Digitalna obrada signala
Laboratorijska vježba 1

16. oktobar 2023.

Definisanje i grafičko predstavljanje signala. Energija i konvolucija signala.

Priprema vježbe

Zadavanje signala

Posmatra se diskretni signal

$$x(n) = \delta(n) + 3\delta(n-1) - 2\delta(n-2) + 3\delta(n-4). \tag{1}$$

Uočimo da ovaj signal ima nenulte odbirke samo za $n \in \{0, 1, 2, 4\}$. Za sve druge indekse n, odbirci signala imaju vrijednost nula. Diskretni signali se reprezentuju **nizovima** (vektorima). U MATLAB/Octave okruženju, gornji signal možemo zadati na sljedeći način:

```
x=[1,3,-2,0,3]; % zadavanje signala u vidu vektora
N=length(x);    % dužina vektora x (posebno pogodno ako dužina nije očigledna)
n=0:N-1;        % zadavanje vremenske ose
stem(n,x)       % grafički prikaz diskretnog signala
```

Ako želimo da vizuelizujemo posmatrani signal, tako da apscisna osa ima adekvatne oznake, bilo je potrebno definisati i diskretni indeks vremena n. Vektor x koji zadajemo u ovom okruženju u sebi *ne sadrži informaciju o diskretnom indeksu* n. Treba voditi računa da diskretni indeks n **nije isto** što i indeks elementa u nizu.

Nakon definisanja vremenske ose, diskretni signal smo vizuelizovali korišćenjem funkcije `stem(n,x)`. Kod ove funkcije, kao i kod funkcije `plot`, može se trećim ulaznim argumentom zadati i odgovarajući stil (podsjetiti se gradiva iz Osnova računarstva II). Na primjer, opcijom `'k.'` grafik se stilizuje tako da se vrijednosti signala prikazuju tačkama crne boje: `stem(n,x,'.k')`

Napomena: Posebno je važno voditi računa da diskretni indeks vremena n nije isto što i indeks niza u MATLAB/Octave okruženju. Ukoliko se u komandnoj liniji, nakon gornjih komandi, otkuca:

```
x(2)
```

dobija se:

```
>>3
```

Primijetiti da gornja linija kôda daje vrijednost odbirka $x(1)$, odnosno u matematičkoj notaciji, važi:

$$x(1) = 3.$$

Voditi računa da se u **svim postavkama zadataka u kojima nije zadat kôd ili dio kôda**, oznaka $x(1)$ uvijek odnosi na **teorijsku notaciju**, a ne na MATLAB/Octave notaciju.

Primjer

Definisati i grafički predstaviti signal

$$x(n) = 2\delta(n+2) + \delta(n-1). \tag{2}$$

a zatim odštampati vrijednost odbirka $x(0)$.

```
x=[2,0,0,1];
n=-2:1;
stem(n,x)
x(3)
```

Posljednjom linijom kôda štampa se vrijednost $x(0)$, kojoj u MATLAB/Octave notaciji odgovara indeks 3.

Budući da u gornjem zadatku nije specificirano za koje vrijednosti n treba posmatrati signal, ograničili smo se samo na onaj skup indeksa koji kreće od pojave prvog nenultog odbirka do pojave posljednjeg nenultog odbirka u posmatranom signalu.

U praktičnim problemima, dio postavke zadatka može biti i opseg vrijednosti koje uzima indeks n, za koji treba definisati signal. Na primjer, da je u zadatku bilo zadato i da diskretni indeks vremena treba da zadovoljava uslov $10 \leq n < 10$, tada bi signal zadali na sljedeći način:

```
n=-10:9;
x=zeros(1,length(n)); % definišemo x kao vektor nula, iste dužine kao vektor n
x(9)=2;               % nenulta vrijednost definisana prvom delta funkcijom
x(12)=1;              % nenulta vrijednost definisana drugom delta funkcijom
stem(n,x)
x(11)                 % traženi odbirak čiji je diskretni indeks vremena 0
```

Predstavljena dva načina izrade zadatka su ekvivalentna, ali se mora voditi računa o zahtjevima problema koji se rješava. Očigledno, drugi način rješavanja zadatka je znatno nezgodniji u posmatranom primjeru, jer je potrebno pažljivo voditi računa o indeksima. Gornji problem je mogao biti elegantnije riješen na način koji je predstavljen u narednoj sekciji.

Definisanje signala pomoću jediničnih delta funkcija

Posmatrane signale u MATLAB/Octave okruženju možemo zadati i alternativnim putem. Naime, moguće je prvo zadati diskretni indeks vremena, a zatim signal predstaviti pomoću jediničnih delta funkcija. Prisjetimo se definicije jedinične delta funkcije:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Proizvoljni diskretni signal $x(n)$ je uvijek moguće zapisati u obliku:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k).$$

Potrebno je imati na umu za koje indekse n se posmatra zadati signal.

