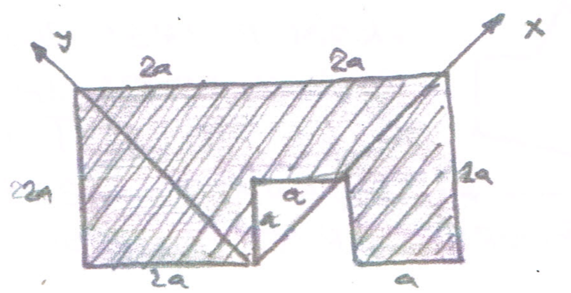
UNIVERZITET CRNE GORE
FAKULTET ZA POMORSTVO
POMORSKE NAUKE
BRODOMAŠINSTVO

OTPORNOST MATERIJALA

= PISANA PREDAVANJA =

1. KOLOKVIJUM



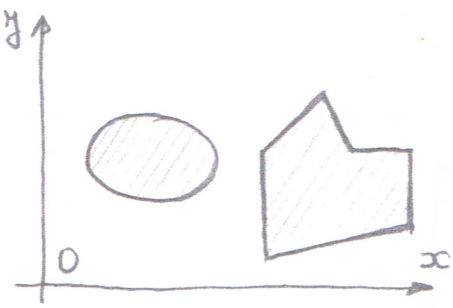
GEOMETRIJSKE KARAKTERISTIKE RAVNIH POVRŠI

KOTOR 2016.

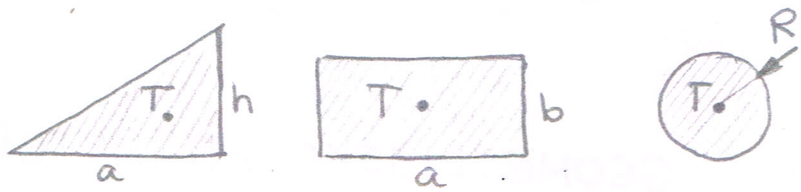
GEOMETRIJSKE KARAKTERISTIKE RAVNIH POVRŠI

1. POJAM RAVNE POVRŠI

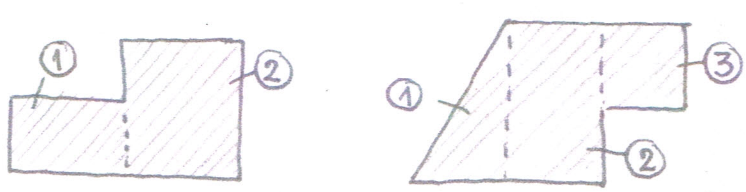
POD **RAVNOM POVRŠI** U RAVNI xOy (SL) PODRAZUMIJEVAMO OBLAST OGRANIČENU ZATVORENOM KRIVOM ILI IZLOMLJENOM PRAVOM LINIJOM.



POD **JEDNOSTAVNOM RAVNOM POVRŠI** PODRAZUMIJEVAMO RAVNU POVRŠ ZA KOJU ZNAMO POLOŽAJ TEŽIŠTA T I IZRAZ ZA SRAČUNAVANJE NJENE POVRŠINE. TAKVE RAVNE POVRŠI PRIKAZANE SU NA SLICI.



POD **SLOŽENOM RAVNOM POVRŠI** PODRAZUMIJEVAMO RAVNU POVRŠ KOJA SE SASTOJI OD VIŠE JEDNOSTAVNIH RAVNIH POVRŠI, KAO NA SLICI.

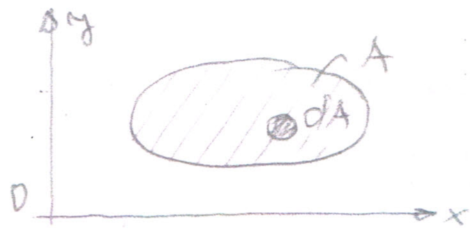


OSNOVNE GEOMETRIJSKE KARAKTERISTIKE RAVNE POVRŠI SU:

- POVRŠINA RAVNE POVRŠI (A)
- STATIČKI MOMENTI RAVNE POVRŠI (S_x, S_y)
- MOMENTI INERCIJE RAVNE POVRŠI (I_x, I_y, I_{xy}, I_0)

