1 DIGITALNA OBRADA SIGNALA - VII računske vježbe

1.1 Zadatak 1.

Data je Z transformacija:

$$X(z) = \frac{1}{2-3z}, \quad |z| > \frac{2}{3}.$$

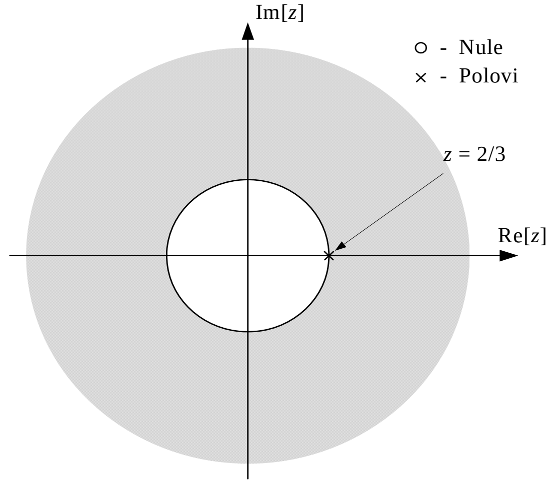
Odrediti inverznu Z-transformaciju (IZT).

RJ. Prilikom traženja IZT nećemo koristiti definicioni integral, već ćemo ići na prepoznavanje signala čiju Z-transformaciju već znamo. Ukoliko je Z-transformacija zadata u obliku razlomka, taj se razlomak prvo razlaže na parcijalne razlomke, a zatim se za svaki od njih određuje signal čija Z-transformacija odgovara tom parcijalnom razlomku. Pri opisanom postupku se koriste dva transformaciona para:

$$a^n u(n) \Leftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, \quad |z| > a, \quad \text{kauzalan signal}$$

$$-a^n u(-n-1) \Leftrightarrow -\frac{\frac{z}{a}}{1-\frac{z}{a}} = \frac{z}{z-a}, \quad |z| < a, \quad \text{antikauzalan signal}$$

Na osnovu Z-transformacije kauzalnog i antikauzalnog signala možemo zaključiti da za izračunavanje IZT, odnosno signala čija nam je Z-transformacija zadata, nije dovoljno poznavanje Z-transformacije, već i oblasti konvergencije. Dijagram nula i polova Z-transformacije signala $x(n)$ i njegova oblast konvergencije (osjenčeno) su prikazani na sledećoj slici. Oblast konvergencije je data u postavci zadatka $|z| > \frac{2}{3}$.



Da bi odredili $x(n)$ čija je Z-transformacija $X(z) = \frac{1}{2-3z}$, $X(Z)$ pokušavamo svesti na izraz za izračunavanje sume geometrijskog reda čiji opšti član sadrži z^{-1}. Jedan od načina da to učinimo je da napišemo izraz za datu Z-transformaciju kao:

$$X(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{3z}{2}}.$$

Da bi prethodni izraz predstavljao sumu geometrijskog reda koji konvergira potrebno je da bude zadovoljen uslov $\left|\frac{3z}{2}\right| < 1$, odnosno $|z| < \frac{2}{3}$. Ovo se ne poklapa sa uslovom koji nam je dat u postavci zadatka (ovo bi bila suma koja bi se dobila pri računanju Z-transformacije da nam je dat antikauzalan signal). Sada pokušavamo napisati $X(z)$ tako da predstavlja sumu nekog drugog reda:

$$X(z) = -\frac{1}{3z}\frac{1}{1-\frac{2}{3z}}$$

$\frac{1}{1-\frac{2}{3z}}$ je suma reda koji konvergira ukoliko je zadovoljen uslov $|q| = \left|\frac{2}{3z}\right| < 1$, odnosno $|z| > \frac{2}{3}$, što nam je i dato postavkom zadatka. Dakle, možemo koristiti ovaj izraz za traženje IZT.