Da bi zadali signal $\delta(n)$, koristićemo operator logičke jednakosti u MATLAB/Octave okruženju. Naime, ako definišemo, na primjer, vektor

```
n=-5:5
```

čiji su elementi $[-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5]$, tada će operacija `n==0` dati kao rezultat vektor, sa vrijednostima 0 na pozicijama onih elemenata iz vektora `n` gdje važi $n \neq 0$, dok će, na poziciji za koju važi $n = 0$, rezultujući vektor imati vrijednost 1:

```
n==0
% rezultat je (u komandnoj liniji):
ans =
  0   0   0   0   0   1   0   0   0   0   0
```

Slično, pomjerenu delta funkciju $x(n) = \delta(n-2)$ definišemo kao:

```
x=((n-2)==0) % ne zaboraviti da je '=' operacija pridruživanja promjenljivoj x
% rezultat je:
x =
  0   0   0   0   0   0   0   1   0   0   0
```

odnosno, ekvivalentno:

```
x=(n==2)
% rezultat je:
x =
  0   0   0   0   0   0   0   1   0   0   0
```

U gornjem primjeru, vektor `n` smo definisali proizvoljno. U opštem slučaju, ovaj vektor zadajemo zavisno od samog problema koji rješavamo.

Primjer

Posmatrajmo ponovo signal definisan relacijom (1). Za ovaj signal, relevantni su diskretni indeksi $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Signal zadajemo preko jediničnih delta funkcija u obliku:

```
n=0:4;
x=(n==0)+3*(n==1)-2*(n==2)+3*(n==4);
stem(n,x)
```

Dobija se isti rezultat kao i direktnim zadavanjem vektora `x`, iako je u posmatranom slučaju zadavanje sigala pomoću delta funkcija komplikovanije.

Primjer

Posmatrajmo sada signal definisan relacijom (2), uz dodatni zahtjev da se posmatra diskretni indeks vremena $10 \leq n < 10$.

```
n=-10:9;
x=2*(n==-2)+(n==1);
stem(n,x)
```

Kao što vidimo, u posmatranom slučaju, signal je znatno pogodnije zadavati preko jediničnih delta funkcija, nego na način predstavljen u prethodnoj sekciji.

Definisanje signala pomoću jediničnih step funkcija

Često se signali zadaju analitički uz korišćenje jedinične step funkcije:

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Slično kao ranije, u MATLAB/Octave okruženju moguće je koristiti operatore poređenja kako bi se zadala step funkcija. Definišimo prvo vektor `n`, na primjer:

```
n=-5:5
```

Signal $x(n) = u(n)$ tada zadajemo kao:

```
x=(n>=0)
% rezultat je:
x =
  0   0   0   0   0   1   1   1   1   1   1
```

Kao što vidimo, vrijednosti 1 se dobijaju za one elemente vektora `n` za koje važi $n \geq 0$, dok se vrijednosti 0 dobijaju za one pozicije za koje uslov nije ispunjen.

Pomjerenu step funkciju, $x(n) = u(n-2)$, za posmatrane indekse n dobijamo u obliku:

```
x=(n-2>=0)
% rezultat je:
x =
  0   0   0   0   0   0   0   1   1   1   1
```

Primjer

U MATLAB/Octave okruženju, zadati i grafički predstaviti signal

$$x(n) = 2^{-n}u(n-1),$$

a zatim odštampati vrijednost odbiraka $x(-2), x(0)$ i $x(1)$. Neka se posmatra diskretni indeks vremena $-5 \leq n \leq 100$.

```
n=-5:100;
x=2.^(-n).*(n>=1); % Pitanje iz OR2: zašto se moraju koristiti operatori sa tačkom?
stem(n,x,'.')

% tražene vrijednosti odbiraka su:
x(4)
x(6)
x(7)
```

Uočiti da je diskretni indeks vremena $n = -2$ četvrti element u MATLAB/Octave vektoru `n`, pa se tražena vrijednost signala $x(-2)$ dobija u MATLAB/Octave okruženju kao `x(4)`. **U svakom trenutku treba voditi računa o razlici između matematičke (teorijske) i MATLAB/Octave notacije**, odnosno, indeksiranja.

