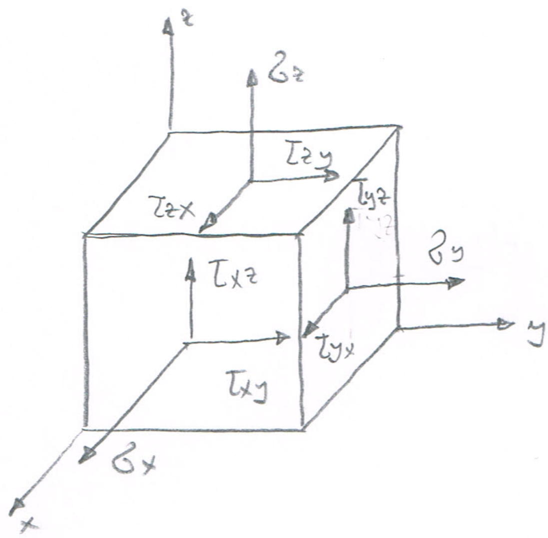
UNIVERZITET CRNE GORE
POMORSKI FAKULTET
POMORSKE NAUKE

OTPORNOST MATERIJALA

3. KOLOKVIJUM



NAPONI, DEFORMACIJE
i VEZE IZMEĐU NJIH

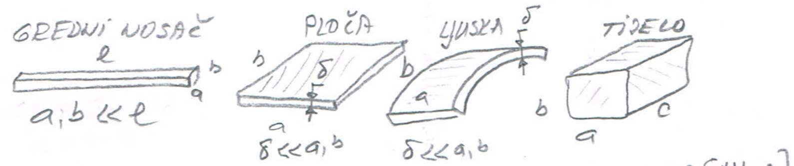
KOTOR 2017

NAPONI I DEFORMACIJE I VEZE IZMEĐU NJIH

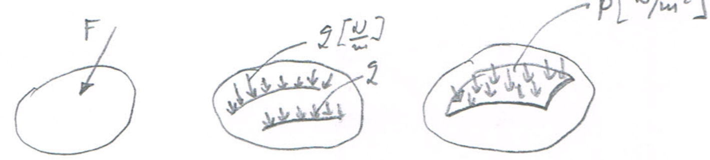
1. UVODNE NAPOMENE

OTPORNOST MATERIJALA JE DIO MEHANIKE DEFORMABILNOG TIJELA KOJI SE BAVI IZNALAŽENJEM I PROUČAVANJEM VEZE IZMEĐU DVIJE GRUPE PARAMETARA I TO: OBLIKA TIJELA, OPTEREĆENJA NA TIJELO I VRSTE MATERIJALA OD KOJEGA JE TIJELO IZRAĐENO, SA JEDNE STRANE I UNUTRAŠNJIH SILA-NAPONA I DEFORMACIJA TIJELA, SA DRUGE STRANE.

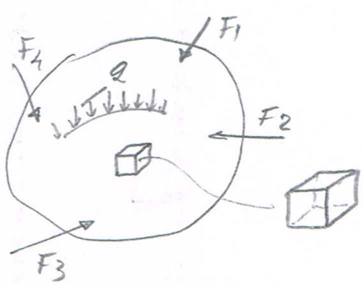
SMATRAĆEMO DA JE TIJELO KOJE POSMATRAMO: DEFORMABILNO, ELASTIČNO, HOMOGENO I DA IMA OBLIK GREDNOG NOSAČA. INAČE, **TIJELA PO SVOM OBLIKU** MOGU BITI U OBLIKU: GREDE (GREDNOG NOSAČA), PLOČE, LJUSKE I TRODIMENZIONALNOG TIJELA (SLIKA)

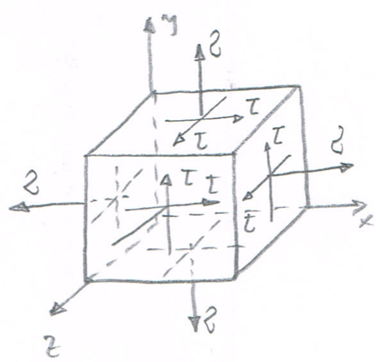


OPTEREĆENJE NA TIJELO TJ KONSTRUKCIJU MOŽE BITI: KONCENTRISANO, RASPOREĐENO PO LINIJI-KONTINUALNO (JEDNOLIKO ILI NEJEDNOLIKO), RASPOREĐENO PO POVRŠINI (JEDNOLIKO ILI NEJEDNOLIKO) KAO NA SLICI



2. POJAM I ANALIZA UNUTRAŠNJIH SILA - NAPONA

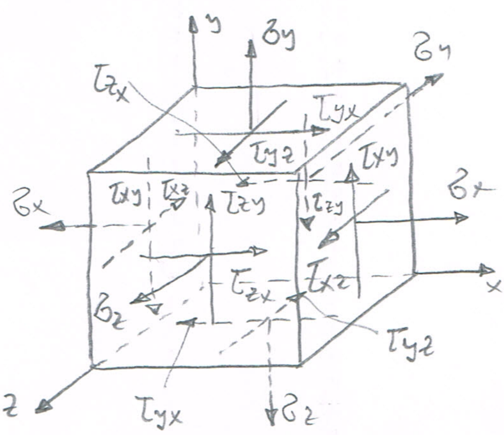




POD DEJSTVOM SPOLJAŠNJEG OPTEREĆENJA U UNUTRAŠNJOSTI TIJELA SE POJAVLJUJU UNUTRAŠNJE SILE KOJE DJELUJU IZMEĐU POJEDINIH DJELOVA I DJELIĆA TIJELA. DA BI TE UNUTRAŠNJE SILE UČINILI VIDLJIVIM, IZDVOJIĆEMO IZ TIJELA DJELIĆ U OBLIKU KVADRA MALIH DIMENZIJA (ELEMENTARNOG KVADRA) PA ĆEMO NA NJEGOVIM STRANICAMA PRIKAZATI UNUTRAŠNJE SILE (NAPONE) KOJE PREDSTAVLJAJU UTICAJ ODBAČENOG DIJELA TIJELA NA POSMATRANI DJELIĆ. TI UTICAJI SU KONTINUALNO (NEPREKIDNO) RASPOREĐENI PO STRANAMA KVADRA ŠTO ZNAČI DA IMAJU DIMENZIJU [SILA/POVRŠINA]. U PRINCIPU UNUTRAŠNJE SILE (NAPONI) MOGU BITI TROJAKI: NORMALNE NA ODGOVARAJUĆU STRANU KVADRA TJ NORMALNI NAPON σ (SIGMA) I MOGU LEŽATI U ODGOVARAJUĆIM STRANAMA KVADRA TJ TANGENCIJALNI NAPON τ (TAU) KAO NA SLICI

DA BI NORMALNE NAPONE MEĐUSOBNO RAZLIKOVALI (JER NE MORAJU BITI MEĐUSOBNO ISTI) DODIJELIĆEMO IM INDEKSE KOJI OZNAČAVAJU PRAVCE

OSA KOORDINATNOG SISTEMA U KOJIMA SU USMJERENI. TAKO IMAMO NORMALNE NAPONE: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$. DA BI TANGENCIJALNE NAPONE MEĐUSOBNO RAZLIKOVALI NIJE DOVOLJNO DA IM DODIJELIMO ISTE INDEKSE KAO ZA NORMALNE NAPONE (ODNOSE SE NA ISTU RAVAN) VEĆ IM MORAMO DODATI JOŠ PO JEDAN INDEKS KOJI ĆE IH MEĐUSOBNO RAZLIKOVATI, A KOJI OZNAČAVA PRAVAC KOORDINATNE OSE. TAKO IMAMO PAROVE TANGENCIJALNIH NAPONA: τ_{xy}; τ_{xz}; τ_{yx}, τ_{yz}; τ_{zx}, τ_{zy}.



S OBZIROM DA UNUTRAŠNJE SILE (NAPONI) MOGU IMATI DVA SMJERA VAŽI SLEDEĆI DOGOVOR (KONVENCIJA) ZA ZNAK NAPONA: ZA STRANE KVADRA ČIJA SE NORMALA POKLAPA SA POZITIVNIM SMJEROM JEDNE OD KOORDINATNIH OSA POZITIVNI SU ONI NAPONI ČIJI SE SMJEROVI POKLAPAJU SA POZITIVNIM SMJEROVIMA KOORDINATNIH OSA, A NEGATIVNI SU ONI ČIJI SU SMJEROVI SUPROTNI OD POZITIVNIH SMJEROVA KOORDINATNIH OSA. ZA STRANE KVADRA ČIJE SU NORMALE SUPROTNE OD POZITIVNIH SMJEROVA KOORDINATNIH OSA POZITIVNI SU ONI NAPONI ČIJI SU SMJEROVI SUPROTNI OD POZITIVNIH SMJEROVA KOORDINATNIH OSA, A NEGATIVNI SU ONI KOJI IMAJU SMJEROVE KOJI SE POKLAPAJU SA POZITIVNIM SMJEROVIMA KOORDINATNIH OSA. POZITIVNI NAPONI SU PRIKAZANI NA SLICI.

DAKLE, STANJE NAPONA - UNUTRAŠNJIH SILA NA STRANAMA PROIZVOLJNO UOČENOG DJELIĆA JE ODREĐENO SKUPOM OD SLEDEĆIH DEVET PODATAKA:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix}$$

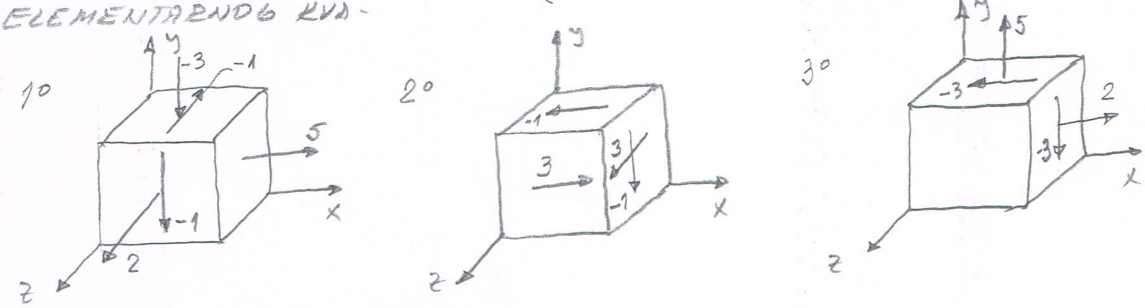
TAJ SKUP OD DEVET PODATAKA SE ZOVE TENZOR NAPONA.
IMAJUĆI U VIDU DA DJELIĆ TIJELA MORA BITI U RAVNOTEŽI POD DEJSTVOM UNUTRAŠNJIH SILA NIJE TEŠKO DOKAZATI STAV O KONJUGOVANOSTI (PARNOSTI) TANGENCIJALNIH NAPONA KOJI GLASI DA SU TANGENCIJALNI NAPONI SA ISTIM INDEKSIMA NA RAZLIČITIM MJESTIMA (STRANAMA) ISTI TJ: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$; $\tau_{xz} = \tau_{zx}$; $\tau_{yz} = \tau_{zy}$.

POSTO JE DJELIĆ BESKONAČNO MALIH DIMENZIJA, RADI SE O TAČKI U REALNIM USLOVIMA TO SE MOŽE REĆI DA JE **NAPONSKO STANJE U TAČKI NEKOG OPTEREĆENOG TIJELA ODREĐENO SA ŠEST PODATAKA**: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$.

PRIMJER STANJE UNUTRAŠNJIH SILA (NAPONA) U DJELIĆU (TAČKI) OPTEREĆENOG TIJELA ODREĐENO JE SLEDEĆIM TENZORIMA NAPONA.

$$1^\circ \begin{Bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{Bmatrix} \quad 2^\circ \begin{Bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad 3^\circ \begin{Bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

PRIKAZATI UNUTRAŠNJE SILE NA STRANAMA DJELIĆA TIJELA U OBLIKU ELEMENTARNOG KVADRA

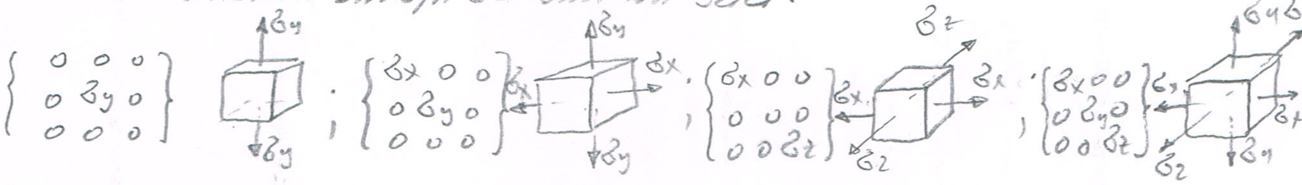


3. VRSTE NAPONSKIH STANJA

ZAVISNO OD TOGA KOJE SU KOMPONENTE TENZORA NAPONA RAZLIČITE OD NULE RAZLIKUJEMO SLJEDEĆE VRSTE NAPONSKIH STANJA: OSNA, RAVANSKA I PROSTORNA.