2. POVRŠINA RAVNE POVRŠI

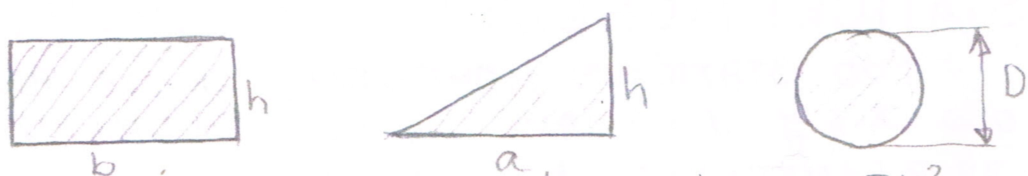
POVRŠINA RAVNE POVRŠI U OZNACI A JEDNAKA JE ZBIRU (SUMI, INTEGRALU) BESKONAČNO MNOGO ELEMENTARNIH RAVNIH POVRŠI POVRŠINA dA (SL.) TJ.



$$A = \int_A dA \qquad (1)$$

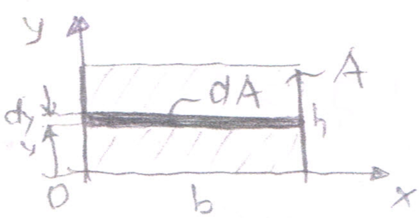
OSOBINE POVRŠINE RAVNE POVRŠI

• IZRAZI ZA IZRAČUNAVANJE POVRŠINA JEDNOSTAVNIH RAVNIH POVRŠI SU POZNATI I IMAJU IZGLED



$A = bh$ $\qquad A = \frac{1}{2}ah$ $\qquad A = \frac{\pi D^2}{4}$

PRETHODNE IZRAZE BI DOBILI RJEŠAVANJEM INTEGRALA (1). NA PRIMJER ZA SLUČAJ PRAVOUGAONIKA VAŽI



$$dA = b\,dy,$$
$$A = \int dA = \int b\,dy = b\int_0^h dy = by\Big|_0^h = bh$$

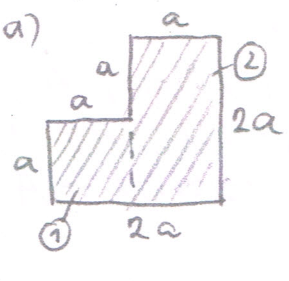
• POVRŠINA SLOŽENE RAVNE POVRŠI JEDNAKA JE ZBIRU POVRŠINA JEDNOSTAVNIH RAVNIH POVRŠI OD KOJIH

SE SASTOJI. DAKLE

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i \qquad \dots\dots (2)$$

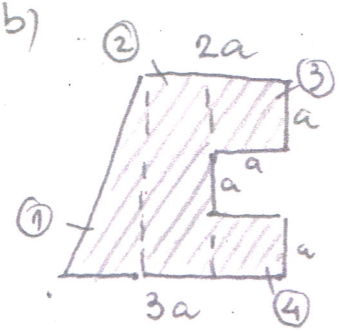
PRIMJER: ODREDITI POVRSINE SLOZENIH RAVNIH POVRSI PRIKAZANIH NA SLICI. DATO JE a.

a)



$$A_1 = a^2$$
$$A_2 = 2a \cdot a = 2a^2$$
$$A = A_1 + A_2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2$$

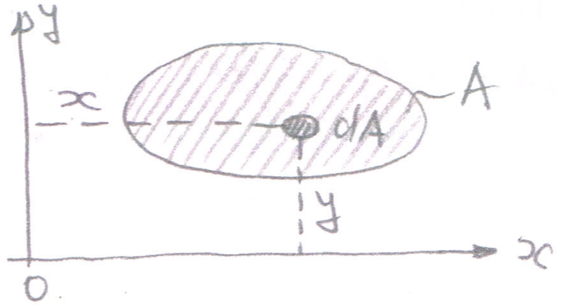
b)



$$A_1 = \frac{1}{2} a \cdot 3a = \frac{3a^2}{2}$$
$$A_2 = a \cdot 3a = 3a^2$$
$$A_3 = A_4 = a \cdot a = a^2$$
$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \frac{3a^2}{2} + 3a^2 + a^2 + a^2 = \frac{13}{2} a^2.$$

3. STATIČKI MOMENTI RAVNE POVRŠI

POD **STATIČKIM MOMENTIMA RAVNE POVRSI** ZA OSE x i y U OZNACI S_x i S_y PODRAZUMIJEVAMO ZBIR (INTEGRAL) BESKONAČNO MNOGO PROIZVODA OBLIKA $y\,dA$ ODNOSNO $x \cdot dA$ (sl.), GDJE JE dA POVRSINA PROIZVOLJNO UOČENE ELEMENTARNE RAVNE POVRSI A x i y NJENA RASTOJANJA OD KOORDINATNIH OSA, TJ.



