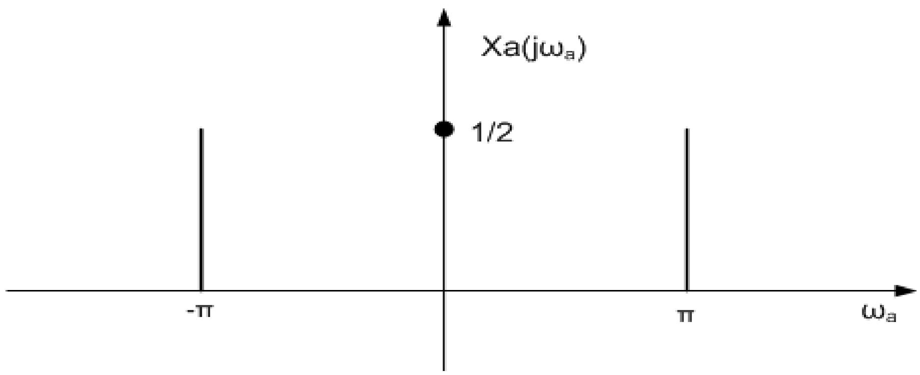
$$\frac{sin(\frac{\pi}{T}(t-nT))}{\frac{\pi}{T}(t-nT)}$$

biti različito od nule samo za $t - nT = 0$, odnosno $t = nT$ i cijela suma iz (5) se svodi samo na jedan član, odnosno na n koje je jednako $n = t/T$ i biće:

$$x_a(t) = -sin(0.75\frac{t}{T}\pi) = -sin(0.75\frac{t}{1.25}\pi) = -sin(0.6t\pi)$$

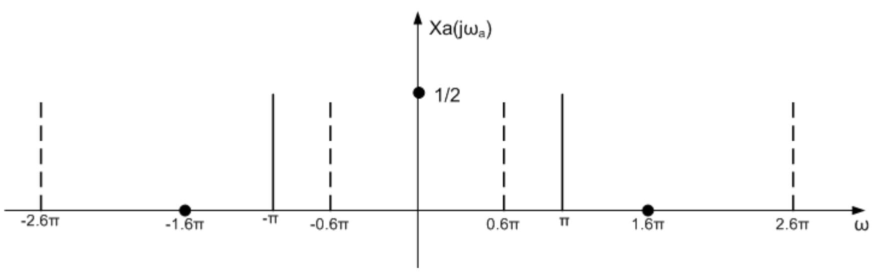
II način

Koji će se signal dobiti rekonstrukcijom iz odbiraka može se zaključiti i posmatranjem spektra signala. Spektar analognog signala koji se odabira je dat na narednoj slici:

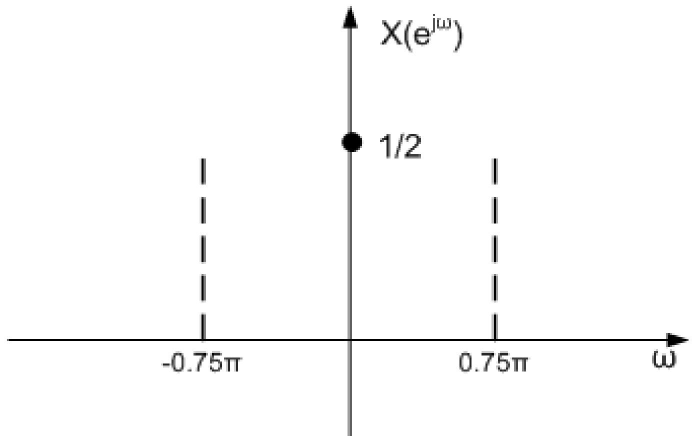


Prilikom crtanja spektra smo koristili činjenicu da je Fourier-ova transformacija signala $x(t) = Asin(\omega_0 t)$, sastavljena od dvije komponente na učestanostima $\pm\omega_0$, a čije su amplitude proporcionalne sa $\pm 1/2Aj$. Na prethodnoj slici je crtan spektar signala, apsolutna vrijednost Fourier-ove transformacije. Uzeta je aproksimacija da je amplituda jednaka $1/2A$.