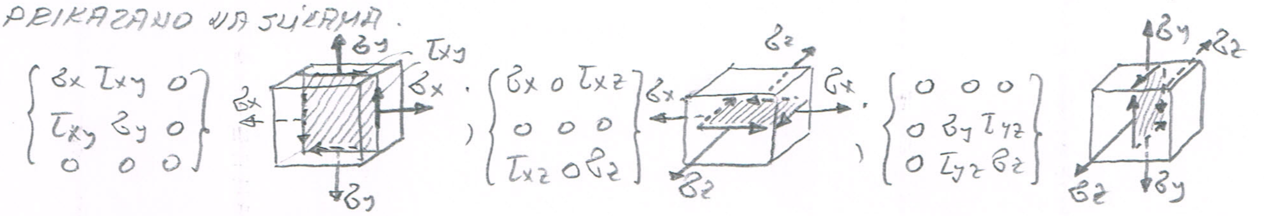
a) OSNA NAPONSKA STANJA SE KARAKTERIŠU TIME DA KOD NJIH NEMA TANGENCIJALNIH NAPONA A IMA JEDAN, DVA ILI TRI NORMALNA NAPONA, PA RAZLIKUJEMO JEDNOOSNO, DVOOSNO ILI TROOSNO NAPONSKO STANJE. PRIMJERI TIH NAPONSKIH STANJA SU DATI NA SLICI.

$$\begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix};\quad \begin{Bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix};\quad \begin{Bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{Bmatrix};\quad \begin{Bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{Bmatrix}$$



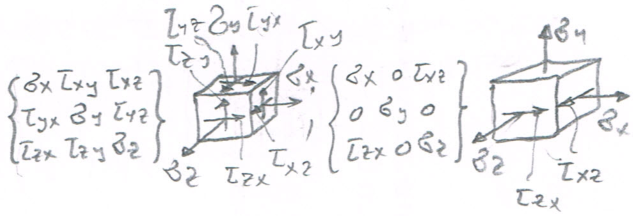
b) RAVANSKA NAPONSKA STANJA SE KARAKTERIŠU TIME DA POSTOJE I NORMALNI I TANGENCIJALNI NAPONI KOJI SE NALAZE U ISTOJ RAVNI, KAKO JE PRIKAZANO NA SLIKAMA.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix};\quad \begin{Bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & \sigma_z \end{Bmatrix};\quad \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & \tau_{yz} \\ 0 & \tau_{yz} & \sigma_z \end{Bmatrix}$$



c) PROSTORNO NAPONSKO STANJE SE KARAKTERIŠE ČINJENICOM DA SU JOŠ NEKI NAPONI U ODNOSU NA RAVANSKO STANJE NAPONA RAZLIČITI OD NULE. PRIMJERI TAKVIH NAPONSKIH STANJA SU DATI NA SLICI

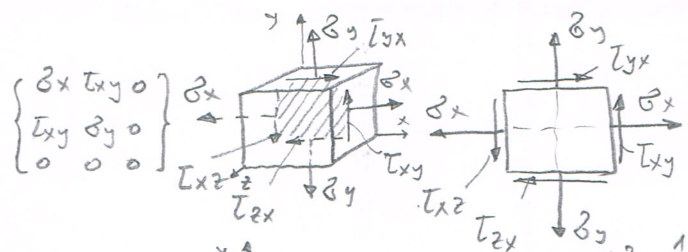
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix};\quad \begin{Bmatrix} \sigma_x & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ \tau_{zx} & 0 & \sigma_z \end{Bmatrix}$$



OSOBINE RAVANSKOG STANJA NAPONA

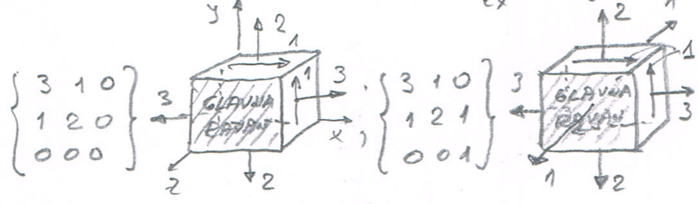
• KOD RAVANSKOG STANJA NAPONA, NPR. U RAVNI X-Y, KAO NA SLICI, NA STRANAMA KVADRA KOJE SU PARALELNE RAVNI U KOJOJ LEŽE NAPONI (RAVAN ČIJA JE Z-OSA NORMALA) NEMA TANGENCIJALNIH NAPONA. TE RAVNI SE ZOVU GLAVNE RAVNI NAPONA, A NJIHOVE NORMALE GLAVNI PRAVCI NAPONA.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

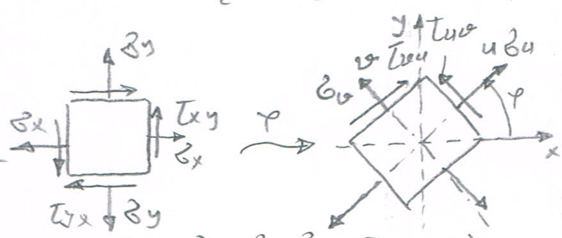


NA SLIKAMA SU PRIKAZANI PRIMJERI DJELIĆA TIJELA U OBLIKU ELEMENTARNOG KVADRA KOJI IMAJU GLAVNE PRAVCE NAPONA U PRAVCU Z-OSE.

$$\begin{Bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix};\quad \begin{Bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$



• ROTACIJOM DJELIĆA TIJELA KOJI SE NALAZI U RAVANSKOM NAPONSKOM STANJU NPR. U RAVNI X-Y OKO GLAVNE Z-OSE NORMALNI I TANGENCIJALNI NAPONI NA ZAROTIRANIM STRANAMA KVADRA SE MIJENJAJU ZAVISNO OD UGLA ROTACIJE φ TJ $\sigma=\sigma(\varphi)$; $\tau=\tau(\varphi)$

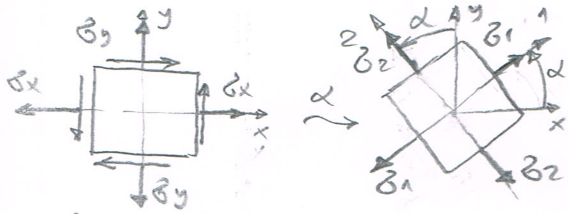


$$\sigma_u=\sigma_u(\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy},\varphi)$$
$$\sigma_v=\sigma_v(\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy},\varphi)$$
$$\tau_{uv}=\tau_{uv}(\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy},\varphi)$$

- ROTACIJOM DJELIĆA TIJELA ZA UGAO α ODREĐEN SLJEDEĆIM IZRAZOM: $\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)$
DOBIJA SE POLOŽAJ DJELIĆA U KOJEM NA STRANAMA KVADRA **NEMA TANGENCIJALNIH NAPONA** VEĆ **IMA SAMO NORMALNIH NAPONA**. TO SU TZV. **GLAVNI NAPONI** ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$) A PRAVCI NORMALA NA STRANAMA TAKVOG KVADRA SU GLAVNI PRAVCI NAPONA (1, 2, 3).
VRIJEDNOSTI GLAVNIH NAPONA SU ODREĐENE SLJEDEĆIM IZRAZIMA. $\sigma_1, \sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$

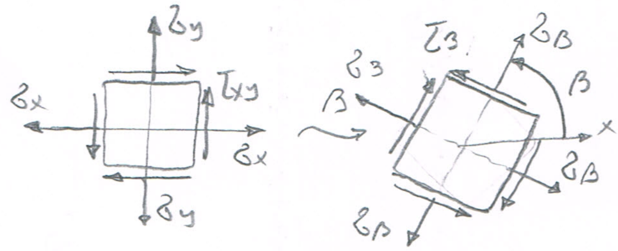
$\tau_{12} = 0$

VAŽI DA AKO JE $\sigma_x > \sigma_y$ ONDA ROTACIJOM ZA UGAO α OSA X PRELAZI U 1, A OSA Y U 2 ($x \xrightarrow{\alpha} 1$; $y \xrightarrow{\alpha} 2$) A AKO JE $\sigma_x < \sigma_y$ ONDA VAŽI: $x \xrightarrow{\alpha} 2$; $y \xrightarrow{\alpha} 1$



NAJVEĆI NORMALNI NAPON SE OZNAČAVA SA σ_1, SREDNJI SA σ_2 A NAJMANJI SA σ_3, TJ. $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

- ROTACIJOM DJELIĆA TIJELA ZA UGAO β ODREĐEN SLJEDEĆIM IZRAZOM: $\beta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}\right) = \alpha \pm 45°$
DOBIJA SE POLOŽAJ DJELIĆA TAKAV DA NA NJEGOVIM STRANAMA POSTOJE **ISTI NORMALNI NAPONI σ_β** A **TANGENCIJALNI NAPONI τ_β** IMAJU **MAKSIMALNE VRIJEDNOSTI** U ODNOSU NA SVE DRUGE POLOŽAJE DJELIĆA. NAPONI σ_β I τ_β SU ODREĐENI SLJEDEĆIM IZRAZIMA.



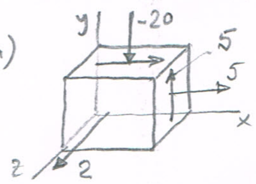
$$\sigma_\beta = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \; ; \; \tau_\beta = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

PRIMJER

NAPONSKO STANJE U TAČKI OPTEREĆENOG TIJELA JE ODREĐENO TENZOROM NAPONA
$$\begin{Bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 5 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Bmatrix}$$

a) PRIKAZATI DJELIĆ TIJELA U OBLIKU KVADRA
b) ODREDITI VRIJEDNOSTI GLAVNIH NAPONA I POLOŽAJ GLAVNIH OSA
c) ODREDITI UGAO β I NAPONE σ_β I τ_β

a)



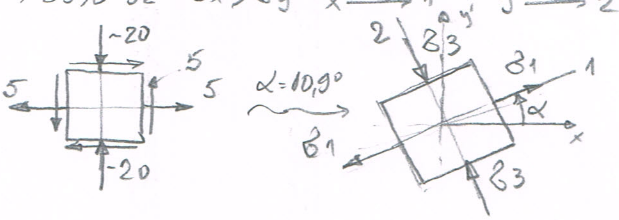
b) JEDAN OD GLAVNIH NAPONA IMA VRIJEDNOST 2, A VRIJEDNOSTI DRUGA DVA GLAVNA NAPONA DOBIJAMO IZ IZRAZA:

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(5-20) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(5+20)^2 + 4 \cdot 5^2} = \begin{cases} 19{,}4 \\ -34{,}4 \end{cases}$$

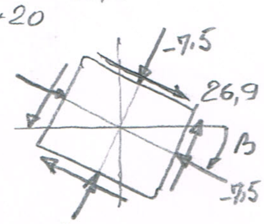
DAKLE, $\sigma_1 = 19{,}4$; $\sigma_2 = 2$; $\sigma_3 = -34{,}4$

POLOŽAJ GLAVNIH OSA JE ODREĐEN UGLOM α $\quad \alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2 \cdot 5}{5+20} = 10{,}9°$

POŠTO JE $\sigma_x > \sigma_y$ $\quad x \xrightarrow{\alpha} 1$, $y \xrightarrow{\alpha} 2$

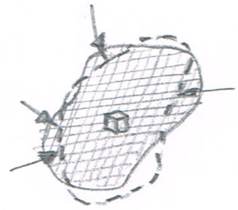


c) POLOŽAJ OSA RAVNI U KOJIMA TANGENCIJALNI NAPON IMA EKSTREMNU VRIJEDNOST I VRIJEDNOST NORMALNIH I TANGENCIJALNIH NAPONA U NJIMA ODREĐENI SU SLJEDEĆIM VRIJEDNOSTIMA: $\beta = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(-\frac{5+20}{2 \cdot 5}\right) = -34{,}1°$; $\sigma_\beta = \frac{1}{2}(5-20) = -7{,}5$; $\tau_\beta = \frac{1}{2}(19{,}4 + 34{,}4) = 26{,}9$

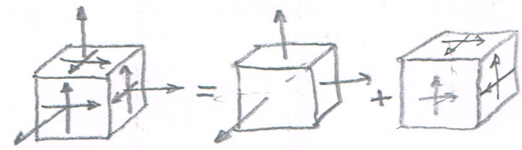


4. Pojam i analiza linijskih i ugaonih deformacija

Pod dejstvom spoljašnjeg opterećenja tijelo se deformiše (mijenja oblik i zapreminu), što znači da iz nedeformisane konfiguracije (puna linija, slika) nakon djelovanja spoljašnjeg opterećenja prelazi u deformisanu konfiguraciju (isprekidana linija). Ako zamislimo da se tijelo sastoji od beskonačno mnogo djelića u obliku kvadra, jasno je da kada se tijelo kao cjelina deformiše deformisaće se i pojedini djelići u obliku kvadra u nedeformisanom obliku.