$$S_x = \int_A y \cdot dA,$$
$$S_y = \int_A x\, dA. \qquad \dots (3)$$

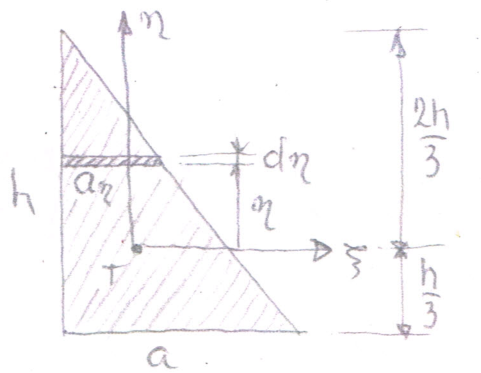
OSOBINE STATIČKIH MOMENATA RAVNE POVRŠI

• STATIČKI MOMENTI JEDNOSTAVNIH RAVNIH POVRŠI ZA TEŽIŠNE OSE ξ i η JEDNAKI SU NULI, TJ.

$$S_\xi = S_\eta = 0 \qquad (4)$$

OSE KOJE PROLAZE KROZ TEŽIŠTE SE ZOVU TEŽIŠNE (CENTRALNE OSE.

DA JE STATIČKI MOMENT RAVNE POVRŠI ZA TEŽIŠNU OSU JEDNAK NULI UVJERIĆEMO SE NA PRIMJERU TROUGLA PRIKAZANOG NA SLICI. POŠTO JE



$$dA = a_\eta \cdot d\eta$$

$$a_\eta = \frac{a}{h}\cdot\left(\frac{2}{3}h - \eta\right),$$

TO NA OSNOVU (3) VAŽI

$$S_\xi = \int \frac{a}{h}\left(\frac{2}{3}h - \eta\right)\eta \, d\eta = \frac{a}{h}\,\frac{2h}{3}\cdot\int \eta \, d\eta - \frac{a}{h}\int \eta^2 d\eta,$$

PA JE

$$S_\xi = \frac{2}{3}a\cdot\frac{\eta^2}{2}\Big|_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2}{3}h} - \frac{a}{h}\,\frac{\eta^3}{3}\Big|_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2}{3}h} = \frac{a}{3}\left[\left(\frac{2}{3}h\right)^2 - \left(-\frac{h}{3}\right)^2\right] - \frac{a}{3h}\left[\left(\frac{2}{3}h\right)^3 - \left(-\frac{h}{3}\right)^3\right] = \frac{ah^2}{9} - \frac{ah^2}{9} = 0.$$

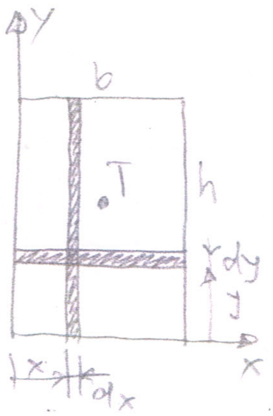
• STATIČKI MOMENTI RAVNE POVRŠI ZA OSE x i y KOJE SU PARALELNO POMJERENE U ODNOSU NA TEŽIŠNE OSE JEDNAKI SU

$$S_x = y_T \cdot A$$
$$S_y = x_T \cdot A, \qquad (5)$$

GDJE SU x_T i y_T KOORDINATE TEŽIŠTA RAZMATRANE RAVNE POVRŠI A A JE POVRŠINA RAVNE POVRŠI.

UMJESTO DOKAZA PRETHODNE OSOBINE, ZA PRA-

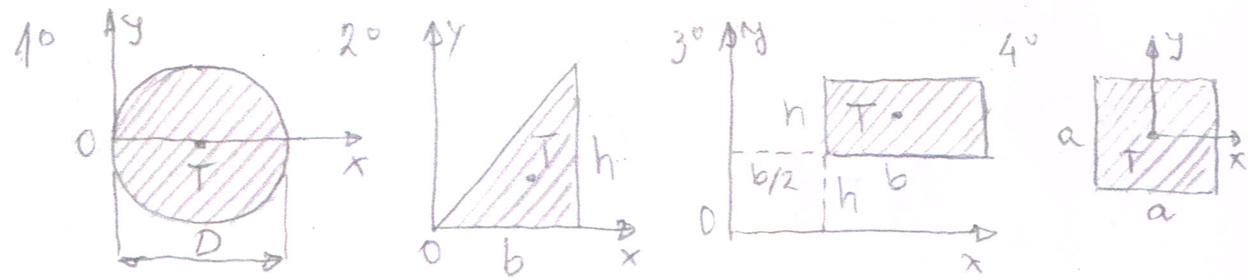
VOUGAONIK PRIKAZAN NA SLICI ĆEMO ODREDITI STATIČKE MOMENTE POLAZEĆI OD (3) I POKAZATI DA SU JEDNAKI IZRAZIMA (5).



$$S_x = \int y\,dA = b\int_0^h y\,dy = \frac{by^2}{2}\Big|_0^h = \frac{bh^2}{2} = \frac{h}{2}\cdot bh = y_T \cdot A$$

$$S_y = \int x\,dA = h\int_0^b x\,dx = \frac{hx^2}{2}\Big|_0^b = \frac{hb^2}{2} = \frac{b}{2}\,bh = x_T \cdot A$$

PRIMJER: ZA RAVNE POVRŠI PRIKAZANE NA SLICI ODREDITI STATIČKE MOMENTE ZA OSE x, y. DATO JE: a, b, h i D.