Signali sa velikim brojem odbiraka

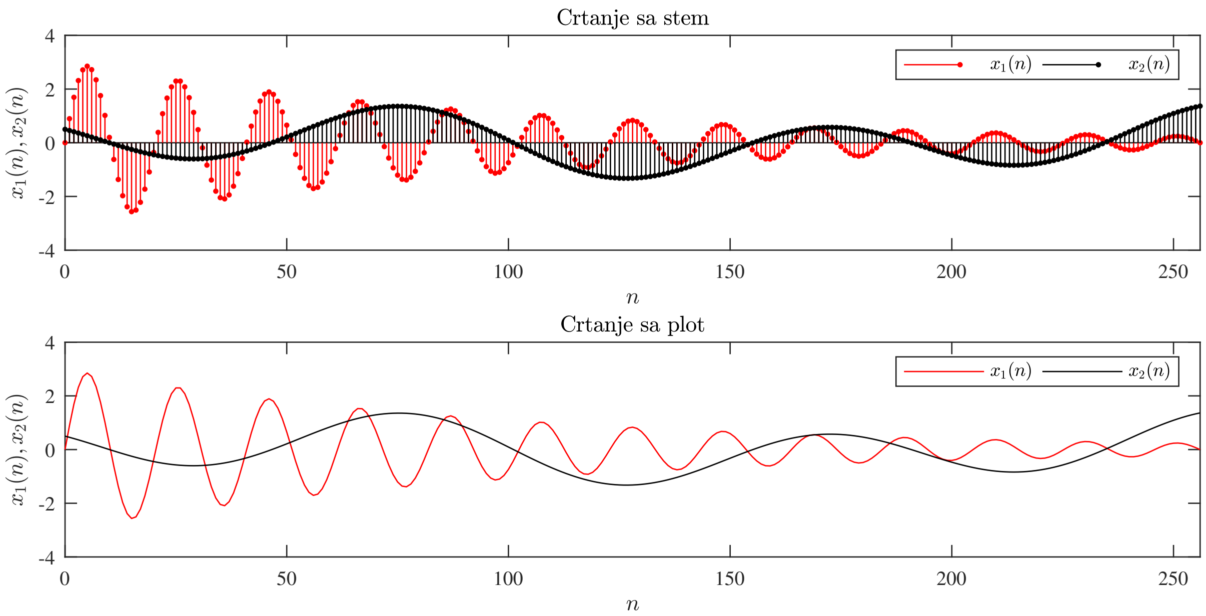
Ukoliko posmatrani diskretni signal ima veliki broj odbiraka, umjesto vizuelizacije primjenom funkcije `stem`, može se koristiti funkcija `plot`.

Na primjer, neka se posmatraju signali

$$x_1(n) = 3e^{-n/100}\sin\left(\frac{50\pi n}{512}\right)$$
$$x_2(n) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{5\pi n}{512}\right) + \cos\left(\frac{11\pi n}{512} + \frac{\pi}{3}\right),$$

za $0 \leq n \leq 512$. Predstaviti signale u istom grafičkom potprozoru korišćenjem funkcije `stem`, a zatim ih predstaviti u drugom grafičkom potprozoru pomoću funkcije plot.

```
 n=0:256;
 x1=3*exp(-n/100).*sin(50*pi*n/512);
 x2=0.5*sin(5*pi*n/512)+cos(11*pi*n/512+pi/3);
 figure(1)
 subplot(2,1,1) % prvi potprozor
```



Slika 1: Prikaz dva signala iz primjera pomoću `stem` funkcije (gore) i `plot` funkcije (dolje)

```
stem(n,x1,'r.')
hold on         % omogućava crtanje druge funkcije
stem(n,x2,'k.')
legend('x_1(n)','x_2(n)','orientation','horizontal')
xlabel('n'), ylabel('x_1(n),x_2(n)')
title('Crtanje sa stem')
axis tight     % istražiti samostalno
ylim([-4,4])   % istražiti samostalno

subplot(2,1,2) % drugi potprozor
plot(n,x1,'r',n,x2,'k')
legend('x_1(n)','x_2(n)','orientation','horizontal') % istražiti samostalno
xlabel('n'), ylabel('x_1(n),x_2(n)')
title('Crtanje sa plot')
axis tight     % istražiti
ylim([-4,4])   % istražiti

```

Prethodni kôd generiše sliku 1 (mimo opcija za štampanje formula sa LaTeX interpreterom i podešavanja veličine slika i fonta, koje su upotrijebljene radi bolje preglednosti materijala).

Energija signala

Energija signala $x(n)$ računa se po formuli:

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2.$$

Primjer

Izračunati energiju signala:

$$x_1(n) = 3e^{-n/100} \sin\left(\frac{50\pi n}{512}\right),$$

definisanog za $0 \leq n \leq 512$.

```
n=0:256;
x1=3*exp(-n/100).*sin(50*pi*n/512);
Ex=sum(abs(x1).^2)
```

