1 DIGITALNA OBRADA SIGNALA - IX računske vježbe

1.1 Zadatak 1.

Impulsni odziv diskretnog, linearnog, vremenski invarijantnog, kauzalnog sistem je zadat grafički na slici dolje. Na ulaz sistema se dovodi bijeli šum $x(n)$ sa varijansom $\sigma_x^2 = 2$ i srednjom vrijednošću $\mu_x = 0$. Odrediti srednju vrijednost, autokorelacionu funkciju i varijansu izlaznog signala.

Rješenje:

Izlazni signal $y(n)$ diskretnog, linearnog, vremenski invarijantnog sistema za ulazni signal $x(n)$ može se izračunati ako se zna impulsni odziv $h(n)$ korišćenjem sledeće relacije:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

Srednja vrijednost izlaznog signala u n-tom trenutku je:

$$\mu_y(n) = E\{y(n)\} = E\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)E\{x(k)\}$$

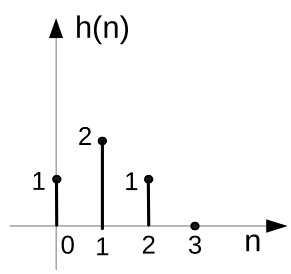
Obzirom da je srednja vrijednost ulaznog signala $\mu_x(k) = E\{x(k)\}$ jednaka nuli, na osnovu prethodne formule zaključujemo da je i srednja vrijednost izlaznog signala takođe jednaka nuli, dakle $\mu_y(n) = 0$.

Z-transformacija autokorelacione funkcije izlaznog signala $R_{yy}(z)$ se dobija na osnovu Z-transformacije ulaznog signala $R_{xx}(z)$ i Z-transformacije impulsnog odziva po sledećoj formuli:

$$R_{yy}(z) = R_{xx}(z)H(z)H^*(1/z^*) \tag{1}$$

Obzirom da je $h(n)$ realan signal, prethodna relacija dobija oblik:

$$R_{yy}(z) = R_{xx}(z)H(z)H(1/z)$$



Impulsni odziv zadat grafički, prethodnom slikom, se moze analitički zapisati kao:

$$h(n) = \delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-2).$$

Njegova Z-transformacija će biti:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-2)\right) z^{-n} = 1+2z^{-1}+z^{-2}.$$

Sa druge strane, postavkom zadatka je rečeno da je ulazni signal bijeli šum, njegova autokorelaciona funkcija je:

$$r_{xx}(n) = \sigma_x^2 \delta(n),$$

a Z-transforamcija autokorelacione funkcije će biti:

$$R_{xx}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_{xx}(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma_x^2 \delta(n) z^{-n} = \sigma_x^2 = 2.$$

Pa će na osnovu (1), biti:

$$\begin{aligned} R_{yy}(z) &= \sigma_x^2 \left(1 + 2z^{-1} + z^{-2}\right)\left(1 + 2z^{1} + z^{2}\right) = \\ &= \sigma_x^2 (z^{-2} + 4z^{-1} + 6 + 6z + z^2) = \\ &= 2(z^{-2} + 4z^{-1} + 6 + 6z + z^2) \end{aligned}$$

odnosno, autokorelaciona funkcija izlaznog signala u vremenskom domenu će biti:

$$r_{yy}(n) = 2(\delta(n+2) + 4\delta(n+1) + 6\delta(n) + 6\delta(n-1) + \delta(n-2)). \qquad (2)$$

Potrebno je odrediti i varijansu izlaznog signala. Autokovarijansa izlaznog signala je:

$$c_{yy}(n,m) = E\{[y(n) - \mu_y(n)][y(m) - \mu_y(m)]^*\},$$

ako je $m = n$, autokovarijansa predstavlja varijansu izlaznog signala:

$$\sigma_y^2(n) = c_{yy}(n,n) = E\{\left|y(n) - \mu_y(n)\right|^2\}$$

Sa druge strane, veza izmedu autokovarijanse i autokorelacione funkcije je:

$$c_{yy}(n,m) = r_{yy}(n,m) - \mu_y(n)\mu_y^*(m)$$

Uzimajući u obzir da je dobijeno da je srednja vrijednost izlaznog signala $\mu_y\{n) = 0$, kao i definiciju varijanse, dobija se