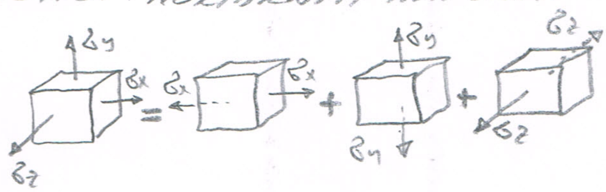


Proizvoljno uočeni djelić će se deformisati pod dejstvom opterećenja koje na njega djeluje, a to su unutrašnje sile (naponi).
Zaključak o tome kako se tijelo deformiše pod dejstvom napona (normalnih i tangencijalnih) izvešćemo tako što ćemo posmatrati kako se djelić deformiše samo pod dejstvom normalnih napona a zatim samo pod dejstvom tangencijalnih napona (slika)

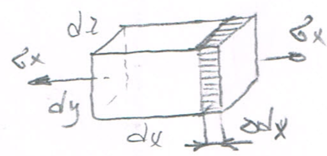


a) Deformisanje djelića pod dejstvom normalnih napona
Pojam linijske deformacije.

Da bi zaključili kako se djelić deformiše pod istovremenim dejstvom sva tri normalna napona razmotrićemo kako se djelić deformiše samo pod dejstvom samo jednog normalnog napona (npr. σ_x), a zatim po analogiji to primijeniti u slučajevima kada pojedinačno djeluju preostala dva normalna napona (σ_y, σ_z). Na kraju ćemo izvesti zaključak kako se djelić deformiše pod istovremenim dejstvom sva tri normalna napona.



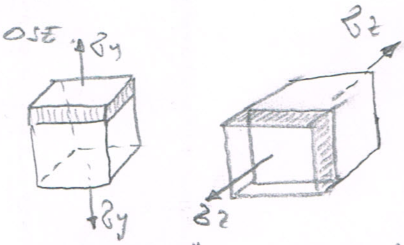
Pod dejstvom samo jednog napona, npr. σ_x, djelić se deformiše tako što će mu se dužina dx u pravcu dejstva napona σ_x povećati za Δdx, izdužiće se za Δdx (slika)



Pod linijskom deformacijom ε_x se podrazumijeva odnos priraštaja Δdx i dužine dx prije deformisanja tj.

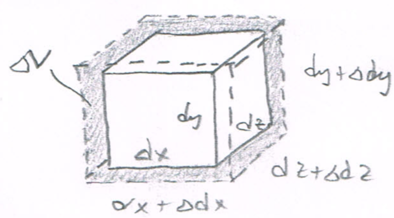
$$\varepsilon_x = \frac{\Delta(dx)}{dx}$$ - linijska deformacija u pravcu x-ose.

Analogno, pod dejstvom samo normalnih napona σ_y i σ_z ostvaruju se promjene dužina ivica kvadra u pravcima y i z odnosno postoje priraštaji Δdy i Δdz a samim tim i linijske deformacije ε_y i ε_z



$$\varepsilon_y = \frac{\Delta(dy)}{dy} \qquad \varepsilon_z = \frac{\Delta(dz)}{dz}$$

Dakle, pod istovremenim dejstvom sva tri normalna napona djelić će se deformisati tako da mu sve tri ivice dobijaju priraštaj (mijenjaju se) što znači da djelić zadržava oblik kvadra ali dolazi do promjene njegove zapremine (slika)

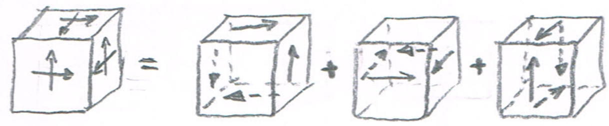


Ako polaznu zapreminu označimo sa V a priraštaj zapremine sa ΔV onda se pod relativnom promjenom zapremine (zapreminskom deformacijom) podrazumijeva

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_V = \text{.... može se dokazati ......} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

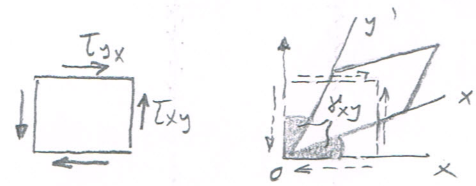
b) DEFORMISANJE DJELIĆA POD DEJSTVOM TANGENCIJALNIH NAPONA. POJAM UGAONE DEFORMACIJE

DA BI ZAKLJUČILI KAKO SE DJELIĆ DEFORMIŠE POD ISTOVREMENIM DEJSTVOM TANGENCIJALNIH NAPONA RAZMOTRIĆEMO PRVO KAKO SE DJELIĆ DEFORMIŠE SAMO POD DEJSTVOM TANGENCIJALNIH NAPONA



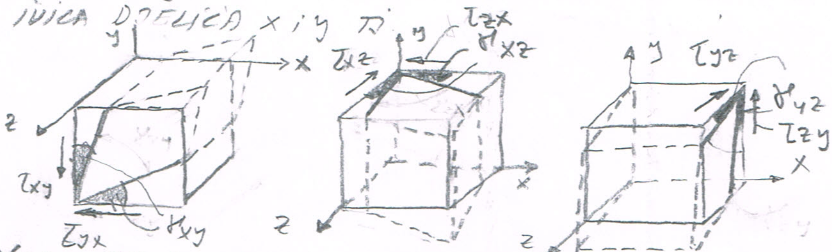
$\tau_{xy} = \tau_{yx}$, A ZATIM PO ANALOGIJI ZAKLJUČITI KAKO SE DEFORMIŠE POD DEJSTVOM TANGENCIJALNIH NAPONA $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ I $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, I NA KRAJU ĆEMO IZVESTI ZAKLJUČAK KAKO SE DJELIĆ DEFORMIŠE POD ISTOVREMENIM DEJSTVOM SVIH TANGENCIJALNIH NAPONA.

POD DEJSTVOM SAMO TANGENCIJALNIH NAPONA τ_{xy} I τ_{yx} (SLIKA) DJELIĆ SE DEFORMIŠE TAKO DA SE IZDUŽUJE U DIJAGONALNOM PRAVCU ŠTO ZNAČI DA SE PRVOBITNO PRAVI UGAO IZMEĐU IVICA DJELIĆA MIJENJA (POVEĆAVA SE ILI SMANJUJE) I PRAVOUGAONIK SE TRANSFORMIŠE U ROMBOID



POD **UGAONOM DEFORMACIJOM** γ_{xy} PODRAZUMIJEVA SE PROMJENA PRVOBITNOG PRAVOG UGLA IZMEĐU IVICA DJELIĆA X I Y TJ.

$$\gamma_{xy} = 90° - \sphericalangle x'0y' \text{ (SLIKA)}.$$



ANALOGNO, POD DEJSTVOM SAMO TANGENCIJALNOG NAPONA τ_{xz} ODNOSNO τ_{yz} OSTVARUJU SE UGAONE DEFORMACIJE: $\gamma_{xz} = 90 - \sphericalangle x'0z'$ I $\gamma_{yz} = 90 - \sphericalangle y'0z'$

POŠTO DVA TANGENCIJALNA NAPONA NPR. τ_{xy} I τ_{yx} ($\tau_{xy} = \tau_{yx}$) IZAZIVAJU JEDNU UGAONU DEFORMACIJU γ_{xy} TO ZNAČI DA JEDNOM TANGENCIJALNOM NAPONU PRIPADA POLOVINA UGAONE DEFORMACIJE γ_{xy}: $\tau_{xy} \rightarrow \frac{1}{2}\gamma_{xy}$
ANALOGNO VAŽI $\tau_{xz} \rightarrow \frac{1}{2}\gamma_{xz}$; $\tau_{yz} \rightarrow \frac{1}{2}\gamma_{yz}$.

DAKLE, POD ISTOVREMENIM DEJSTVOM SVIH TANGENCIJALNIH NAPONA DJELIĆ SE DEFORMIŠE TAKO DA MIJENJA OBLIK ALI NE I ZAPREMINU, TJ. DJELIĆ OBLIKA KVADRA PRELAZI U DJELIĆ ROMBOIDALNOG OBLIKA KOD KOGA VIŠE UGLOVI IZMEĐU POJEDINIH IVICA NIJESU 90°.

AKO NA DJELIĆ **ISTOVREMENO DEJSTVUJU I NORMALNI I TANGENCIJALNI NAPONI**, DJELIĆ SE DEFORMIŠE TAKO ŠTO MU SE MIJENJAJU I ZAPREMINA I OBLIK. TO ZNAČI DA SE MIJENJAJU I DIMENZIJE IVICA KVADRA (DJELIĆA), A ISTOVREMENO SE MIJENJAJU I PRVOBITNO PRAVI UGLOVI IZMEĐU IVICA DJELIĆA KVADRA.

SKUP OD SLEDEĆIH DEVET ODNOSNO ŠEST VELIČINA SA KOJIMA JE U POTPUNOSTI DEFINISANA DEFORMISANA KONFIGURACIJA POSMATRANOG DJELIĆA OPTEREĆENOG TIJELA, ZOVE SE **TENZOR DEFORMACIJE**.

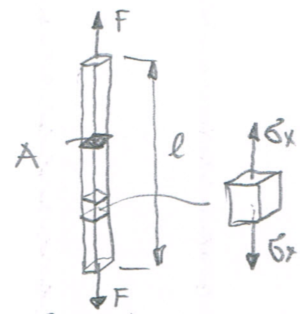
$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{Bmatrix}$$

5. Veze između deformacija i napona

Iz prethodnih razmatranja jasno je da normalni naponi izazivaju linijske deformacije a tangencijalni naponi ugaone deformacije. Normalni naponi ne utiču na promjenu oblika tj. na ugaone deformacije dok tangencijalni naponi ne izazivaju promjenu zapremine tj. ne utiču na linijske deformacije.

a) Veza između linijske deformacije i normalnog napona kod jednoosnog naponskog stanja — Hukov zakon

Kod jednoosnog naponskog stanja veza između deformacije ε_x i napona σ_x određena je eksperimentalnim putem konstruisanjem tzv. dijagrama istezanja materijala.

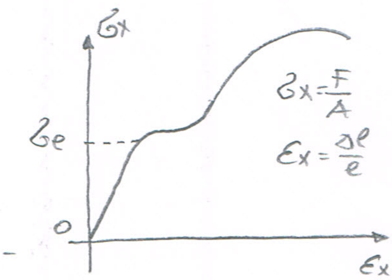


Dijagram istezanja materijala se konstruiše tako što se epruveta (greda, šipka) površine poprečnog presjeka A i dužine l aksijalno (uzdužno) napreže - opterećuje tj. isteže silama poznatog intenziteta F. Svaki djelić epruvete u obliku elementarnog kvadra se nalazi u jednoosnom naponskom stanju ($\sigma_x \neq 0$). Veza između napona σ_x i sile F određena je izrazom:

$$\sigma_x = \frac{F}{A}$$

Linijska deformacija ε_x je određena izrazom

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l}$$



gdje je Δl izduženje epruvete dužine l pod dejstvom sile F. Dijagram istezanja materijala epruvete se konstruiše tako što se za svaku zadatu vrijednost sile F izračunava napon σ_x (pri čemu je A poznato. Takođe, se mjerenjem za svaku vrijednost sile F može odrediti promjena dužine epruvete Δl (mjerenjem) za poznatu vrijednost polazne dužine epruvete l. To znači da se može sračunati ε_x. Nanošenjem vrijednosti ε_x i σ_x u koordinatnom sistemu $\sigma_x - \varepsilon_x$ dobija se dijagram istezanja epruvete (slika). Oblast koja je definisana vrijednostima napona od 0 do σ_e je tzv. oblast elastičnih deformacija. U toj oblasti važi linearna veza između deformacija i napona, kao što se vidi sa dijagrama. Ona ima izgled

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x$$

gdje je E - moduo elastičnosti za materijal od kojeg je izrađena epruveta i predstavlja koeficijent proporcionalnosti između deformacije ε_x i napona σ_x. Prethodni izraz predstavlja Hukov zakon.