1° $x_T = \frac{D}{2}$ $\qquad S_x = 0 \cdot \frac{\pi D^2}{4} = 0$

$y_T = 0$

$A = \frac{\pi D^2}{4}$ $\qquad S_y = \frac{D}{2}\cdot\frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi D^3}{8}$

2° $x_T = \frac{2}{3}b$ $\qquad S_x = \frac{1}{3}h\cdot\frac{1}{2}bh = \frac{bh^2}{6}$

$y_T = \frac{1}{3}h$

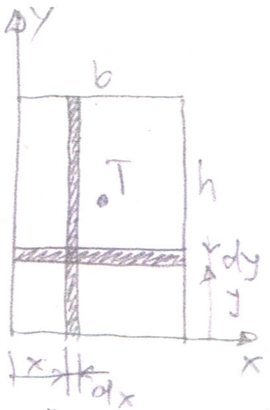
$A = \frac{1}{2}bh$ $\qquad S_y = \frac{2}{3}b\cdot\frac{1}{2}bh = \frac{1}{3}b^2h$

3° $x_T = b$; $y_T = \frac{3}{2}h$; $A = bh$. $S_x = \frac{3}{2}h\,bh = \frac{3}{2}bh^2$; $S_y = b\cdot bh = b^2h$

4° $x_T = y_T = 0$; $A = a^2$; $S_x = S_y = 0 \cdot a^2 = 0$

- STATIČKI MOMENTI SLOŽENE RAVNE POVRŠI JEDNAKI SU ZBIRU STATIČKIH MOMENATA JEDNOSTAVNIH RAVNIH POVRŠI ZA POSMATRANE OSE (SL.) TJ.

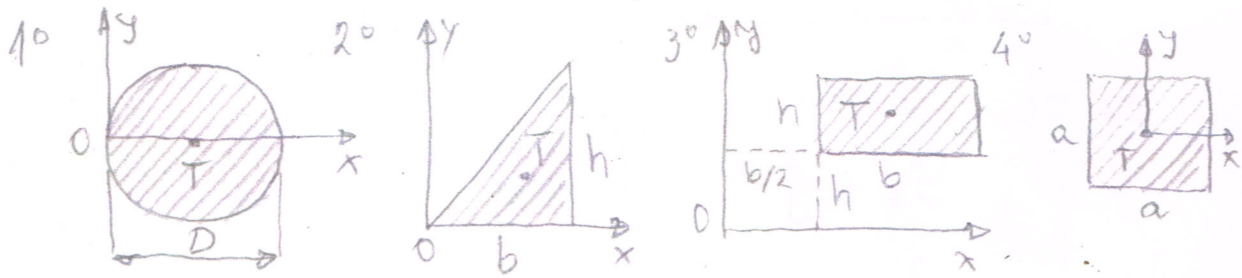
VOUGAONIK PRIKAZAN NA SLICI ĆEMO ODREDITI STATIČKE MOMENTE POLAZEĆI OD (3) I POKAZATI DA SU JEDNAKI IZRAZIMA (5).



$$S_x = \int y\,dA = b\int_0^h y\,dy = \frac{by^2}{2}\Big|_0^h = \frac{bh^2}{2} = \frac{h}{2}\cdot bh = y_T \cdot A$$

$$S_y = \int x\,dA = h\int_0^b x\,dx = \frac{hx^2}{2}\Big|_0^b = \frac{hb^2}{2} = \frac{b}{2}\,bh = x_T \cdot A$$

PRIMJER: ZA RAVNE POVRŠI PRIKAZANE NA SLICI ODREDITI STATIČKE MOMENTE ZA OSE x, y. DATO JE: a, b, h i D.