$$X(z) = -\frac{1}{3z}\frac{1}{1-\frac{2}{3z}} = -\frac{1}{3z}X_1(z)$$

gdje je:

$$X_1(z) = \frac{1}{1-\frac{2}{3z}}$$

Prethodni izraz je suma reda:

$$X_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n z^{-n}$$

pa se $X(z)$može pisati kao:

$$X(z) = -\frac{1}{3z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n z^{-n}$$

Ukoliko uporedimo prethodni izraz sa definicionim izrazom za Z-transformaciju:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(n\right) z^{-n} \tag{1}$$

zaključujemo da je potrebno i član $\frac{1}{z}$ ubaciti pod sumu:

$$
\begin{aligned}
X(z) &= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n z^{-n}z^{-1} = \\
&= -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n z^{-(n+1)}
\end{aligned}
$$

Poređenjem za (1) zaključujemo da je potrebno uvesti smjenu $n' = n + 1$, pa se prethodni izraz svodi na:

$$X(z) = -\frac{1}{3}\sum_{n'=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n'-1} z^{-n'}$$

Sada, nakon poređenja sa (1), možemo pisati vremenski oblik signala čija je Z-transforamcija data prethodnim izrazom:

$$x(n) = \begin{cases} -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}, & \text{za } n = 1, 2, ..., \infty \\ 0, & \text{ostalo.} \end{cases},$$

što se može zapisati kao:

$$x(n) = -\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} u(n-1).$$

1.2 Zadatak 2.

Data je Z-transformacija signala:

$$X(z) = \frac{z+1}{(2z-1)(3z+2)}.$$

Poznato je da je $x(n)$ kauzalan. Odrediti $x(n)$.

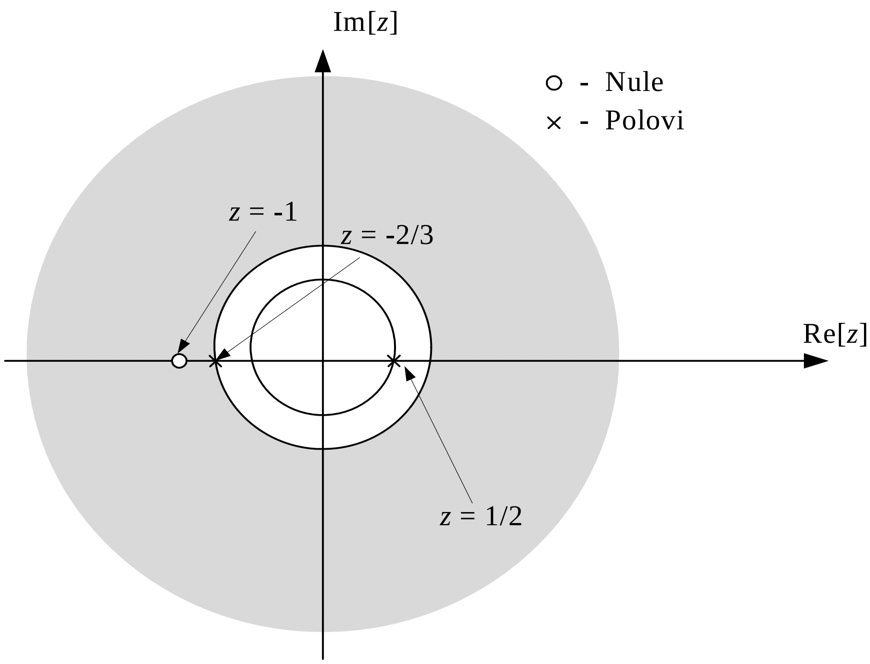
RJ. $x(n)$ je kauzalan $\Rightarrow$ oblast konvergencije je spoljašnost nekog kruga. Pored toga, oblast konvergencije ne smije u sebi sadržati polove, što znači da u našem slučaju mora prolaziti kroz pol koji je najudaljeniji od koordinatnog početka.