MJERENJE POPREČNIH DIMENZIJA EPRUVETE U TOKU NJENOG ISTEZANJA MOŽE SE UTVRDITI DA IZMEĐU POPREČNIH I UZDUŽNIH DEFORMACIJA POSTOJI SLEDEĆA ZAVISNOST

$$\varepsilon_{pop} = -\nu\,\varepsilon_{uz}$$

GDJE JE ν - POASONOV KOEFICIJENT, KOJI JE KAO I MODUO ELASTIČNOSTI KARAKTERISTIKA MATERIJALA EPRUVETE.

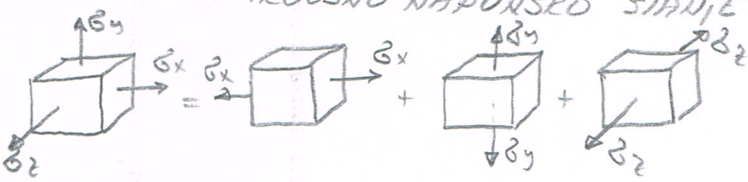
PODACI ZA E I ν SE NALAZE U ODGOVARAJUĆIM TABLICAMA. NA PRIMJER, ZA ČELIK JE: $E = 2\cdot 10^4\ kN/cm^2$ I $\nu = 0{,}3$.

POŠTO JE X-PRAVAC UZET KAO UZDUŽNI PRAVAC EPRUVETE, TO SU PRAVCI Y I Z POPREČNI TO. VEZA IZMEĐU DEFORMACIJA I NAPONA ZA SLUČAJ JEDNOOSNOG NAPONSKOG STANJA SE MOŽE NAPISATI KAO

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \quad ; \quad \varepsilon_y = -\nu\cdot\varepsilon_x = -\nu\cdot\frac{\sigma_x}{E} \quad ; \quad \sigma_z = -\nu\cdot\varepsilon_z = -\nu\frac{\sigma_x}{E}$$

b) VEZE IZMEĐU DEFORMACIJA I NAPONA ZA SLUČAJ TROOSNOG NAPONSKOG STANJA

POSMATRAJUĆI TROOSNO NAPONSKO STANJE KAO ZBIR TRI JEDNOOSNA NAPONSKA STANJA, A IMAJUĆI U VIDU DA ZA SVAKO OD TIH JEDNOOSNIH NAPONSKIH STANJA ZNAMO VEZE IZMEĐU DEFORMACIJA I NAPONA NIJE TEŠKO ZAKLJUČITI DA VAŽI:



$$\varepsilon_x = \varepsilon_x' + \varepsilon_x'' + \varepsilon_x''' = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right]$$

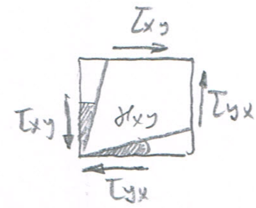
$$\varepsilon_y = \varepsilon_y' + \varepsilon_y'' + \varepsilon_y''' = \frac{\sigma_y}{E} - \nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_z' + \varepsilon_z'' + \varepsilon_z''' = \frac{\sigma_z}{E} - \nu\frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right]$$

PRETHODNIM IZRAZIMA JE DEFINISAN TZV. **UOPŠTENI HUKOV ZAKON**

C) VEZE IZMEĐU UGAONIH DEFORMACIJA I TANGENCIJALNIH NAPONA

KADA BI SE EKSPERIMENTALNIM PUTEM ZA POZNATE VRIJEDNOSTI TANGENCIJALNOG NAPONA τ_{xy} MJERILE ODGOVARAJUĆE DEFORMACIJE γ_{xy} POKAZALO BI SE DA U OBLASTI ELASTIČNIH DEFORMACIJA VAŽI ZAVISNOST SLIČNA HUKOVOM ZAKONU:



$$\tau_{xy} = G\cdot\gamma_{xy}$$

GDJE JE KOEFICIJENT PROPORCIONALNOSTI G - MODUO KLIZANJA. ON JE KAO I E I ν KARAKTERISTIKA MATERIJALA I VAŽI

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

ANALOGNO, ZA NAPONE τ_{xz} I τ_{yz} I DEFORMACIJE γ_{xz} I γ_{yz} VAŽI $\tau_{xz} = G\gamma_{xz}$ I $\tau_{yz} = G\cdot\gamma_{yz}$ PA JE, DAKLE:

$$\tau_{xy} = G\cdot\gamma_{xy}$$
$$\tau_{xz} = G\cdot\gamma_{xz}$$
$$\tau_{yz} = G\cdot\gamma_{yz}$$

d) DEFORMISANJE TIJELA USLED PROMJENE TEMPERATURE

AKO SE OPTEREĆENO TIJELO ISTOVREMENO ZAGRIJE ZA $\Delta t[°]$ ONDA SE I DJELIĆ KOJI POSMATRAMO TAKOĐE ZAGRIJE ZA $\Delta t[°]$. I KOD NJEGA ĆE SE PORED DEFORMACIJA KOJE SU POSLJEDICA POSTOJANJA UNUTRAŠNJIH SILA (NAPONA) POJAVITI I DEFORMACIJE KOJE SU POSLJEDICA PROMJENE TEMPERATURE. POŠTO PROMJENA TEMPERATURE DOVODI DO POVEĆANJA (SMANJENJA) DUŽINE IVICA KVADRA, A NE I DO PROMJENE PRVOBITNO PRAVIH UGLOVA IZMEĐU IVICA DJELIĆA (KVADRA) TO JE JASNO DA PROMJENA TEMPERATURE Δt UTIČE NA LINIJSKE ALI NE I NA UGAONE DEFORMACIJE. ZNAMO DA JE PROMJENA DUŽINSKIH DIMENZIJA TIJELA U JEDNOM PRAVCU USLED PROMJENE TEMPERATURE ODREĐENA IZRAZOM

$$\Delta l_t = \alpha \cdot l \cdot \Delta t$$

GDJE JE l - PRVOBITNA DUŽINA A α - KOEFICIJENT TEMPERATURNOG ŠIRENJA MATERIJALA OD KOJEG JE TIJELO IZRAĐENO, TJ

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta l_t}{l} = \alpha \cdot \Delta t$$

ZAKLJUČUJEMO DA ZA LINIJSKE DEFORMACIJE ε_x, ε_y I ε_z ZA SLUČAJ PROSTORNOG NAPONSKOG NAPONSKOG STANJA I ZA SLUČAJ POSTOJANJA PROMJENE TEMPERATURE VAŽI:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y+\sigma_z)\right] + \alpha \Delta t$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x+\sigma_z)\right] + \alpha \cdot \Delta t$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x+\sigma_y)\right] + \alpha \cdot \Delta t$$

$$\alpha \cdot \Delta t = \varepsilon_t$$

$$\Delta l_t = l \cdot \varepsilon_t = l \cdot \alpha \cdot \Delta t$$

e) VEZE IZMEĐU DEFORMACIJA I NAPONA ZA OPŠTI SLUČAJ

DAKLE, IMAJUĆI U VIDU SVE PRETHODNO REČENO, VEZU IZMEĐU NAPONA I DEFORMACIJA KOD OPTEREĆENOG TIJELA ZAGRIJANOG (OHLAĐENOG) ZA $\Delta t[°]$ MOŽEMO NAPISATI U SLJEDEĆEM OBLIKU:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y+\sigma_z)\right] + \alpha \cdot \Delta t$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x+\sigma_z)\right] + \alpha \cdot \Delta t$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x+\sigma_y)\right] + \alpha \cdot \Delta t$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}$$

PRIMJER RELATIVNU PROMJENU ZAPREMINE IZRAZITI PREKO NORMALNIH NAPONA. DATO JE: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, E, \nu$.

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y+\sigma_z)\right] + \frac{1}{E}\left[\sigma_y + \nu(\sigma_x+\sigma_z)\right] + \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x+\sigma_y)\right]$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$$

PRIMJER DJELIĆ OPTEREĆENOG TIJELA SE NALAZI U NAPONSKOM STANJU ODREĐENOM TENZOROM NAPONA

$$\begin{Bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 5 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \left[\mathrm{kN/cm^2}\right]$$

AKO JE $E = 2\cdot 10^4\,\mathrm{kN/cm^2}$ I $\nu = 0{,}3$ ODREDITI DEFORMACIJE I RELATIVNU PROMJENU ZAPREMINE

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2\cdot 10^4}\left[5 - 0{,}3(-20+0)\right] = 5{,}5\cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2\cdot 10^4}\left[-20 - 0{,}3(5+0)\right] = -10{,}75\cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2\cdot 10^4}\left[0 - 0{,}3(5+(-20))\right] = 2{,}25\cdot 10^{-4}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+0{,}3)}{2\cdot 10^4}\cdot 5 = 6{,}5\cdot 10^{-4}$$

$$\gamma_{xz} = 0$$

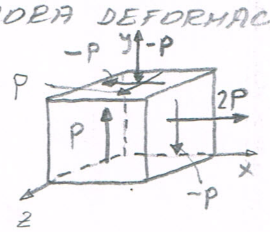
$$\gamma_{yz} = 0$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1-2\cdot 0{,}3}{2\cdot 10^4}(5-20+0) = -3\cdot 10^{-4}$$

PRIMJER NAPONSKO STANJE KOD DJELIĆA OPTEREĆENOG TIJELA ODREĐENO JE TENZOROM NAPONA

$$\begin{Bmatrix} 2p & -p & 0 \\ -p & -p & p \\ 0 & p & 0 \end{Bmatrix}$$

PRIKAZATI DJELIĆ U OBLIKU ELEMENTARNOG KVADRA I ODREDITI KOMPONENTE TENZORA DEFORMACIJE. DATO JE p, E, ν.



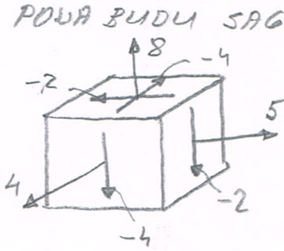
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(2p - \nu p) = \frac{2+\nu}{E}\cdot p \quad ; \gamma_{xy} = -\frac{2(1+\nu)}{E}p$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(-p - \nu 2p) = -\frac{(1+2\nu)}{E}\cdot p \quad ; \gamma_{xz} = 0$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(0 - \nu(2p-p)\right] = -\frac{\nu}{E}p \quad , \gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E}p$$

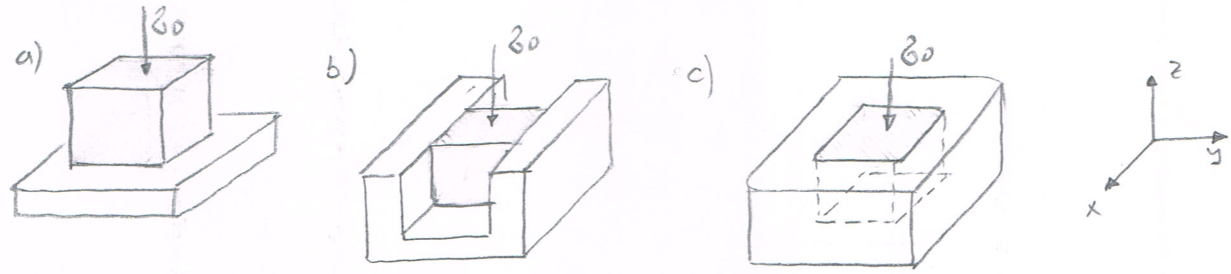
$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{p}{E}(2+\nu-1-2\nu-\nu) = \frac{1-2\nu}{E}p$$

PRIMJER DJELIĆ OPTEREĆENOG TIJELA I NJEGOV TENZOR NAPONA SU PRIKAZANI NA SLICI. ODREDITI PARAMETRE a, b, c I d TAKO DA DJELIĆ I TENZOR NAPONA BUDU SAGLASNI



$$\begin{Bmatrix} a+b & 0 & b \\ 0 & 5 & d \\ b & d & c+b \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a+b=4 \\ b=-4 \\ d=2 \\ c+b=8 \end{matrix} \Rightarrow a=8;\ b=-4;\ d=-2;\ c=12$$