Konvolucija

Naredba `conv` služi za računanje konvolucije dva diskretna signala, odnosno za množenje dva polinoma. U diskretnom domenu, konvolucija između signala $x(n)$ i $h(n)$ ($h(n)$ može biti impulsni odziv sistema) definiše se kao:

$$y(n) = x(n) *_n h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k).$$

Primjer

Izračunati i grafički predstaviti konvoluciju signala $x(n) = \delta(n) + \delta(n-3) + 2\delta(n-4)$ i signala $h(n) = 2^{-n}u(n-1)$, gdje je $-10 \leq n \leq 100$. Kolika je energija dobijenog signala?

```
1 n=0:100;
2 x=(n==0)+(n==3)+2*(n==4);
3 h=2.^(-n).*(n>=1);
4 Nx=length(x), Nh=length(h);
5 y=conv(x,h);
6 nr=0:Nx+Nh-2
7 stem(nr,y,'.')
8 disp('Energija je:')
9 sum(abs(y).^2)
```

Za signal $x(n)$ dužine N_x odbiraka i za signal $h(n)$ dužine N_h odbiraka, dužina rezultujuće konvolucije $y(n) = x(n) * h(n)$ je: $N_x + N_h - 1$.

Ukoliko se u gornjoj izradi linija 2 kôda zamijeni sa:

```
x=[1,0,0,1,2];
```

dobija se ista vrijednost energije, dok su prvi (nenulti) odbirci signala takođe isti: $y(0) = 0$, $y(1) = 0.5$, $y(2) = 0.25$, itd. Razlikuje se, međutim, dužina rezultujuće konvolucije. U drugom slučaju je ona znatno smanjena, jer je smanjena dužina vektora `x`.

Uočiti, takođe, da je u posmatranom primjeru redefinisana rezultujuća vremenska osa, `nr=:Nx+Nh-2`. O ovom aspektu treba posebno voditi računa. Na primjer, posebno nezgodno može biti ukoliko se odbirci u jednom od operanada konvolucije pojavljuju na negativnim indeksima diskretnog vremena. U tom slučaju je najbolje pažljivo teorijski razmotriti šta je prvi indeks u rezultujućoj konvoluciji.

Zadaci

1. Definisati i grafički predstaviti signale:

   (a) $x(n) = \delta(n+3) - 2\delta(n) + \delta(n-1)$, za $-5 \leq n \leq 5$.

   (b) $y(n) = u(n+1) + 2u(n-3) - 3u(n-8)$, za $-10 \leq n \leq 10$.

   (c) $z(n)$ koji je predstavljen na slici 2.

   (d) $h(n) = 2^{-n}u(n) - 3^{-n}u(n-5)$ (sami definišite n).

   (e) $s_1(n) = \sin\frac{2\pi n}{8}$ (sami definišite n).

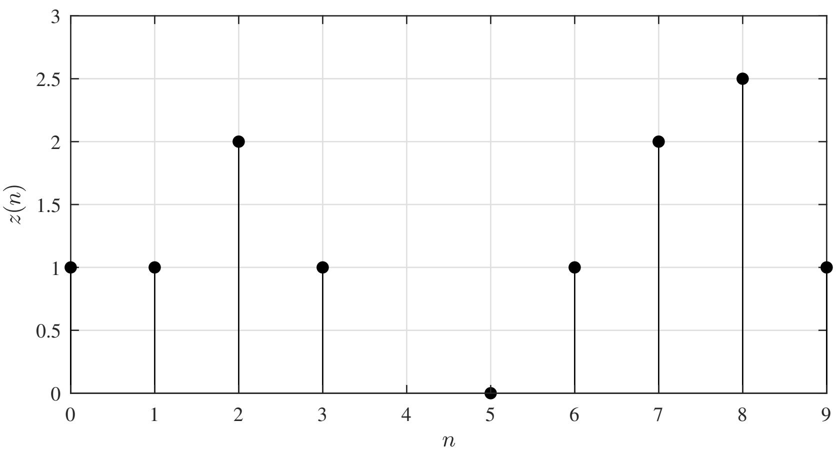
   (f) $s_2(n) = \sin 0.78n$ (sami definišite n).

2. Za svaki signal iz prethodnog zadatka izračunati energiju.

3. Odrediti konvoluciju signala $x(n) = u(n) - u(n-6)$ i signala $h(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + 2\delta(n-2) + \delta(n-3)$. Koje su vrijednosti odbiraka $y(0)$, $y(1)$, $y(2)$ i $y(3)$?

4. Odrediti konvoluciju signala $x(n) = u(n) - u(n-5)$ i $h(n) = \delta(n+1) + 2\delta(n) + \delta(n-1)$. Koje su vrijednosti odbiraka $y(0)$, $y(1)$, $y(2)$ i $y(3)$? Koja je vrijednost odbirka $y(-1)$?

5. Odrediti konvoluciju signala $x(n) = u(n)$ i $h(n) = 2^{-n}u(n)$. Sami definišite vremenski indeks n. Uporediti rezultate za različite dužine vektora `n`.



Slika 2: Signal $z(n)$ iz zadatka za samostalni rad