1 DIGITALNA OBRADA SIGNALA - VIII računske vježbe

1.1 Zadatak 1.

Odrediti funkciju prenosa diskretnog sistema koji odgovara analognom sistemu sa funkcijom prenosa:

$$H(s) = \frac{1}{s + 0.01}$$

a) metodom istog impulsnog odziva;
b) bilinearnom transformacijom.

RJ. Po metodi istog impulsnog odziva, funkcija prenosa analognog sistema napisana u obliku sume:

$$H_a(s) = \sum_{i=1}^{N} \frac{k_i}{s - s_i} \tag{1}$$

preslikava se u funkciju prenosa diskretnog sistema:

$$H(z) = \sum_{i=1}^{N} \frac{k_i T}{1 - e^{s_i T} z^{-1}}, \tag{2}$$

gdje je T korak odabiranja analognog impulsnog odziva sistema i mora biti takav da je teorema o odabiranju ispunjena. Ukoliko nije drugačije naglašeno, uzima se da je $T = 1$.

a) Da bi se analogni sistem mogao transformisati u diskretni metodom istog impulsnog odziva, potrebno je da ima ograničen spektar. U našem slučaju, za $\omega \to \infty \Rightarrow |H(j\omega)| = \sqrt{\frac{1}{\omega^2 + 0.01^2}} \to 0$. Spektar nije ograničen, ali se njegov najznačajniji dio nalazi na učestanostima bliskim nuli, pa se može smatrati ograničenim, a da se pri tom ne napravi velika greška. Dakle, može se primijeniti metod istog impulsnog odziva po kojem će biti:

$$H(z) = \frac{1}{1 - e^{-0.01} z^{-1}}, \text{ jer je } s_1 = -0.01,\ T = 1,\ k_1 = 1$$

Pošto je $\lim_{z \to \infty} H(z) = 1$, očigledno je da postoji diskontinuitet u impulsnom odzivu, pa se pravi odgovarajuća korekcija prvobitno dobijenog izraza, odnosno oduzima se $\frac{1}{2} \lim_{z \to \infty} H(z)$.

$$H(z) = \frac{z}{z - e^{-0.01}} - \frac{1}{2} \lim_{z \to \infty} H(z) = \frac{z}{z - e^{-0.01}} - \frac{1}{2}$$

b) Sistem se može preslikati u diskretni domen koristeći bilinearnu transformaciju oblika:

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}},$$

gdje je T takođe korak odabiranja analognog impulsnog odziva, ali sada T ne mora zadovoljavati teoremu o odabiranju. Ukoliko drugačije nije naglašeno uzimaćemo $T = 1$.

Korišćenjem bilinearne transformacije dobijamo:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 0.01} = \frac{1+z^{-1}}{2\left(1-z^{-1}\right) + \frac{1}{100}\left(1+z^{-1}\right)} = \\ &= \frac{100+100z^{-1}}{200-200z^{-1}+1+z^{-1}} = \frac{100+100z^{-1}}{201-199z^{-1}} = \frac{100z+100}{201z-199} \end{aligned}$$

1.2 Zadatak 2.

Metodom istog impulsnog odziva odrediti funkciju prenosa diskretnog sistema koji odgovara analognom sistemu sa funkcijom prenosa:

$$H(s) = \frac{1}{s^3 - s^2 - 4s + 4}$$

RJ.

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{s^3 - s^2 - 4s + 4} = \frac{1}{s^2(s-1) - 4(s-1)} = \\ &= \frac{1}{\left(s^2-4\right)(s-1)} = \frac{1}{(s-2)(s+2)(s-1)} \end{aligned}$$

Da bi se primijenio metod istog impulsnog odziva funkcija prenosa se mora napisati u obliku sume date formulom (1). Dakle:

$$H(s) = \frac{-\frac{1}{3}}{s-1} + \frac{\frac{1}{4}}{s-2} + \frac{\frac{1}{12}}{s+2}$$