PRIMJER ELEMENT U OBLIKU KOCKE RAVNOMJERNO SE SABIJA NAPONOM σ_0 KAO NA SLICI. U KOJEM OD TRI PRIKAZANA SLUČAJA JE RELATIVNA PROMJENA ZAPREMINE $\frac{\Delta V}{V}$ NAJVEĆA. PLOČU, ZIDOVE KANALA I ZIDOVE OTVORA SMATRATI KRUTIM. DATO JE: E, $\nu=0{,}3$.



a) $\sigma_z=-\sigma_0$
$\sigma_x=\sigma_y=0$ $\quad \frac{\Delta V}{V}=\frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)=-0{,}4\frac{\sigma_0}{E}$

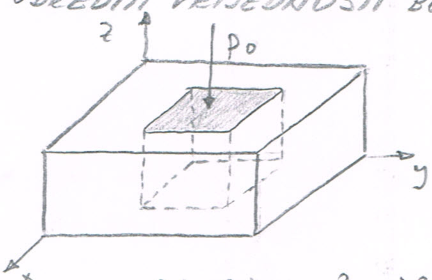
b) $\sigma_z=-\sigma_0$ $\quad \frac{\Delta V}{V}=\frac{1-2\nu}{E}(0-\nu\sigma_0-\sigma_0)=\frac{1-2\nu}{E}(-1-\nu)\cdot\sigma_0=\frac{1-2\cdot 0{,}3}{E}(-1-0{,}3)\sigma_0=-0{,}52\frac{\sigma_0}{E}$
$\sigma_x=0$
$\sigma_y\neq 0;\ \varepsilon_y=0 \longrightarrow \varepsilon_y=\frac{1}{E}[\sigma_y-\nu(\sigma_x+\sigma_z)]=\frac{1}{E}[\sigma_y-\nu(0+\sigma_0)]=\frac{1}{E}(\sigma_y-\nu\sigma_0)=0 \Rightarrow \sigma_y=-\nu\sigma_0$

c) $\sigma_z=-\sigma_0$
$\sigma_x\neq 0\ \ \varepsilon_x=0 \longrightarrow \varepsilon_x=\frac{1}{E}[\sigma_x-\nu(\sigma_y+\sigma_z)]=\frac{1}{E}(\sigma_x-\nu\sigma_y+\nu\sigma_0)=0 \Rightarrow \sigma_x-\nu\sigma_y+\nu\sigma_0=0 \ \dots(1)$
$\sigma_y\neq 0\ \ \varepsilon_y=0 \longrightarrow \varepsilon_y=\frac{1}{E}[\sigma_y-\nu(\sigma_x+\sigma_z)]=\frac{1}{E}(\sigma_y-\nu\sigma_x+\nu\sigma_0)=0 \Rightarrow \sigma_y-\nu\sigma_x+\nu\sigma_0=0 \ \dots(2)$

Iz (1) i (2) $\Rightarrow (\sigma_x+\sigma_y)-\nu(\sigma_x+\sigma_y)=-2\nu\sigma_0 \Rightarrow \sigma_x+\sigma_y=\frac{-2\nu\sigma_0}{1-\nu}$

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)=\frac{1-2\nu}{E}\left(-\frac{2\nu}{1-\nu}\sigma_0-\sigma_0\right)=(1-2\cdot 0{,}3)\left(-\frac{2\cdot 0{,}3}{1-0{,}3}-1\right)\frac{\sigma_0}{E}=-0{,}74\frac{\sigma_0}{E}$$

PRIMJER ELEMENT U OBLIKU KOCKE OD ELASTIČNOG MATERIJALA ($E=2\cdot 10^4\ \frac{kN}{cm^2}$; $\nu=0{,}3$) UMETNUT JE U OTVOR ISTIH DIMENZIJA. ZA KOLIKO ĆE SE SMANJITI VISINA ELEMENTA $h=2{,}5cm$ AKO NA NJEGOVOJ POVRŠINI DEJSTVUJE NORMALNI NAPON $\sigma_z=-P_0=-500\ N/cm^2$? ODREDITI VRIJEDNOSTI BOČNIH NAPONA KOJIMA ELEMENT DJELUJE NA ZIDOVE.



$\varepsilon_z=\frac{\Delta h}{h}$, $\Delta h=h\cdot\varepsilon_z$; $\varepsilon_z=?$; $\sigma_z=-P_0$

$\varepsilon_x=0 \rightarrow \varepsilon_x=\frac{1}{E}(\sigma_x-\nu(\sigma_y+\sigma_z))=0 \rightarrow \sigma_x-\nu\sigma_y+\nu P_0=0 \ \dots(1)$

$\varepsilon_y=0 \rightarrow \varepsilon_y=\frac{1}{E}(\sigma_y-\nu(\sigma_x+\sigma_z))=0 \rightarrow \sigma_y-\nu\sigma_x+\nu P_0=0 \ \dots(2)$

(1)-(2): $\sigma_x-\nu\sigma_y+\nu P_0-(\sigma_y-\nu\sigma_x+\nu P_0)=0 \quad (\sigma_x-\sigma_y)-\nu(\sigma_x-\sigma_y)=0 \Rightarrow \sigma_x=\sigma_y$

(1) $\Rightarrow \sigma_x-\nu\sigma_x+\nu P_0=0 \quad \sigma_x=-\frac{\nu}{1-\nu}P_0=\sigma_y \quad \sigma_x=\sigma_y=-0{,}25\ kN/cm^2$

$\varepsilon_z=\frac{1}{E}[\sigma_z-\nu(\sigma_x+\sigma_y)]=\frac{1}{E}\left[-P_0-2\nu\left(-\frac{\nu}{1-\nu}P_0\right)\right]=-\frac{1-\nu-2\nu^2}{E}P_0=$

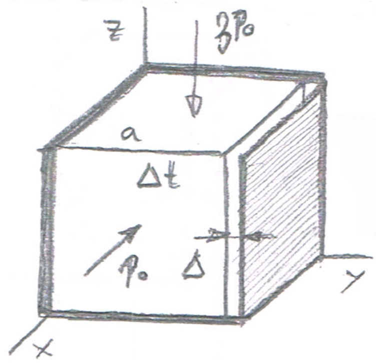
$\Delta h=h\cdot\varepsilon_z=-h\left(\frac{1-\nu-2\nu^2}{E}\right)P_0=-\frac{2{,}5\cdot(1-0{,}3-2\cdot 0{,}3^2)}{2\cdot 10^4}=-0{,}0325cm$

PRIMJER

KOCKA STRANICE a OPTEREĆENA JE PRITISCIMA p_0 i $3p_0$ KAO NA SL. AKO POSTOJI ZAZOR Δ ODREDITI:

a) PRITISKE KRUTIH ZIDOVA NA KOCKU I RELATIVNU PROMJENU ZAPREMINE AKO SE KOCKA ZAGRIJE ZA Δt (°C).

b) PROMJENU TEMPERATURE Δt^* PA DA KOCKA NE PROMIJENI SVOJU ZAPREMINU. (UZETI DA JE $p_0 = 10\,\alpha E$)



Dato je: p_0; $\nu = 0{,}3$. Uzeti da je: $\Delta = 0{,}01a$,

$\alpha \Delta t E = p_0$ i $\frac{\Delta}{a} E = p_0$.

a)
$\sigma_x = -p_0$

$\sigma_z = -3p_0$

$\sigma_y \neq 0$

$\varepsilon_y \cdot a = \Delta$

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta}{a} = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(-p_0 - 3p_0)\right] + \alpha \Delta t \quad / \cdot E$$

$$\sigma_y + \nu 4 p_0 = \frac{\Delta}{a} E - \alpha \Delta t E \Rightarrow \sigma_y = -4 \cdot 0{,}3\, p_0 \qquad \boxed{\sigma_y = -1{,}2\, p_0}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1-2\nu}{E}\left[\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right] + 3\alpha\Delta t = \frac{0{,}4(-5{,}2)p_0}{E} + \frac{3p_0}{E} = (-2{,}08 + 3)\frac{p_0}{E} = 0{,}92\,\frac{\Delta}{a}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = 0{,}92 \cdot 10^{-2} = 0{,}0092$$

b)
$$\frac{\Delta V}{V} = 0 = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + 3\alpha\Delta t^* \Rightarrow 3\alpha\Delta t^* = -\frac{1-2\nu}{E}(-p_0 - 3p_0 - 1{,}2p_0)$$

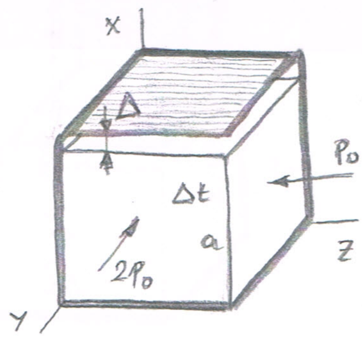
$$3\alpha\Delta t^* = +\frac{0{,}4}{E} 5{,}2 p_0 \Rightarrow \Delta t^* = +\frac{2{,}08}{3}\frac{p_0}{E\alpha} = \frac{2{,}08}{3} \cdot 10 \approx 7°$$

PRIMJER

KOCKA STRANICE a OPTEREĆENA JE PRITISCIMA p_0 i $2p_0$ KAO NA SLICI. AKO POSTOJI ZAZOR Δ ODREDITI:

a) PRITISKE KRUTIH ZIDOVA NA KOCKU I RELATIVNU PROMJENU ZAPREMINE AKO SE KOCKA ZAGRIJE ZA Δt[°C].

b) PROMJENU TEMPERATURE Δt^* PA DA KOCKA NE PROMIJENI SVOJU ZAPREMINU. (UZETI DA JE $\frac{p_0}{\alpha E} = 10$)



Dato je: p_0, $\nu = 0{,}3$. Uzeti da je: $\Delta = 0{,}01a$,

$\alpha \Delta t E = p_0$ i $\frac{\Delta}{a} E = p_0$.

a)
$\sigma_x \neq 0$

$\sigma_y = -2p_0$

$\sigma_z = -p_0$

$\varepsilon_x \cdot a = \Delta$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta}{a} = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] + \alpha\Delta t$$

$$\frac{\Delta}{a} = \frac{1}{E}\left[\sigma_x + 3\nu p_0\right] + \alpha\Delta t \quad / \cdot E$$

$$\frac{\Delta}{a} E = \sigma_x + 3\nu p_0 + \alpha\Delta t E \Rightarrow \sigma_x = \frac{\Delta}{a} E - 3\nu p_0 - \alpha\Delta t E$$

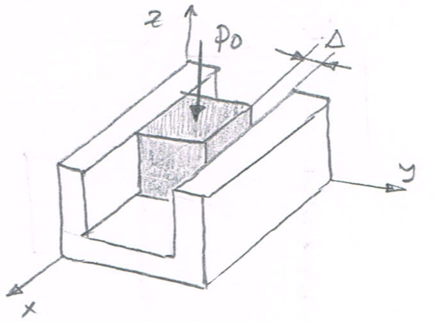
$$\sigma_x = p_0 - 3 \cdot 0{,}3\, p_0 - p_0 = -0{,}9\, p_0 \qquad \boxed{\sigma_x = -0{,}9\, p_0}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1-2\nu}{E}\left[-0{,}9p_0 - 2p_0 - p_0\right] + 3\alpha\Delta t = (1-0{,}6)[-3{,}9]\frac{p_0}{E} + 3 \cdot \frac{p_0}{E} = 1{,}44\,\frac{\Delta}{a} = 0{,}0144$$

b)
$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1-2\nu}{E}\left[\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right] + 3\alpha\Delta t^* = 0 \Rightarrow 3\alpha\Delta t^* = -\frac{1-2\nu}{E}\left[-p_0 - 0{,}9p_0 - 2p_0\right]$$

$$\alpha\Delta t^* = +\frac{0{,}4 \cdot 3{,}9}{3}\frac{p_0}{E} \Rightarrow \Delta t^* = 0{,}52\,\frac{p_0}{\alpha E} = 5{,}2\,°C$$

PRIMJER ELEMENT U OBLIKU KOCKE STRANICE a UMETNUT JE U KANAL SA KRUTIM ZIDOVIMA, PRI ČEMU POSTOJI ZAZOR Δ KAO NA SLICI. ELEMENT JE OPTEREĆEN NA PRITISAK NAPONOM P_o. ODREDITI NAPONE KOJIMA KOCKA PRITISKA ZIDOVE NAKON DEFORMISANJA I POPUNJAVANJA PRAZNINE. DATO JE: a, Δ, P_o, ν, E.