Odabiranje signala je izvršeno sa periodom odabiranja $T = 1.25[s]$. Odabiranjem kontinualnog signala $x_a(t)$ periodično se produžava njegov spektar sa periodom produženja $\omega_p = 2\pi/T$. U našem slučaju je $\omega_p = 2\pi/T = 2\pi/1.25 = 1.6\pi$. Pa će nakon odabiranja spektar biti:



Na prethodnoj slici su isprekidanom linijom predstavljene komponente spektra koje su dobijene periodičnim produžavanjem spektra analognog signala koji se odabira i čiji je spektar predstavljen punom linijom. Zamjenom $\omega = \omega_a T$ dobijaju se diskretne učestanosti i odgovarajuća Fourier-ova transformacija diskretnog signala od $-\pi$ do π. Crta se samo jedna perioda jer će Fourier-ova transformacija diskretnog signala biti periodična sa periodom 2π.



Na osnovu prethodne slike i signala $x_a(t)$ se zaključuje da će se na izlazu sistema pojaviti sinusoidalna komponenta i da će signal $y_a(t)$ biti oblika:

$$y_a(t) = -sin(0.75\pi n),$$

znamo da je $t = nT$, odnosno $n = t/T$, pa će biti:

$$y_a(t) = -sin(0.75 \cdot 1.25\pi t) = -sin(0.6\pi t)$$

Dakle, ukoliko se uzme korak odabiranja $T = 1.25$, neće biti moguće rekonstruisati originalni signal na osnovu odbiraka signala $y(n)$.

Zadatak 7.

Odziv linearnog, vremenski invarijantnog sistema na step signal $x_1(n) = u(n)$ je:

$$y_1(n) = 2^{-n}u(n). \tag{6}$$

Pronađite odziv sistema na ulazni signal:

$$x(n) = \delta(n) - 2u(n-3) \tag{7}$$

Rješenje:

Pođimo od definicija za linearnost i vremensku invarijantnost sistema.

Linearnost: Sistem je linearan ukoliko: pod pretpostavkama da ulazni signal $x_1(n)$ na izlazu daje $y_1(n)$ i da ulazni signal $x_2(n)$ na izlazu daje $y_2(n)$; dobijamo na izlazu signal $Ay_1(n) + By_2(n)$ ukoliko je ulazni signal $Ax_1(n) + Bx_2(n)$, za proizvoljne konstante A i B.

Nama je postavkom zadatka dat odziv na step signal, pa pokušamo i signal $x(n)$ predstaviti kao linearnu kombinaciju step signala.

Vremenska invarijantnost: Sistem je vremenski invarijantan ako pod pretpostavkom da je $y_1(n)$ odziv na proizvoljni signal $x_1(n)$, vrijedi da je odziv na $x_1(n-N)$ signal $y_1(n-N)$.

Ovo znači da, kada budemo predstavljali signal $x(n)$ kao linearnu kombinaciju step signala, i vremenski pomjereni oblici step signala mogu biti u toj kombinaciji.

Postavlja se pitanje kako predstaviti signala $\delta(n)$ preko step signala. Znamo da je:

$$\begin{aligned}
\delta(n) &= \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases} \\
u(n) &= \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases} \\
u(n-1) &= \begin{cases} 1, n \geq 1 \\ 0, n < 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Pa će biti:

$$\delta(n) = u(n) - u(n-1).$$

Uvrstimo ovo u $x(n)$ i dobijemo da je

$$x(n) = u(n) - u(n-1) - 2u(n-3)$$

Sistem je linearan i vremenski invarijantan pa će odziv biti:

$$y(n) = y_1(n) - y_1(n-1) - 2y_1(n-3)$$

$$\begin{aligned}
y(n) &= 2^{-n}u(n) - 2^{-(n-1)}u(n-1) - 2 \cdot 2^{-(n-3)}u(n-3) \\
y(n) &= 2^{-n}\left(u(n) - 2u(n-1) - 2^4u(n-3)\right),
\end{aligned}$$

gdje je $y_1(n)$ odziv sistema na step signal $u(n)$.