Na osnovu (2), uz $T = 1$ i $s_1 = 1$, $s_2 = 2$ i $s_3 = -2$, dobijamo:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{-\frac{1}{3}}{1-e^1 z^{-1}} + \frac{\frac{1}{4}}{1-e^2 z^{-1}} + \frac{\frac{1}{12}}{1-e^{-2} z^{-1}} = \\ &= \frac{-\frac{1}{3}z}{z-e} + \frac{\frac{1}{4}z}{z-e^2} + \frac{\frac{1}{12}z}{z-e^{-2}} = \\ &= z\frac{-\frac{1}{3}\left(z-e^2\right)\left(z-e^{-2}\right) + \frac{1}{4}(z-e)\left(z-e^{-2}\right) + \frac{1}{12}(z-e)\left(z-e^2\right)}{(z-e)\left(z-e^2\right)\left(z-e^{-2}\right)} = \\ &= \frac{z\left[\left(3e^2 - 4e + \frac{1}{e^2}\right)z + e^3 - 4 + \frac{3}{e}\right]}{12(z-e)\left(z-e^2\right)\left(z-e^{-2}\right)}. \end{aligned}$$

Pošto je $\lim_{z\to\infty} H(z) = [-\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}]$, očigledno je da postoji diskontinuitet u impulsnom odzivu, pa se pravi odgovarajuća korekcija prvobitno dobijenog izraza, odnosno oduzima se $\frac{1}{2}\lim_{z\to\infty} H(z)$.

$$H(z) = \frac{z\left[\left(3e^2 - 4e + \frac{1}{e^2}\right)z + e^3 - 4 + \frac{3}{e}\right]}{12(z-e)\left(z-e^2\right)\left(z-e^{-2}\right)} - \frac{1}{2}[-\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}]$$

1.3 Zadatak 3.

Može li se analogni signal sa funkcijom prenosa:

$$H(s) = \frac{s^2 - 3s + 3}{s^2 + 3s + 3}$$

transformisati u digitalni metodom istog impulsnog odziva? Ako ne može, sistem transformisati bilinearnom transformacijom.

RJ. Sistem nema ograničen spektar jer za $\omega \to \infty \Rightarrow |H(j\omega)| \to 1$, dakle, ne može se primijeniti metod istog impulsnog odziva.

Primijenjujući bilinearnu transformaciju, uz $T = 1$, dobijamo:

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{\left(2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 - 6\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 3}{\left(2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^2 + 6\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 3} = \frac{4\left(1-z^{-1}\right)^2 - 6\left(1-z^{-2}\right) + 3\left(1+z^{-1}\right)^2}{4\left(1-z^{-1}\right)^2 + 6\left(1-z^{-2}\right) + 3\left(1+z^{-1}\right)^2} = \\ &= \frac{1 - 2z^{-1} + 13z^{-2}}{13 - 2z^{-1} + z^{-2}} = \frac{z^2 - 2z + 13}{13z^2 - 2z + 1}. \end{aligned}$$

1.4 Zadatak 4.

Odrediti funkciju prenosa diskretnog sistema koji odgovara analognom sistemu sa funkcijom prenosa:

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)^2}$$

metodom istog impulsnog odziva.

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2} \\ A &= 1,\ B = -1,\ C = 1 \end{aligned}$$

$$H(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2}$$

Članove oblika

$$\frac{k}{(s-s_i)^m}$$

treba transformisati na sledeći način:

$$\frac{k}{(s-s_i)^m} = \frac{1}{(m-1)!}\left(\frac{d^{m-1}}{da^{m-1}}\frac{k}{s-a}\right)_{|a=s_i}$$

U našem slučaju će biti:

$$\frac{1}{(s+2)^2} = \left(\frac{d}{da}\frac{1}{s-a}\right)_{|a=-2}$$

pa se funkcija prenosa može pisati kao:

$$H(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} + \left(\frac{d}{da}\frac{1}{s-a}\right)_{|a=-2}$$

čemu, na osnovu (1) i (2), odgovara:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{1-e^{-1}z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-2}z^{-1}} + \left(\frac{d}{da}\frac{1}{1-e^{a}z^{-1}}\right)_{|a=-2} = \\ &= \frac{1}{1-e^{-1}z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-2}z^{-1}} + \frac{e^{a}z^{-1}}{\left(1-e^{a}z^{-1}\right)^2}_{|a=-2} = \\ &= \frac{1}{1-e^{-1}z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-2}z^{-1}} + \frac{e^{-2}z^{-1}}{\left(1-e^{-2}z^{-1}\right)^2} \end{aligned}$$

Pošto je $\lim_{z\to\infty} H(z) = 0$, očigledno je da ne postoji diskontinuitet u impulsnom odzivu, pa nije potrebno praviti korekcije dobijenog izraza.