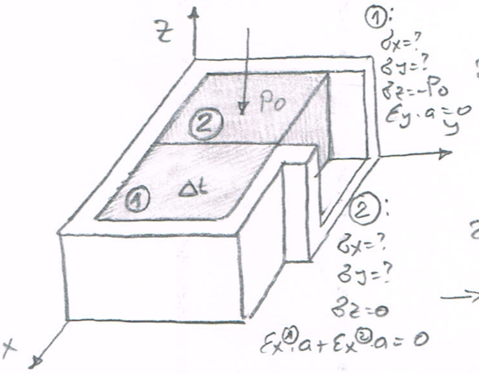


$$\varepsilon_y = \frac{\Delta}{a} = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x+\sigma_z)\right] = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(0-P_o)\right]$$

$$\sigma_z = -P_o \qquad \sigma_y = \frac{E\Delta}{a} - \nu\cdot P_o$$

$$\sigma_x = 0$$

PRIMJER DVIJE KOCKE SU UMETNUTE IZMEĐU KRUTIH ZIDOVA KAO NA SLICI. KOCKA ① JE ZAGRIJANA ZA $\Delta t[°]$ A KOCKA ② JE OPTEREĆENA PRITISKOM P_o. NAĆI PRITISAK KOCKE ① NA BOČNE ZIDOVE U PRAVCU y-OSE. DATO JE: $E, \nu, \alpha, P_o, \Delta t$.



①: $\sigma_x=?$, $\sigma_y=?$, $\sigma_z=-P_o$, $\varepsilon_y\cdot a=0$

②: $\sigma_x=?$, $\sigma_y=?$, $\sigma_z=0$, $\varepsilon_x^{(1)}a+\varepsilon_x^{(2)}a=0$

ZA ① : y : $\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x+0)\right] + \alpha\cdot\Delta t = 0$

$$\rightarrow \sigma_y - \nu\sigma_x = -\alpha\Delta t E \quad \cdots (1)$$

ZA ① i ② : $\varepsilon_x^{(1)}+\varepsilon_x^{(2)} = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y)\right] + \alpha\Delta t + \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(0+(-P_o))\right] = 0$

$$\rightarrow \sigma_x - \nu\sigma_y + \alpha\cdot\Delta t E + \sigma_x + \nu P_o = 0$$

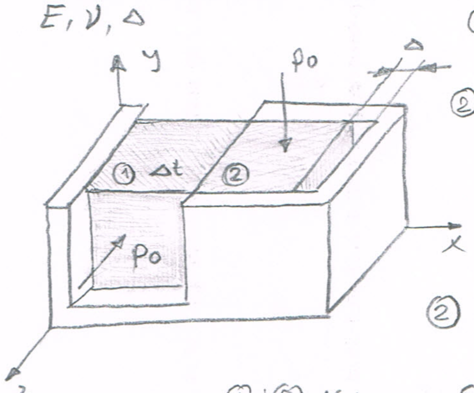
$$2\sigma_x - \nu\sigma_y = -\alpha\cdot\Delta t E - \nu P_o \quad \cdots (2)$$

IZ (1) i (2) : $2\sigma_x - \nu(\nu\sigma_x - \alpha\Delta t\cdot E) = -\alpha\cdot\Delta t E - \nu P_o$

$$\sigma_x(2-\nu^2) = -\alpha\nu\cdot\Delta t\cdot E - \alpha\cdot\Delta t\cdot E - \nu\cdot P_o$$

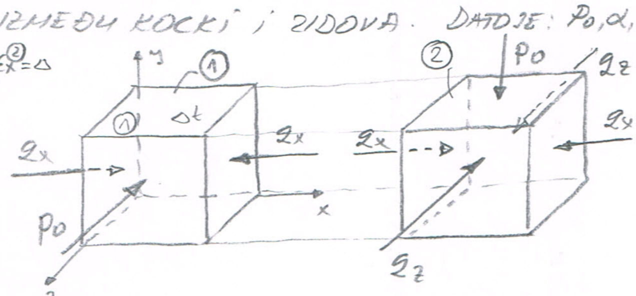
$$\sigma_x = -\frac{(1+\nu)\alpha\Delta t E + \nu P_o}{2-\nu^2} \quad ; \quad \sigma_y = -\alpha\Delta t E + \nu\cdot\sigma_x = -\frac{(2+\nu)\alpha\cdot\Delta t\cdot E + \nu^2 P_o}{2-\nu^2}$$

PRIMJER KOCKE STRANICE a OPTEREĆENE SU KAO NA SLICI NALAZE SE IZMEĐU KRUTIH ZIDOVA. AKO SE KOCKA ① ZAGRIJE ZA $\Delta t[°C]$ I AKO IZMEĐU KOCKE I ZIDA POSTOJI ZAZOR Δ ODREDITI PRITISKE IZMEĐU KOCKI I ZIDOVA. DATO JE: $P_o, \alpha, \Delta t, E, \nu, \Delta$



①: $\sigma_x=?$, $\sigma_y=0$, $\sigma_z=-P_o$; $\varepsilon_x^{(1)}+\varepsilon_x^{(2)}=\Delta$

②: $\sigma_x=?$, $\sigma_y=-P_o$, $\sigma_z=?$, $\varepsilon_z\cdot a=0$



② z : $0 = \varepsilon_z a = \frac{a}{E}\left[q_z - \nu(q_x - P_o)\right] \Rightarrow \nu q_x - q_z = -\nu P_o \cdots (1)$

①i② x : $\varepsilon_x^{(1)}+\varepsilon_x^{(2)} = \frac{\Delta}{a}$, $\varepsilon_x^{(1)}+\varepsilon_x^{(2)} = \frac{1}{E}\left[-q_x - \nu(0-P_o)\right] + \alpha\Delta t + \frac{1}{E}\left[-q_x - \nu(-P_o - q_z)\right] = \frac{\Delta}{a} \cdots (2)$

$$\nu q_x - q_z = -\nu P_o \cdots (1)$$

$$-2q_x + \nu q_z = \frac{\Delta E}{a} - 2\nu P_o - \alpha\cdot\Delta t E \cdots (2)$$

IZ (1) i (2) SE DOBIJA: $q_x = \frac{-1}{(2-\nu^2)}\left[\frac{\Delta E}{a} - \nu(2+\nu)P_o - \alpha\Delta t E\right]$; $q_z = \frac{-\nu}{2-\nu^2}\left[\frac{\Delta}{a}E - 2(1+\nu)P_o - \alpha\Delta t E\right]$

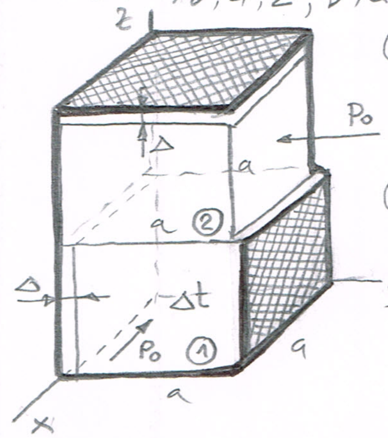
PRIMJER

DVA ELEMENTA OBLIKA KOCKI STRANICA a UMETNUTA SU IZMEĐU KRUTIH ZIDOVA I OPTEREĆENA SU KAO NA SLICI

ODREDITI:
a) PRITISKE ZIDOVA NA ELEMENTE
b) PROMJENU VISINE KOCKE ①
c) PROMJENU ZAPREMINE KOCKE ②

DATO JE: $P_0, a, E, \nu, \alpha, \Delta t, \Delta$. UZETI DA JE $\nu = 0{,}3$, $\frac{\Delta}{a}\cdot E = 0{,}2P_0$, $\alpha \Delta t E = 3P_0$

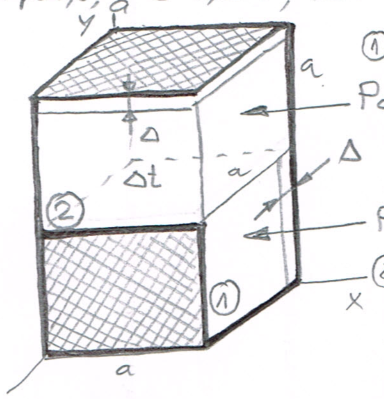
1



①: $\sigma_x = -P_0$
$\sigma_y = ?$
$\varepsilon_y \cdot a = \Delta$
$\sigma_z = ?$

②: $\sigma_y = -P_0$
$\sigma_x = 0$
$\sigma_z = ?$
$\varepsilon_z^{①} a + \varepsilon_z^{②} a = \Delta$

2



① $\sigma_x = -P_0$
$\sigma_y = ?$
$\sigma_z = ?$
$\varepsilon_z \cdot a = \Delta$

②: $\sigma_x = -P_0$
$\sigma_z = 0$
$\sigma_y = ?$
$\varepsilon_y^{①} a + \varepsilon_y^{②} a = \Delta$

1 a) ① y: $\frac{\Delta}{a} = \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(-P_0 + \sigma_z)\right] + \alpha\Delta t \Rightarrow \frac{\Delta}{a}\cdot E - \alpha \cdot \Delta t \cdot E = \sigma_y + \nu P_0 - \sigma_z \cdot \nu$

$\sigma_y - 0{,}3\sigma_z = \frac{\Delta E}{a} - \alpha \Delta t E - \nu P_0 = 0{,}2P_0 - 3P_0 - 0{,}3P_0 \Rightarrow \underline{\sigma_y - 0{,}3\sigma_z = -3{,}1P_0} \ldots (1)$

① i ② z: $\frac{\Delta}{a} = \varepsilon_z^{①} + \varepsilon_z^{②} = \frac{1}{E}\left(\sigma_z - \nu(-P_0 + \sigma_y)\right) + \alpha \Delta t + \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(0 - P_0)\right]$

$\frac{\Delta \cdot E}{a} = \sigma_z + 0{,}3\cdot P_0 - 0{,}3\sigma_y + \alpha \cdot \Delta t E + \sigma_z + 0{,}3\cdot P_0$

$\Rightarrow 2\sigma_z - 0{,}3\sigma_y = \frac{\Delta \cdot E}{a} - 0{,}3P_0 - \alpha \Delta t \cdot E - 0{,}3P_0 = 0{,}2P_0 - 0{,}3P_0 - 3P_0 - 0{,}3P_0$

$\underline{2\sigma_z - 0{,}3\sigma_y = -3{,}4P_0} \ldots (2)$

$\left.\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix}\sigma_z = -2{,}27P_0\\ \sigma_y = -3{,}78P_0\end{matrix}$

b) ① $\frac{\Delta a}{a} = \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] + \alpha\Delta t\Big] = \frac{1}{E}\left[-2{,}27P_0 + 0{,}3\cdot P_0 + 3{,}78P_0 + 3P_0\right] = \frac{4{,}81P_0}{E}$

$\Delta a = \frac{a}{E}4{,}81P_0 = \Delta a^{①}$ $\qquad \Delta a^{②} = \Delta - \Delta a^{①} = 0{,}2\frac{P_0 a}{E} - 4{,}81\frac{P_0 a}{E} = -4{,}61\frac{P_0 a}{E}$

c) ②: $\frac{\Delta V}{V} = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1 - 2\cdot 0{,}3}{E}(0 - P_0 - 2{,}27P_0) = -\frac{1{,}3P_0}{E}$

2 a) ① z: $\frac{\Delta}{a} = \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(-P_0 + \sigma_y)\right] \Rightarrow \sigma_z + 0{,}3P_0 - 0{,}3\sigma_y = \frac{\Delta \cdot E}{a} = 0{,}2P_0$

$\sigma_z - 0{,}3\sigma_y = 0{,}2P_0 - 0{,}3P_0 = -0{,}1P_0$: $\underline{\sigma_z - 0{,}3\sigma_y = -0{,}1P_0} \ldots (1)$

① i ② y: $\varepsilon_y^{①} + \varepsilon_y^{②} = \frac{\Delta^{①}}{a} + \frac{\Delta^{②}}{a} = \frac{\Delta}{a} = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(-P_0 + \sigma_z)\right] + \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(P_0 + 0)\right] + \alpha \Delta t$