Polovi Z-transformacije date u zadatku su:

$$2z_{p1} - 1 = 0 \Rightarrow z_{p1} = \frac{1}{2}$$

$$3z_{p2} + 2 = 0 \Rightarrow z_{p2} = -\frac{2}{3}$$

Uzimajući u obzir prethodno razmatranje, oblast konvergencije date Z-transformacije je $|z| > \frac{2}{3}$. Raspored nula i polova, kao i oblast konvergencije za kauzalan signal čija je Z-transformacija data postavkom zadatka je prikazan na sledećoj slici.



Razbijamo razlomak na parcijalne razlomke koji mogu biti sume nekog geometrijskog reda.

$$X(z) = \frac{z+1}{(2z-1)(3z+2)} = \frac{A}{2z-1} + \frac{B}{3z+2}$$
$$A = \frac{3}{7}, \quad B = -\frac{1}{7}$$

Sada se data Z-transformacija može pisati u obliku sume:

$$X(z) = \frac{A}{2z-1} + \frac{B}{3z+2}$$

Sabirke u $X(z)$ treba prevesti u sume geometrijskih redova, pri čemu se mora voditi računa o oblasti konvergencije. Imajući u vidu prethodni zadatak, zaključujemo da će pojedine Z-transformacije koje odgovaraju kauzalnim signalima biti:

$$X(z) = \frac{A}{2z}\frac{1}{1-\frac{1}{2z}} + \frac{B}{3z}\frac{1}{1+\frac{2}{3z}}$$

Vidimo da je:

$$\frac{A}{2z}\frac{1}{1-\frac{1}{2z}} = \frac{A}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n}, \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

i

$$\frac{B}{3z}\frac{1}{1+\frac{2}{3z}} = \frac{B}{3z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n z^{-n}, \quad |z| > \frac{2}{3}.$$

$$\begin{aligned}
X(z) &= \frac{A}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} + \frac{B}{3z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n z^{-n} = \\
&= \frac{A}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n-1} + \frac{B}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n z^{-n-1} \underset{m=n+1}{=} \\
&= \frac{A}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} z^{-m} + \frac{B}{3}\sum_{m=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^{m-1} z^{-m}
\end{aligned}$$

Bakon zamjene vrijednosti za A i B dobijamo:

$$\begin{aligned}
X(z) &= \frac{3}{7*2}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} z^{-m} - \frac{1}{7*3}\sum_{m=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^{m-1} z^{-m} = \\
&= \frac{3}{7}\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} z^{-m} - \frac{1}{14}\frac{2}{3}\sum_{m=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^{m-1} z^{-m} = \\
&= \frac{3}{7}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{m} z^{-m} + \frac{1}{14}\sum_{m=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^{m} z^{-m}
\end{aligned}$$

Zaključujemo na osnovu poređenja sa (1) da je signal $x(n)$ čija Z-transformacija je data prethodnom formulom:

$$x(n) = \left(\frac{3}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{14}\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right) u(n-1).$$

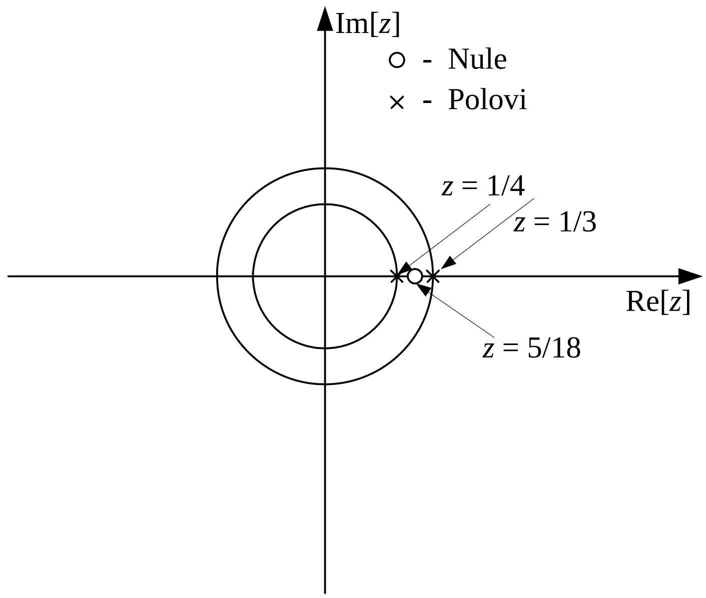
1.3 Zadatak 3.