1° $x_T = \frac{D}{2}$ $\quad S_x = 0 \cdot \frac{\pi D^2}{4} = 0$

$y_T = 0$

$A = \frac{\pi D^2}{4}$ $\quad S_y = \frac{D}{2}\,\frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi D^3}{8}$

2° $x_T = \frac{2}{3} b$ $\quad S_x = \frac{1}{3} h \cdot \frac{1}{2} bh = \frac{bh^2}{6}$

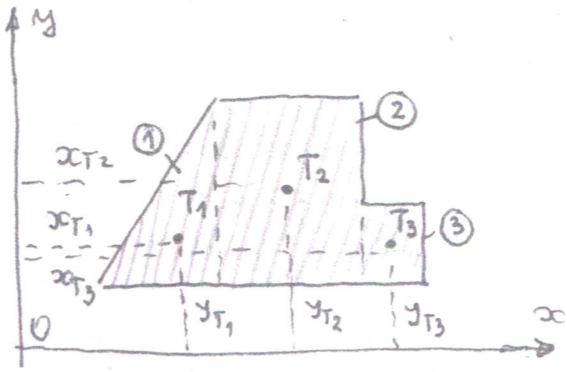
$y_T = \frac{1}{3} h$

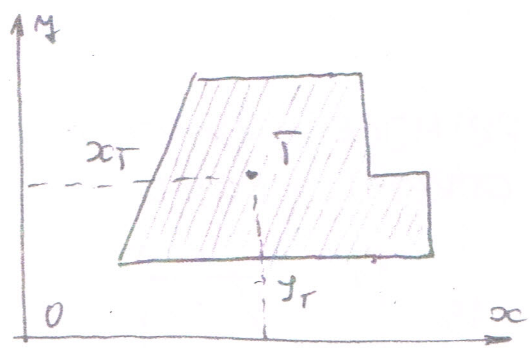
$A = \frac{1}{2} bh$ $\quad S_y = \frac{2}{3} b \cdot \frac{1}{2} bh = \frac{1}{3} b^2 h$

3° $x_T = b$; $y_T = \frac{3}{2} h$; $A = bh$. $S_x = \frac{3}{2} h\, bh = \frac{3}{2} bh^2$; $S_y = b \cdot bh = b^2 h$

4° $x_T = y_T = 0$; $A = a^2$; $S_x = S_y = 0 \cdot a^2 = 0$

• STATIČKI MOMENTI SLOŽENE RAVNE POVRŠI JEDNAKI SU ZBIRU STATIČKIH MOMENATA JEDNOSTAVNIH RAVNIH POVRŠI ZA POSMATRANE OSE (SL.) TJ.





$$S_x = S_x^{(1)} + S_x^{(2)} + S_x^{(3)} + \cdots = y_{T_1}A_1 + y_{T_2}A_2 + y_{T_3}A_3 + \cdots = \sum_{i=1}^{n} y_{T_i}A_i$$

$$S_y = S_y^{(1)} + S_y^{(2)} + S_y^{(3)} + \cdots = x_{T_1}A_1 + x_{T_2}A_2 + x_{T_3}A_3 + \cdots = \sum_{i=1}^{n} x_{T_i}A_i \qquad (6)$$

PREDHODNU OSOBINU NEĆEMO DOKAZIVATI.

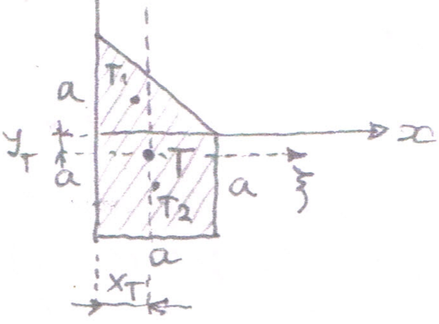
• KOORDINATE TEŽIŠTA SLOŽENE RAVNE POVRŠI SU ODREĐENE SLJEDEĆIM IZRAZIMA

$$x_T = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum x_{T_i}A_i}{\sum A_i} = \frac{x_{T_1}A_1 + x_{T_2}A_2 + \cdots}{A_1 + A_2 + \cdots}$$

$$y_T = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum y_{T_i}A_i}{\sum A_i} = \frac{y_{T_1}A_1 + y_{T_2}A_2 + \cdots}{A_1 + A_2 + \cdots} \qquad (7)$$

PRETHODNI IZRAZI SE DOBIJAJU IZJEDNAČAVANJEM IZRAZA (4) i (6).