$2\sigma_y - \nu\sigma_z = \frac{\Delta}{a}\cdot E - \alpha \cdot \Delta t \cdot E - 2\nu P_0 \Rightarrow \underline{2\sigma_y - 0{,}3\sigma_z = -4{,}3P_0} \ldots (2)$

$\Rightarrow \sigma_y = -2{,}25P_0$
$\sigma_z = -0{,}675P_0$

b) $\frac{\Delta a_y^{①}}{a} = \varepsilon_y^{①} = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] \Rightarrow \Delta a_y^{①} = \frac{a}{E}\left[-2{,}25P_0 - 0{,}3(-P_0 - 0{,}675P_0)\right] = -1{,}75\frac{P_0}{E}a$

$\Delta a_y^{②} = \Delta - \Delta a_y^{①} = 0{,}3\frac{P_0 a}{E} + 1{,}75\frac{P_0 a}{E} = 2{,}05\frac{P_0}{E}a$

c) $\frac{\Delta V^{②}}{V} = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) + 3\cdot\alpha\Delta t = \frac{1 - 0{,}3\cdot 2}{E}(-P_0 - 2{,}25P_0 + 0) + \frac{3\cdot P_0}{E} = 1{,}7\cdot\frac{P_0}{E}$

POMORSKI FAKULTET - KOTOR

POMORSKE NAUKE

IME I PREZIME — BR. INDEKSA

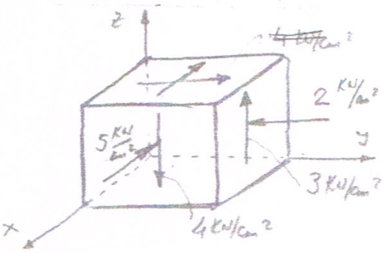
3. KOLOKVIJUM IZ OTPORNOSTI MATERIJALA
(7.12.2016.g)

(Ukupno 20p!)

(1z) (6p) ELEMENTARNI KVADAR PRIKAZAN NA SLICI JE OPTEREĆEN UNUTRAŠNJIM SILAMA (NAPONIMA) KAO NA SLICI.

NAPISATI TENZOR NAPONA I TENZOR DEFORMACIJA.

UZETI DA JE $E=2\cdot10^4\ kN/cm^2$, $\nu=0,3$, $\alpha t=0$



(2z) KOCKA STRANICE a OPTEREĆENA JE PRITISKOM $2P_0$ KAO NA SLICI. KOCKA SE NALAZI U PROSTORU ZATVORENOM KRUTIM ZIDOVIMA SA SVIH STRANA OSIM STRANE NORMALNE NA y-OSI.

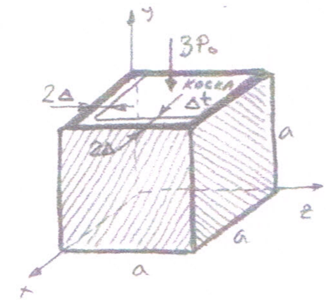
AKO POSTOJI ZAZORI KAO NA SLICI I AKO JE KOCKA ZAGRIJANA ZA TEMPERATURU Δt ODREDITI

(10p) a) PRITISKE KRUTIH ZIDOVA NA PLOČU

(4p) b) PROMJENU DUŽINE KOCKE U PRAVCU y-OSE.

DATO JE: P_0; $\nu=0,3$. UZETI DA JE $\Delta=0,01a$

$\alpha\cdot\Delta t\cdot E=P_0$; $\frac{\Delta E}{a}=2P_0$



(1z)

$\sigma_x=5 \quad \tau_{xy}=0 \quad \tau_{xz}=-4$

$\tau_{yx}=0 \quad \sigma_y=-2 \quad \tau_{yz}=2$

$\tau_{zx}=-4 \quad \tau_{zy}=2 \quad \sigma_z=0$

$$\begin{Bmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{Bmatrix} kN/cm^2$$

$G=\frac{E}{2(1+\nu)}=\frac{2\cdot10^4}{2(1+0,3)}=\frac{10^4}{1,3}\ \frac{kN}{cm^2}$

$E=2\cdot10^4\ kN/cm^2$; $\nu=0,3$

$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\nu(\sigma_y+\sigma_z)\right]=$
$=\frac{1}{2\cdot10^4}\left[5-0,3(-2+0)\right]=2,8\cdot10^{-4}$

$\varepsilon_y=\frac{1}{E}\left[\sigma_y-\nu(\sigma_x+\sigma_z)\right]=$
$=\frac{1}{2\cdot10^4}\left[-2-0,3(5+0)\right]=-1,75\cdot10^{-4}$

$\varepsilon_z=\frac{1}{E}\left[\sigma_z-\nu(\sigma_x+\sigma_y)\right]=$
$=\frac{1}{2\cdot10^4}\left[0-0,3(5-2)\right]=-0,45\cdot10^{-4}$

$\gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G}=\frac{0\cdot1,3}{10^4}=0=\gamma_{yx}$

$\gamma_{xz}=\frac{\tau_{xz}}{G}=\frac{-4\cdot1,3}{10^4}=-5,2\cdot10^{-4}=\gamma_{zx}$

$\gamma_{yz}=\frac{\tau_{yz}}{G}=\frac{2\cdot1,3}{10^4}=2,6\cdot10^{-4}=\gamma_{zy}$

$$\begin{Bmatrix} 2,8 & 0 & -2,6 \\ 0 & -1,75 & 1,3 \\ -2,6 & 1,3 & -0,45 \end{Bmatrix}\cdot10^{-4}\ \frac{kN}{cm^2}$$

(2z)

$\sigma_y=-3P_0$

$\sigma_x\neq0$

a) $\sigma_z\neq0$

$\varepsilon_y\neq0$

$\varepsilon_z=\frac{2\Delta}{a}$

$\varepsilon_x=\frac{\Delta}{a}$

$\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\nu(\sigma_y+\sigma_z)\right]+\alpha\cdot\Delta t=\frac{2\Delta}{a}$

$\varepsilon_z=\frac{1}{E}\left[\sigma_z-\nu(\sigma_x+\sigma_y)\right]+\alpha\cdot\Delta t=\frac{2\Delta}{a}$

$\sigma_x-\nu\cdot\sigma_z=\frac{2\Delta\cdot E}{a}-\alpha\cdot\Delta t E-3\nu P_0$

$\sigma_z-\nu\sigma_x=\frac{2\cdot\Delta E}{a}-\alpha\cdot\Delta t\cdot E-3\nu P_0$

$\sigma_x-0,3\sigma_z=2\cdot2P_0-P_0-0,3\cdot3P_0=2,1P_0$

$\sigma_z-0,3\sigma_x=2\cdot2P_0-P_0-0,3\cdot3P_0=2,1P_0$

$\boxed{\begin{matrix}\sigma_x-0,3\sigma_z=2,1P_0\\ \sigma_z-0,3\sigma_x=2,1P_0\end{matrix}}\ /\cdot0,3 \Rightarrow \begin{matrix}\sigma_x-0,3\sigma_z=2,1P_0\\ 0,3\sigma_z-0,09\sigma_x=0,63P_0\end{matrix}\ +\Rightarrow$

$\Rightarrow \sigma_x-0,09\sigma_x=2,73 \Rightarrow \sigma_x=\frac{2,73}{1-0,09}P_0=3P_0=\sigma_x$

$\sigma_z=2,1+0,3\cdot3\ P_0=3=\sigma_z$

$P_0=\frac{E}{2}\cdot\frac{\Delta}{a}=\frac{2\cdot10^4}{2}\cdot0,01=100\frac{kN}{cm^2}$, $\therefore \sigma_x=\sigma_z=300\frac{kN}{cm^2}$

b) $\varepsilon_y=\frac{1}{E}\left[\sigma_y-\nu(\sigma_x+\sigma_z)\right]+\alpha\cdot\Delta t=$
$=\frac{1}{E}\left[-3P_0-0,3(3P_0+3P_0)+\frac{P_0}{E}=-3,8\frac{P_0}{E}\right.$

$\varepsilon_y=\frac{\Delta a}{a}$

$\Delta a=a\cdot\varepsilon_y=-3,8\cdot a\frac{P_0}{E}=-3,8\cdot\frac{100}{2\cdot10^4}\cdot a=0,02a$

POMORSKI FAKULTET - KOTOR

POMORSKE NAUKE

IME I PREZIME — BR. INDEKSA

3. KOLOKVIJUM IZ OTPORNOSTI MATERIJALA

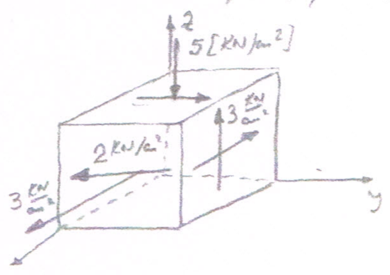
(7.12.2016.g)

(Ukupno 20p!)

(6p) ① z ELEMENTARNI KVADAR PRIKAZAN NA SLICI JE OPTEREĆEN UNUTRAŠNJIM SILAMA (NAPONIMA) KAO NA SLICI.

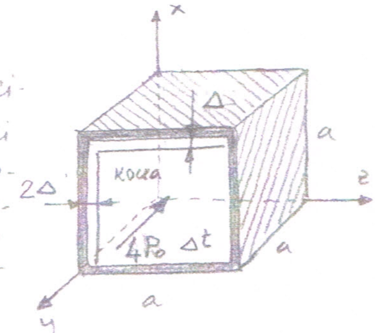
NAPISATI TENZOR NAPONA I TENZOR DEFORMACIJA.

UZETI DA JE $E = 2 \cdot 10^4\ kN/cm^2$; $\nu = 0{,}3$; $\alpha t = 0$



② z KOCKA STRANICE a OPTEREĆENA JE PRITISKOM $2P_0$ KAO NA SLICI.

KOCKA SE NALAZI U PROSTORU ZATVORENOM KRUTIM ZIDOVIMA SA SVIH STRANA OSIM STRANE NORMALNE NA y-OSU.



AKO POSTOJI ZAZORI KAO NA SLICI I AKO JE KOCKA ZAGRIJANA ZA TEMPERATURU Δt ODREDITI

(10p) a) PRITISKE KRUTIH ZIDOVA NA PLOČU

(4p) b) PROMJENU DUŽINE KOCKE U PRAVCU y-OSE.

DATO JE: P_0 ; $\nu = 0{,}3$. UZETI DA JE: $\Delta = 0{,}01a$

$\alpha \cdot \Delta t \cdot E = P_0$; $\frac{\Delta E}{a} = 2P_0$

---

① z $\sigma_x = 3$; $\tau_{xy} = -2$; $\tau_{xz} = 0$

$\tau_{yx} = -2$; $\sigma_y = 0$; $\tau_{yz} = 3$

$\tau_{zx} = 0$; $\tau_{zy} = 3$; $\sigma_z = -5$

(3)
$$\begin{Bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \end{Bmatrix}$$

$G = \frac{10^4}{1{,}3}\frac{kN}{cm^2}$; $E = 2 \cdot 10^4 \frac{kN}{cm^2}$; $\nu = 0{,}3$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] = \frac{1}{2 \cdot 10^4}\left[3 - 0{,}3(0-5)\right] = 2{,}25 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] = \frac{1}{2 \cdot 10^4}\left[0 - 0{,}3(3-5)\right] = 0{,}3 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] = \frac{1}{2 \cdot 10^4}\left[-5 - 0{,}3(3+0)\right] = -2{,}95 \cdot 10^{-4}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{-2 \cdot 1{,}3}{10^4} = -2{,}6 \cdot 10^{-4} = \gamma_{yx}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = 0 = \gamma_{zx}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{3 \cdot 1{,}3}{10^4} = 3{,}9 \cdot 10^{-4} = \gamma_{zy}$$

(3)
$$\begin{Bmatrix} 2{,}25 & -1{,}3 & 0 \\ -1{,}3 & 0{,}3 & 1{,}95 \\ 0 & 1{,}95 & -2{,}95 \end{Bmatrix} \times 10^{-4} \frac{kN}{cm^2}$$

② z

a) $\sigma_y = -4P_0$; $\sigma_x \neq 0$; $\sigma_z \neq 0$; $\varepsilon_y \neq 0$