Data je funkcija prenosa diskretnog sistema:

$$H(z) = \frac{3 - \frac{5}{6}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}.$$

Odrediti inverznu Z-transformaciju pod uslovom da je:
a) Sistem stabilan;
b) Data oblast konvergencije $\frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3}$*;*
c) Sistem antikauzalan.

RJ. Raspored nula i polova za prenosnu funkciju datu zadatkom prikazan je na sledećoj slici.



Prenosna funkcija se može razložiti na parcijalne razlomke:

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \frac{3-\frac{5}{6}z^{-1}}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})} = \frac{A}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{B}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \\
A &= 1, \quad B = 2
\end{aligned}
$$

a) Oblast konvergencije mora obuhvatati kružnicu poluprečnika $|z| = 1$, da bi se zadovoljio uslov da je sistem čija je ovo prenosna funkcija stabilan. Takođe, oblast konvergencije ne smije sadržati nijedan pol. Dakle oblast konvergencije je $|z| > \frac{1}{3}$.

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n z^{-n} + 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n} \quad |z| > \frac{1}{3} \text{ i } |z| > \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Dakle, oblast konvergencije je, u ovom slučaju, $|z| > \frac{1}{3}$.

Impulsni odziv sistema je:

$$h(n) = (4^{-n} + 23^{-n})u(n).$$

b) Oblast konvergencije u ovom slučaju je $\frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3}$. Prvi član u $H(z)$ iz zadatka pod a) konvergira uz uslov $|z| > \frac{1}{4}$, taj dio se ne mijenja pa, ovom članu u Z-transformaciji odgovara signal $4^{-n}u(n)$. Drugi član se mora napisati tako da odgovara sumi reda koja konvergira ako je zadovoljen uslov $|z| < \frac{1}{3}$. U tom slučaju će biti:

$$\frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} = -2\frac{3z}{1-3z} = -2\sum_{n=1}^{\infty}(3z)^n \underset{n'=-n}{=} -2\sum_{n'=-\infty}^{-1}(3z)^{-n'} \text{ uz uslov } |z| < \frac{1}{3}$$

što predstavlja Z-transformaciju signala $-23^{-n}u(-n-1)$. Impulsni odziv sistema čija funkcija prenosa ima oblast konvergencije $\frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3}$ je:

$$h(n) = 4^{-n}u(n) - 23^{-n}u(-n-1).$$

c) Da bi sistem bio antikauzalan, oblast konvergencije je unutrašnjost kružnice koja prolazi kroz pol koji je najbliži koordinatnom početku, dakle $|z| < \frac{1}{4}$. Zaključujemo da drugi član u $H(z)$, odnosno, signal koji odgovara ovom članu ostaje isti. Prvi član se mijenja, jer oblast konvergencije mora biti $|z| < \frac{1}{4}$ da bi rezultujuća oblast konvergencije bila $|z| < \frac{1}{4}$. Drugi član u $H(z)$ pišemo kao:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} = -\frac{4z}{1-4z} = -\sum_{n=1}^{\infty}(4z)^n \underset{n'=-n}{=} -\sum_{n'=-\infty}^{-1}(4z)^{-n'} \text{ uz uslov } |z| < \frac{1}{4}$$

pa će odgovarajuću signal biti $-4^{-n}u(-n-1)$. Impulsni odziv antikauzalnog diskretnog sistema čija je funkcija prenosa data postavkom je:

$$h(n) = -4^{-n}u(-n-1) - 23^{-n}u(-n-1)$$