PRIMJER: ZA RAVNU POVRŠ PRIKAZANU NA SLICI ODREDITI: POVRŠINU A, STATIČKE MOMENTE S_x i S_y i KOORDINATE TEŽIŠTA x_T i y_T. DATO JE a.



$$x_{T_1} = \frac{a}{3}; \quad y_{T_1} = \frac{a}{3}; \quad A_1 = \frac{1}{2}a^2$$

$$x_{T_2} = \frac{a}{2}; \quad y_{T_2} = -\frac{a}{2}; \quad A_2 = a^2$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{2}a^2 + a^2 = \frac{3}{2}a^2$$

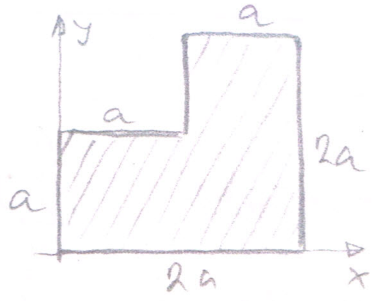
$$S_x = y_{T_1}A_1 + y_{T_2}A_2 = \frac{a}{3}\frac{a^2}{2} + \left(-\frac{a}{2}\right)a^2 = -\frac{a^3}{3}$$

$$S_y = x_{T_1}A_1 + x_{T_2}A_2 = \frac{a}{3}\frac{a^2}{2} + \frac{a}{2}a^2 = \frac{2}{3}a^3$$

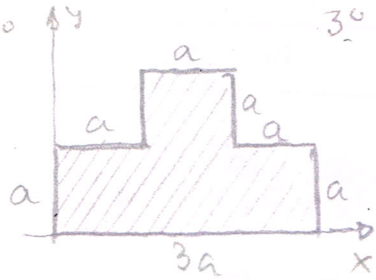
$$x_T = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{2a^3}{3}}{\frac{3}{2}a^2} = \frac{4}{9}a, \quad y_T = \frac{S_x}{A} = \frac{(-a^3/3)}{\frac{3}{2}a^2} = -\frac{2}{9}a$$

PRIMJER: ZA RAVNE POVRŠI PRIKAZANE NA SLICI ODREDITI KOORDINATE TEŽIŠTA x_T i y_T. DATO JE a.

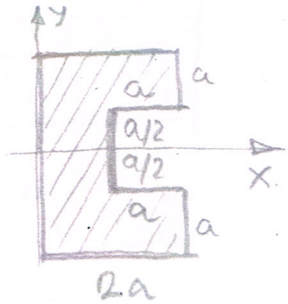
1°



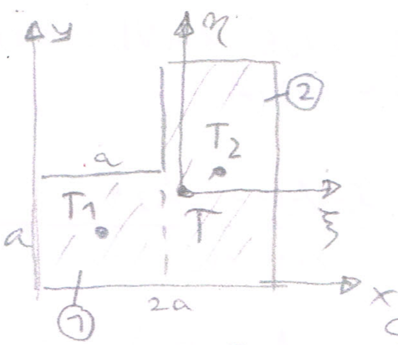
2°



3°



1°



$$A_1 = a^2 \;;\; A_2 = 2a^2 \;;\; A = A_1 + A_2 = 3a^2$$

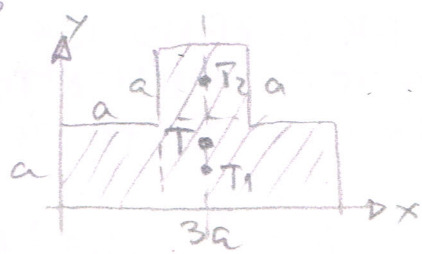
$$T_1: \; x_{T_1} = \frac{a}{2} \;;\; y_{T_1} = \frac{a}{2}$$

$$T_2 = \; x_{T_2} = \frac{3}{2}a \;;\; y_{T_2} = a$$

$$x_T = \frac{S_y}{A} = \frac{x_{T_1} A_1 + x_{T_2} A_2}{A_1 + A_2} = \frac{\frac{a}{2}a^2 + \frac{3}{2}a \cdot 2a^2}{3a^2} = \frac{7}{6}a$$

$$y_T = \frac{S_x}{A} = \frac{y_{T_1} A_1 + y_{T_2} A_2}{A_1 + A_2} = \frac{\frac{a}{2}a^2 + a \cdot 2a^2}{3a^2} = \frac{5}{6}a$$