$\varepsilon_x \cdot a = \Delta$

$\varepsilon_z \cdot a = 2\Delta$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right] + \alpha \Delta t = \frac{\Delta}{a} \quad (1)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] + \alpha \Delta t = \frac{2\Delta}{a} \quad (2)$$

$$\sigma_x - \nu(-4P_0 + \sigma_z) = \left(\frac{\Delta}{a} - \alpha \Delta t\right)E$$

$$\sigma_z - \nu(\sigma_x - 4P_0) = \left(\frac{2\Delta}{a} - \alpha \Delta t\right)E$$

(7)

$$\sigma_x - 0{,}3\sigma_z = \frac{\Delta \cdot E}{a} - \alpha \cdot \Delta t \cdot E - 1{,}2P_0$$

$$\sigma_z - 0{,}3\sigma_x = \frac{2\Delta E}{a} - \alpha \cdot \Delta t \cdot E - 1{,}2P_0$$

$$\boxed{\sigma_x - 0{,}3\sigma_z} = 2P_0 - P_0 - 1{,}2P_0 \quad \boxed{= -0{,}2P_0}$$

$$\boxed{\sigma_z - 0{,}3\sigma_x} = 4P_0 - P_0 - 1{,}2P_0 \quad \boxed{= 1{,}8P_0} \Big/ \cdot 0{,}3$$

$$\sigma_x - 0{,}3\sigma_z = -0{,}2P_0$$

$$0{,}3\sigma_z - 0{,}09\sigma_x = 0{,}54P_0$$

$$+ \Rightarrow 0{,}91\sigma_x = 0{,}34P_0$$

$$\sigma_x = 0{,}37P_0 = 37\ kN/cm^2$$

(3)
$$\sigma_z = 0{,}3\sigma_x + 1{,}8P_0 = 1{,}91P_0 = 191 \frac{kN}{cm^2}$$

b)
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] + \alpha \cdot \Delta t = \frac{1}{E}\left[-4P_0 - 0{,}3(0{,}37P_0 + 1{,}91P_0)\right] + \frac{P_0}{E} = -3{,}68\frac{P_0}{E}$$

(2)

(2)
$$\varepsilon_y = \frac{\Delta a}{a} \Rightarrow \Delta a = a \cdot \varepsilon_y = -3{,}68\, P_0 \cdot \frac{a}{E} = \Delta a$$

$$\frac{\Delta \cdot E}{a} = 2P_0 \Rightarrow \frac{P_0}{E} = \frac{\Delta}{2a} = 0{,}005 \ ; \quad P_0 = \frac{E}{2}\frac{\Delta}{a} = \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 0{,}01}{2} = 100 \frac{kN}{cm^2}$$

$$\Delta a = -3{,}68 \frac{100 \cdot a}{2 \cdot 10^4} = -0{,}0184 \cdot a$$

POMORSKI FAKULTET - KOTOR

POMORSKE NAUKE

IME I PREZIME

BR INDEKSA

3. KOLOKVIJUM iz OTPORNOSTI MATERIJALA – POPRAVNI KOLOKVIJUM (12.01.2017g.)

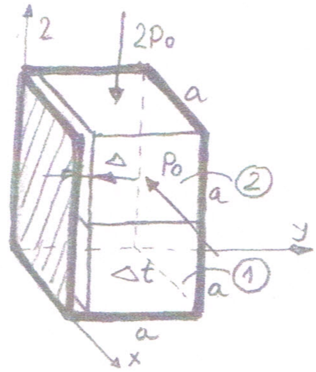
20 POENA

DVA ELEMENTA U OBLIKU KOCKI UMETNUTA SU IZMEĐU KRUTIH ZIDOVA KAO NA SLICI. ELEMENTI SU OPTEREĆENI KAO NA SLICI.

(14p) 1) ODREDITI PRITISKE ZIDOVA NA KOCKE

(6p) 2) IZDUŽENJA (SKRAĆENJA) KOCKE ① I KOCKE ② U PRAVCU Z-OSE.

POZNATO JE: $P_0, E, \Delta, \Delta t, \nu, \alpha$



1)

① $\varepsilon_y = \frac{\Delta}{a}$, $\varepsilon_z \neq 0$, $\varepsilon_x \neq 0$, $\sigma_y \neq 0$, $\sigma_x = 0$, $\sigma_z = 2P_0$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] + \alpha \Delta t = \frac{\Delta}{a}$$

$$\sigma_y - \nu(0 - 2P_0) = \frac{\Delta E}{a} - \alpha \Delta t E$$

$$\sigma_y = \frac{\Delta \cdot E}{a} - \alpha \Delta t E - 2\nu P_0$$

② $\sigma_z = -2P_0$, $\sigma_x = -P_0$, $\sigma_y \neq 0$, $\varepsilon_y = \frac{\Delta}{a}$, $\varepsilon_z \neq 0$, $\varepsilon_x \neq 0$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\right] = \frac{\Delta}{a}$$

$$\sigma_y - \nu(-P_0 - 2P_0) = \frac{\Delta \cdot E}{a}$$

$$\sigma_y = \frac{\Delta E}{a} - \nu 3 P_0$$

2)

$$\varepsilon_z^{①} = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] + \alpha \Delta t = \frac{1}{E}\left[-2P_0 - \nu\left(0 + \left(\frac{\Delta \cdot E}{a} - \alpha \Delta t \cdot E - 2\nu P_0\right)\right)\right] + \alpha \Delta t =$$

$$\varepsilon_z^{①} = -\frac{2P_0}{E}(1+\nu^2) - \frac{\nu \Delta}{a} + \alpha \cdot \Delta t (1+\nu)$$

$$\varepsilon_z^{②} = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right] = \frac{1}{E}\left[-2P_0 - \nu\left(-P_0 + \frac{\Delta E}{a} - 3\nu P_0\right)\right] =$$

$$\varepsilon_z^{②} = -\frac{P_0}{E}(2 - \nu - 3\nu^2) - \frac{\nu \Delta}{a}$$

POMORSKI FAKULTET - KOTOR
POMORSKE NAUKE

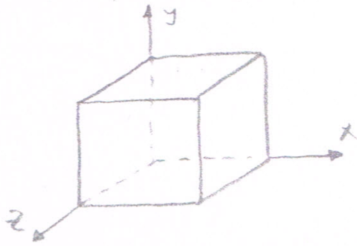
IME I PREZIME   BR. INDEKSA

3. KOLOKVIJUM IZ OTPORNOSTI MATERIJALA

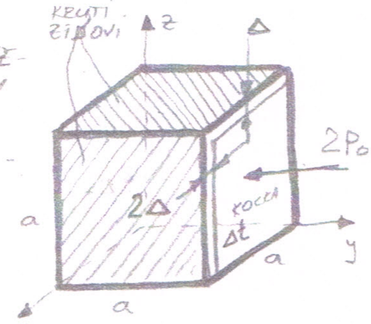
(Ukupno 20 poena!)   (7.12.2016 g.)

(1z) DAT JE TENZOR NAPONA
$$\begin{Bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{Bmatrix}$$

(6p) NACRTATI NA ELEMENTARNOM KVADRU SVE UNUTRAŠNJE SILE (NAPONE) KOJE DJELUJU NA STRANE KVADRA (NACRTATI NAPONE SAMO NA VIDLJIVIM STRANAMA KVADRA. ODREDITI TENZOR DEFORMACIJA AKO JE $E = 2\cdot10^4\ kN/cm^2$, $\nu = 0{,}3$; $\Delta t = 0$



(2z) KOCKA STRANICE a OPTEREĆENA JE PRITISKOM $2P_0$ KAO NA SLICI. KOCKA SE NALAZI U PROSTORU ZATVORENOM KRUTIM ZIDOVIMA SA SVIH STRANA OSIM STRANE NORMALNE NA PRAVAC Y-OSE



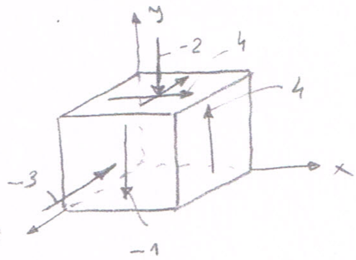
AKO POSTOJI ZAZOR Δ, A KOCKA ZAGRIJANA ZA TEMPERATURU Δt ODREDITI:

(10p) a) PRITISKE KRUTIH ZIDOVA NA KOCKU

(4p) b) RELATIVNU PROMJENU ZAPREMINE

DATO JE: P_0, $\nu = 0{,}3$. UZETI DA JE:
$\Delta = 0{,}01\,a$; $\alpha\Delta t E = P_0$ i $\frac{\Delta}{a}E = 2P_0$

(1z)



$E = 2\cdot10^4\ \frac{kN}{cm^2}$; $\nu = 0{,}3$; $G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{2\cdot10^4}{2(1+0{,}3)}$

$G = \frac{10^4}{1{,}3}\ \frac{kN}{cm^2}$

$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y+\sigma_z)\right] =$
$= \frac{1}{2\cdot10^4}\left[0 - 0{,}3(-2-3)\right] = 0{,}75\cdot10^{-4}$

$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_x+\sigma_z)\right] =$
$= \frac{1}{2\cdot10^4}\left[-2 - 0{,}3(0-3)\right] = -0{,}55\cdot10^{-4}$

$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x+\sigma_y)\right] =$
$= \frac{1}{2\cdot10^4}\left[-3 - 0{,}3(0-2)\right] = -1{,}2\cdot10^{-4}$

$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{4\cdot1{,}3}{10^4} = 5{,}2\cdot10^{-4}$, $= \gamma_{yx}$

$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = 0 = \gamma_{zx}$

$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = \frac{-1\cdot1{,}3}{10^4} = -1{,}3\cdot10^{-4}$, $= \gamma_{zy}$

$$\begin{Bmatrix} 0{,}75 & 5{,}6 & 0 \\ 5{,}6 & -1{,}45 & -1{,}3 \\ 0 & -1{,}7 & -1{,}2 \end{Bmatrix} \times 10^{-4} =$$

(2z)

$\sigma_y = -2P_0$

a) $\sigma_x \neq 0$
$\sigma_z \neq 0$
$\varepsilon_y \neq 0$
$\varepsilon_z = \frac{\Delta}{a}$
$\varepsilon_x = \frac{2\Delta}{a}$

$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y+\sigma_z)\right] + \alpha\Delta t = \frac{2\Delta}{a}$

$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x+\sigma_y)\right] + \alpha\cdot\Delta t = \frac{\Delta}{a}$

$\sigma_x - \nu\sigma_z = \frac{2\Delta E}{a} - \alpha\Delta t E - 2P_0\nu$

$\sigma_z - \nu\sigma_x = \frac{\Delta E}{a} - \alpha\Delta t E - 2P_0\cdot\nu$

$\sigma_x - 0{,}3\sigma_z = 4P_0 - P_0 - 2\cdot0{,}3\cdot P_0$

$\sigma_z - 0{,}3\sigma_x = 2P_0 - P_0 - 2\cdot0{,}3P_0$

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_x - 0{,}3\sigma_z &= 2{,}4\,P_0 \\ \sigma_z - 0{,}3\sigma_x &= 0{,}4\,P_0\end{aligned}}\ /\cdot0{,}3 \rightarrow \begin{aligned}\sigma_x - 0{,}3\sigma_z &= 2{,}4\,P_0 \\ 0{,}3\sigma_z - 0{,}3\cdot0{,}3\sigma_x &= 0{,}4\cdot0{,}3P_0\end{aligned}$$

$\sigma_x - 0{,}3\sigma_z = 2{,}4P_0$
$0{,}3\sigma_z - 0{,}09\sigma_x = 0{,}12P_0$ +

$\sigma_x - 0{,}09\sigma_x = 2{,}52P_0$ $\underline{\sigma_x = 2{,}77P_0}$;

$P_0 = \frac{E}{2}\frac{\Delta}{a} = \frac{2\cdot10^4}{2}\cdot0{,}01 = 100\ kN/cm^2$ $\sigma_x: 277\ \frac{kN}{cm^2}$

$\sigma_z = 0{,}3\cdot2{,}77P_0 + 0{,}4P_0$; $\underline{\sigma_z = 1{,}23P_0}$; $\sigma_z = 123\ \frac{N}{cm^2}$

b)

$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1-2\nu}{E}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) + 3\cdot\alpha\Delta t$

$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1-2\cdot0{,}3}{E}\left(2{,}77P_0 - 2P_0 + 1{,}23P_0\right) + 3\cdot\frac{P_0}{E}$

$\frac{\Delta V}{V} = \frac{0{,}4\cdot2}{E}P_0 + \frac{3P_0}{E} = 3{,}8\,\frac{P_0}{E}$