1 DIGITALNA OBRADA SIGNALA - VI računske vježbe

1.1 Zadatak 1.

Odrediti Z transformaciju sledećih signala: a) $x(n) = \delta(n+1) + \delta(n) + \delta(n-1)$;
b) $x(n) = 1/2^n[u(n) - u(n-10)]$

Z-transformacija signala $x(n)$ je po definiciji:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

a) Z-transformacija datog signala će biti:

$$\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\delta(n+1) + \delta(n) + \delta(n-1)\right) z^{-n} = \\
&= z + 1 + z^{-1} = z + 1 + \frac{1}{z}.
\end{aligned}$$

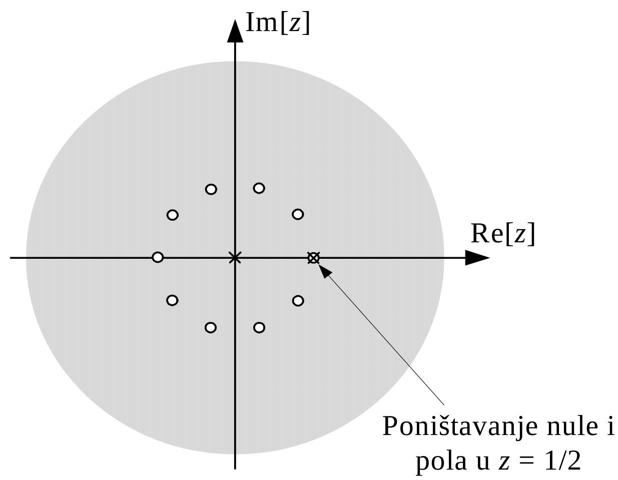
Oblast konvergencije isključuje samo tačke 0 i ∞, jer za $z = 0$ član $1/z$ divergira, dok za ∞ član z divergira.

b) $x(n) = 1/2^n[u(n) - u(n-10)]$

$$u(n) - u(n-10) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, ..., 9 \\ 0, & \text{ostale vrijednosti } n \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \\
&= \sum_{n=0}^{9} \frac{1}{2^n} z^{-n} = \sum_{n=0}^{9} (2z)^{-n} = \frac{1 - (2z)^{-10}}{1 - (2z)^{-1}} = \\
&= \frac{z^{-10}}{z^{-1}} \frac{z^{10} - (\frac{1}{2})^{10}}{z - \frac{1}{2}} = \frac{z^{10} - (\frac{1}{2})^{10}}{z^9 (z - \frac{1}{2})}
\end{aligned}$$

Izraz za $X(z)$ smo zapisali u ovom obliku da bi odredili njegove nule i polove i na osnovu njih nacrtali dijagram nula i polova za Z-transformaciju signala $x(n)$ i odredili oblast konvergencije. Dijagram nula i polova je dat na sledećoj slici. Na osnovu izraza za Z-transformaciju i slike vidimo su polovi u $z = 0$ i $z = 1/2$. Međutim, Z-transformacija takođe posjeduje i nulu u $z = 1/2$, koja će poništavati pol koji se nalazi u istoj tački, pa će oblast konvergencije biti cijela Z ravan izuzev $z = 0$ (slika dolje).



2 Zadatak 2.

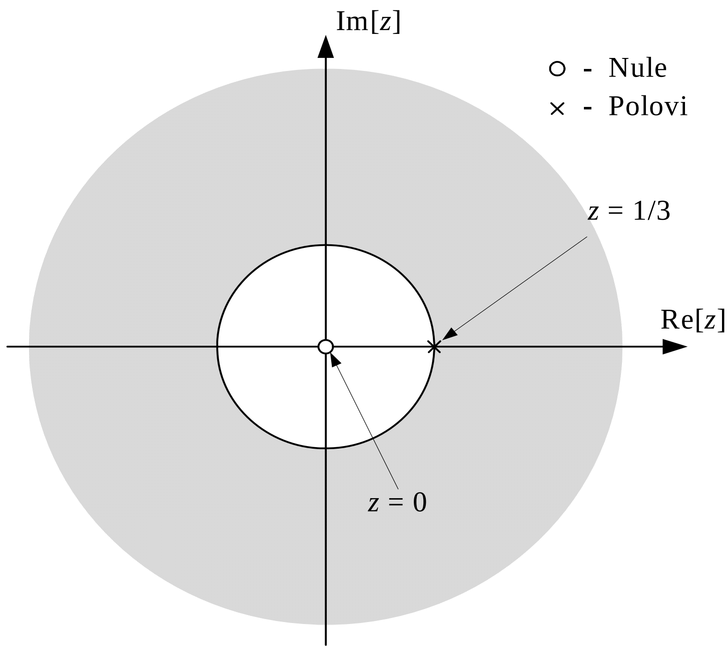
Odrediti Z transformaciju sledećeg signala:

$$x(n) = 3^{-n}u(n)$$

Dati signal je kauzalan, pa znamo da će njegova oblast konvergencije biti izvan nekog kruga poluprecnika R, odnosno prostiraće se od beskonačnosti do kružnice poluprečnika R. Naš je zadatak da odredimo Z-transformaciju, kao i oblast konvergencije.