2°



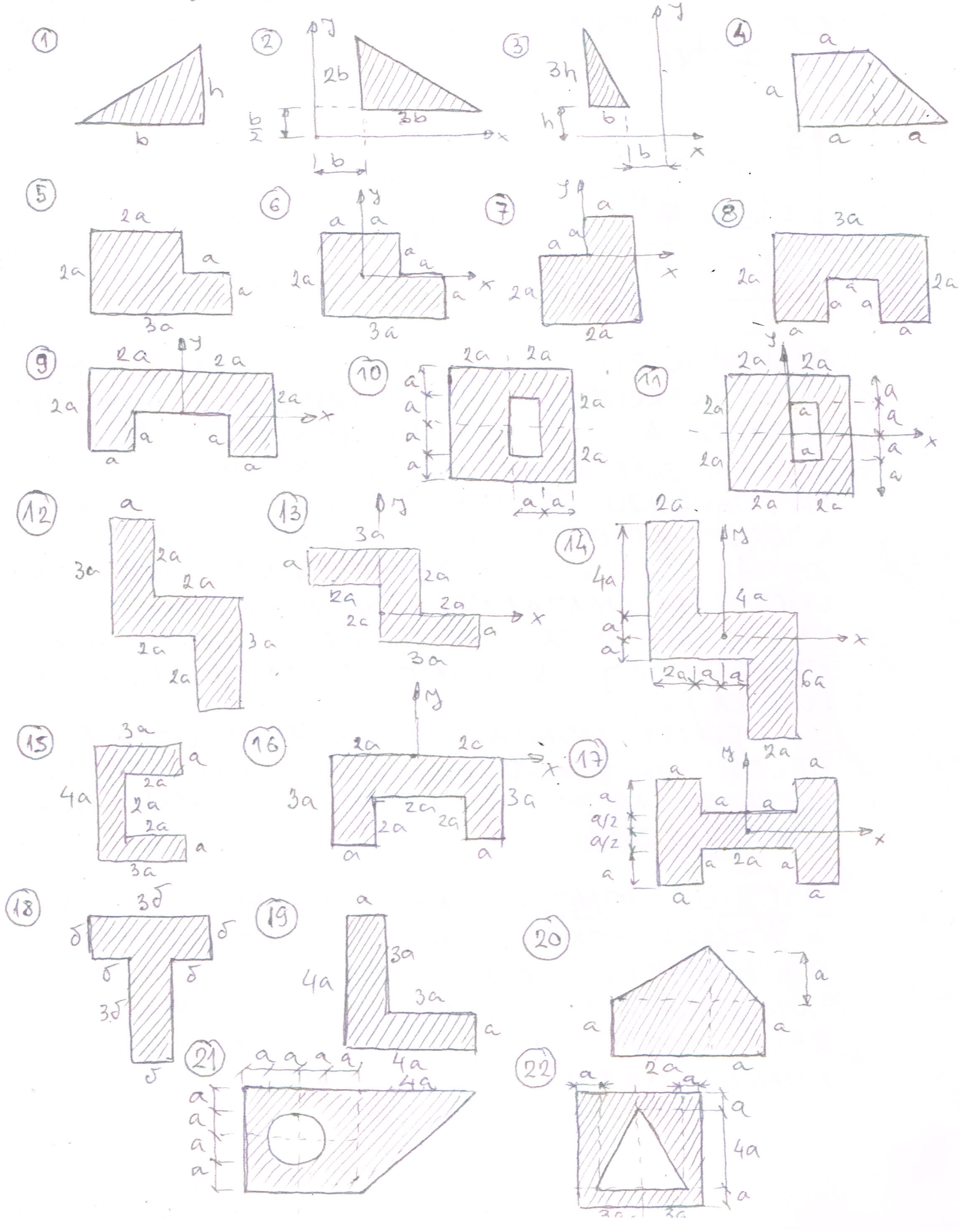
R: $x_T = \frac{3}{2}a \;;\; y_T = \frac{3}{4}a$

3° R: $x_T = \frac{11}{10}a \;;\; y_T = 0$

IZ PREDHODNIH PRIMJERA SE MOŽE ZAKLJUČITI DA SE TEŽIŠTE NALAZI NA OSI SIMETRIJE. AKO TIJELO IMA DVIJE OSE SIMETRIJE TEŽIŠTE SE NALAZI U NJIHOVOM PRESJEKU.

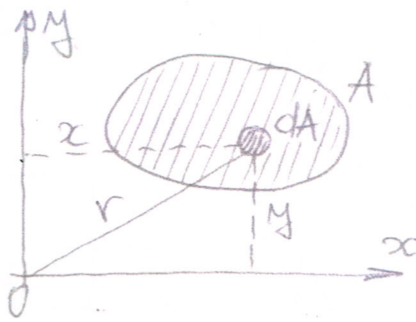
ZADACI ZA VJEŽBU

- ZA RAVNE POVRŠI PRIKAZANE NA SLICI ODREDITI KOORDINATE TEŽIŠTA. POTREBNI PODACI SU DATI NA SLICI. POLOŽAJ KOORDINATNIH OSA, UKOLIKO NIJE DAT NA SLICI, SAMOSTALNO ODABRATI. DATO JE a.