$$\sigma_y^2(n) = r_{yy}(n,n)$$

Na ulaz je doveden bijeli šum koji je stacionaran u širem smislu, što znači da mu autokorelaciona funkcija ne zavisi od trenutka posmatranja, već samo od razlike $m - n$. Sada će varijansa izlaznog signala biti:

$$\sigma_y^2(n) = r_{yy}(0)$$

Dakle, vrijednost varijanse ćemo dobiti kada uvrstimo $n = 0$, u (2):

$$\sigma_y^2(n) = r_{yy}(0) = 6$$

Ukoliko se uporedi vrijednost prethodno dobijene varijanse i Z-transformacija autokorelacione funkcije, može se zaključiti da će varijansa biti jednaka konstantnom članu u $R_{yy}(z)$.

1.2 Zadatak 2.

Diskretni sistem čiji je impulsni odziv $h(n) = 2^{-n}u(n)$ pobuden je bijelim šumom $x(n)$, srednje vrijednosti $\mu_x = 0$ i varijanse $\sigma_x^2 = 2$.

1. *Odrediti srednju vrijednost izlaznog signala;*
2. *Autokorelacionu funkciju ulaznog signala $r_{xx}(n)$;*
3. *Spektralnu gustinu snage izlaznog signala;*
4. *Autokorelacionu funkciju izlaznog signala $r_{yy}(n)$;*
5. *Varijansu izlaznog signala $\sigma_y^2(n)$;*
6. *Kroskorelaciju ulaznog i izlaznog signala.*

Rješenje

1. Srednja vrijednost ulaznog signala $\mu_x(n)$ je jednaka nuli, pa će srednja vrijednost izlaznog signala u n-tom trenutku biti:

$$\mu_y(n) = E\{y(n)\} = E\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k)E\left\{x(k)\right\} = 0$$

2.

$$r_{xx}(n) = \sigma_x^2\delta(n)$$

3.

$$S_{yy}(\omega) = \left|H(e^{j\omega})\right|^2 S_{xx}(\omega)$$

$$S_{xx}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_{xx}(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sigma_x^2\delta(n)e^{-j\omega n} = \sigma_x^2$$

Fourier-ovu transformaciju impulsnog odziva diskretnog sistema možemo dobiti koristeći vezu između Fourier-ove i Z-transformacije, pa će biti:

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-n}u(n)z^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-n}z^{-n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2z}} = \\ &= \frac{2z}{2z-1} \end{aligned}$$

uz uslov da je $\left|\frac{1}{2z}\right| < 1$, odnosno $|z| > \frac{1}{2}$, i na kraju dobijamo:

$$H(\omega) = H(z)_{|z=e^{j\omega}} = \frac{2e^{j\omega}}{2e^{j\omega}-1}$$

Dalje,

$$\begin{aligned} |H(\omega)| &= \left|\frac{2e^{j\omega}}{2e^{j\omega}-1}\right| = \frac{2}{|2(\cos(\omega)+j\sin(\omega))-1|} = \frac{2}{\sqrt{(2\cos(\omega)-1)^2+4\sin^2(\omega)}} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{4\cos^2(\omega)-4\cos(\omega)+1+4\sin^2(\omega)}} = \frac{2}{\sqrt{5-4\cos(\omega)}} \end{aligned}$$

Sada se spektralna gustina snage izlaznog signala može dobiti kao:

$$S_{yy}(\omega) = \left(\frac{2}{\sqrt{5-4\cos(\omega)}}\right)^2 \sigma_x^2 = \frac{8}{5-4\cos(\omega)}$$

4.