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n}z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (3z)^{-n} = \\ &= 1\frac{1-(3z)^{-\infty}}{1-(3z)^{-1}} = \frac{1}{1-(3z)^{-1}} = \frac{z}{z-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Da bi prethodna suma konvergirala $q = (3z)^{-1}$ mora zadovoljavati uslov $|q| = \left|\frac{1}{3z}\right| < 1$. Pa će oblast konvergencije biti $|z| > \frac{1}{3}$. Dijagram nula i polova i oblast konvergencije je data na sledećoj slici. Dakle, dobijeni rezultat se poklapa sa očekivanjem, pri čemu je $R = \frac{1}{3}$.



3 Zadatak 3.

Odrediti Z transformaciju sledećeg signala:

$$x(n) = 2^{-|n|}$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|}z^{-n} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^{n}z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}z^{-n} \end{aligned}$$

Znači, prethodni smo signal prikazali kao zbir kauzalnog i antikauzalnog dijela.

Antikauzalni dio je:

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^{n}z^{-n} \underset{n'=-n}{=} \sum_{n'=1}^{\infty} 2^{-n'}z^{n'} &= \frac{z}{2}\frac{1-\left(\frac{z}{2}\right)^{\infty}}{1-\frac{z}{2}} = \\ &= \frac{\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{2}} = \frac{z}{2-z} \end{aligned}$$

Gornja suma konvergira ako je $|q| = \left|\frac{z}{2}\right| < 1$, odnosno, $|z| < 2$.

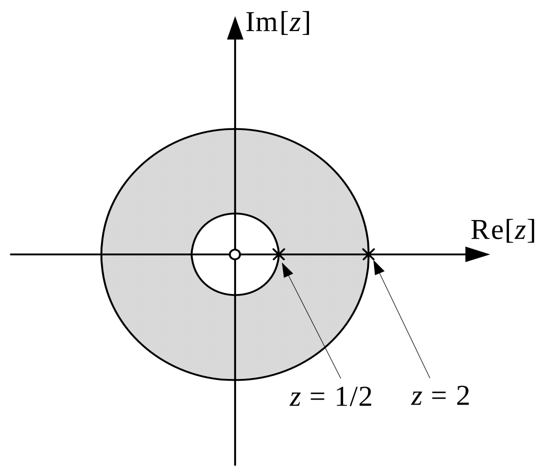
Druga suma je kauzalni dio:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^{-n} &= \frac{1 - \left((2z)^{-1}\right)^{\infty}}{1 - (2z)^{-1}} = \\ &= \frac{z}{z - \frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Gornja suma konvergira ako je $|q| = \left|\frac{1}{2z}\right| < 1$, odnosno, $|z| > \frac{1}{2}$.

Na početku smo zaključili da smo signal prikazali kao sumu kauzalnog i antikauzalnog signala. Oblast konvergencije signala predstavljenog u vidu sume signala je jednaka presjeku oblasti konvergencije Z-transformacija pojedinih signala. U našem slučaju prvi dio sume konvergira za $|z| < 2$, drugi dio za $|z| > \frac{1}{2}$. Oblast konvergencije njihove sume, na osnovu prethodno rečenog je $\frac{1}{2} < |z| < 2$.

Dijagram nula i polova i oblast konvergencije je data na slici dolje.



Z-transformacija signala $x(n)$ je jednaka zbiru dobijenih Z-transformacija. Dakle:

$$\begin{aligned}X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} == \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^n z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^{-n} = \\ &= \frac{z}{2 - z} + \frac{z}{z - \frac{1}{2}} = \frac{z\left(z - \frac{1}{2}\right) + z\,(2 - z)}{(2 - z)\left(z - \frac{1}{2}\right)} = \\ &= \frac{3}{2} \frac{z}{(2 - z)\left(z - \frac{1}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Oblast konvergencije ovog signala je prsten definisan: $\frac{1}{2} < |z| < 2$.