$$R_{yy}(z) = \sigma_x^2 \frac{2z}{2z-1} \frac{2\frac{1}{z}}{2\frac{1}{z}-1}$$

Može se provjeriti dio zadatka pod 3. Naime, po definiciji je spektralna gustina snage izlaznog signala jednaka Fourier-ovoj transformaciji autokorelacione funkcije, odnosno:

$$\begin{aligned} S_{yy}(\omega) &= R_{yy}(z)_{|z=e^{j\omega}} = \sigma_x^2 \frac{2e^{j\omega}}{2e^{j\omega}-1} \frac{2e^{-j\omega}}{2e^{-j\omega}-1} = \sigma_x^2 \frac{4}{4-2e^{j\omega}-2e^{-j\omega}+1} = \\ &= \frac{4\sigma_x^2}{5-4\cos(\omega)} = \frac{8}{5-4\cos(\omega)} \end{aligned}$$

što je i očekivano. Autokorelaciona funkcija $r_{yy}(n)$ izlaznog signala se može dobiti kao inverzna Z-transformacija $R_{yy}(z)$:

$$R_{yy}(z) = \sigma_x^2 \frac{2z}{2z-1} \frac{2}{2-z}$$

Da bi se dobila autokorelaciona funkcija izlaznog signala na osnovu njene Z-transformacije, potrebno je znati oblast konvergencije. Oblast konvergencije Z-transformacije autokorealcione funkcije je prsten, u našem slučaju je $1/2 < |z| < 2$. Da vidimo kako smo dobili baš ovakvu oblast. Ako posmatramo izraz za $R_{yy}(z)$, vidimo da smo prvi dio oblasti konvergencije dobili prilikom izračunavanja $H(z)$, gdje smo zaključili da mora biti $|z| > \frac{1}{2}$. $H(1/z)$ će imati oblast konvergencije $\left|\frac{1}{z}\right| > \frac{1}{2}$, odnosno, $|z| < 2$. Oblast konvergencije proizvoda dvije Z-transformacije je presijek pojedinačnih oblasti konvergencija, otuda $1/2 < |z| < 2$

Tražimo inverznu Z-transformaciju za:

$$\begin{aligned} R_{yy}(z) &= 4\sigma_x^2 \frac{z}{(2z-1)(2-z)} = 4\sigma_x^2 \left(\frac{A}{2z-1} + \frac{B}{2-z}\right) \\ A &= \frac{1}{3}, \quad B = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Pa će biti

$$R_{yy}(z) = \frac{4\sigma_x^2}{3} \left(\frac{1}{2z-1} + \frac{2}{2-z}\right) = \frac{4\sigma_x^2}{3} \left(\frac{\frac{1}{2z}}{1-\frac{1}{2z}} + \frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right)$$

uz uslove

$$\left|\frac{1}{2z}\right| < 1 \text{ i } \left|\frac{z}{2}\right| < 1$$

odnosno $1/2 < |z| < 2$, što se i poklapa sa oblašću konvergencije Z-transformacije autokorelacione funkcije izlaznog signala, pa se iz ovog oblika može tražiti autokorelaciona funkcija izlaznog signala:

$$\begin{aligned} R_{yy}(z) &= \frac{4\sigma_x^2}{3}\left(\frac{\frac{1}{2z}}{1-\frac{1}{2z}} + \frac{1}{1-\frac{z}{2}}\right) = \frac{4\sigma_x^2}{3}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n\right) = \\ &= \frac{4\sigma_x^2}{3}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{0}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n}\right) \\ r_{yy}(n) &= \frac{4\sigma_x^2}{3}\left(2^{-n}u(n-1) + 2^n u(-n)\right) = \frac{4\sigma_x^2}{3}2^{-|n|} \end{aligned}$$

5. Imajući u vidu rezultat iz prethodnog zadatka i činjenicu da i u ovom slučaju važe isti uslovi, dobija se:

$$\sigma_y^2 = r_{yy}(0) = \frac{4\sigma_x^2}{3}$$

6. Za Z-transformaciju kroskorelacione funkcije važi:

$$R_{yx}(z) = H(z)R_{xx}(z) = \frac{2z}{2z-1}\Big|_{|z|>\frac{1}{2}}\ \sigma_x^2 = \frac{1}{1-\frac{1}{2z}}\sigma_x^2 = \sigma_x^2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2z}\right)^n\Big|_{|\frac{1}{2z}|<1}$$

Pa će kroskorelaciona funkcija biti:

$$r_{yx}(n) = \sigma_x^2 2^{-n}u(n) = 2^{-n+1}u(n)$$