4. MOMENTI INERCIJE RAVNE POVRŠI

POD MOMENTIMA INERCIJE RAVNE POVRŠI ZA OSE x I y PODRAZUMIJEVAMO VELIČINE DEFINISANE NA SLJEDEĆI NAČIN



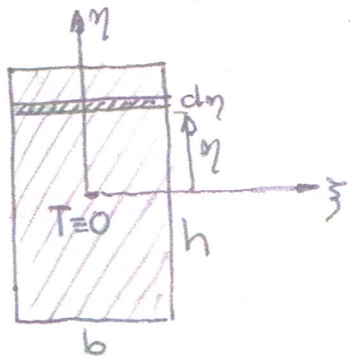
$$I_x = \int y^2 dA$$
$$I_y = \int x^2 dA$$
$$I_{xy} = \int xy\,dA \qquad (8)$$
$$I_0 = \int r^2 dA.$$

MOMENTI INERCIJE I_x I I_y SE ZOVU **AKSIJALNI MOMENTI INERCIJE**, I_{xy} JE **CENTRIFUGALNI MOMENT INERCIJE** A I_0 JE **POLARNI MOMENT INERCIJE**. SLIČNO KAO STATIČKI MOMENTI I MOMENTI INERCIJE PREDSTAVLJAJU ZBIROVE (SUME, INTEGRALE) BESKONAČNO MNOGO PROIZVODA OBLIKA x^2dA, y^2dA, $xy\,dA$ I r^2dA GDJE JE dA POVRŠINA PROIZVOLJNO UOČENE ELEMENTARNE (BESKONAČNO MALE) RAVNE POVRŠI, A x, y, r SU NJENA RASTOJANJA OD OSA x I y ODNOSNO OD KOORDINATNOG POČETKA (SL.)

UKOLIKO MOMENTE INERCIJE ODREĐUJEMO U ODNOSU NA TEŽIŠNE OSE ξ I η RAVNE POVRŠI ONDA SE ONI ZOVU **TEŽIŠNI (CENTRALNI) MOMENTI INERCIJE**.

OSOBINE MOMENATA INERCIJE RAVNE POVRŠI

- TEŽIŠNE MOMENTE INERCIJE JEDNOSTAVNIH RAVNIH POVRŠI ODREĐUJEMO RJEŠAVANJEM INTEGRALA (8). TAKO NPR. RJEŠAVANJEM (8) ZA RAVNU POVRŠ U OBLIKU PRAVOUGAONIKA ZA MOMENT INERCIJE I_ξ DOBIJAMO

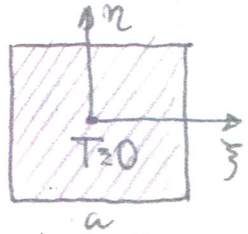


$$I_\xi = \int_A \eta^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \eta^2 b\,d\eta = b\,\frac{\eta^3}{3}\Bigg|_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} = \frac{bh^3}{24}+\frac{bh^3}{24}=\frac{bh^3}{12}$$

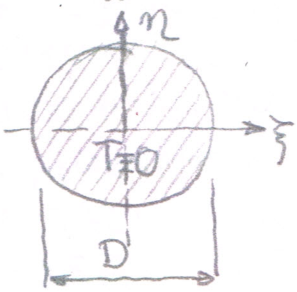
OSTALI MOMENTI INERCIJE SU

$$I_\eta = \frac{bh^3}{12}\ ;\ I_{\xi\eta}=0\ ;\ I_0=\frac{bh}{12}(b^2+h^2).$$

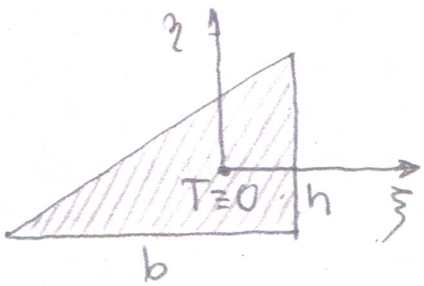
MOMENTI INERCIJE ZA OSTALE JEDNOSTAVNE RAVNE RAVNE POVRŠI SU



$$I_\xi = I_\eta = \frac{a^4}{12}\ ;\ I_{\xi\eta}=0\ ;\ I_0=\frac{bh}{2}(b^2+h^2)$$



$$I_\xi = I_\eta = \frac{\pi D^4}{64}\ ;\ I_{\xi\eta}=0\ ;\ I_0=\frac{\pi D^4}{32}$$



$$I_\xi = \frac{bh^3}{36}\ ;\ I_\eta = \frac{hb^3}{36}$$

$$I_{\xi\eta} = \frac{+b^2h^2}{72}\ ;\ I_0 = \frac{bh(b^2+h^2)}{36}$$

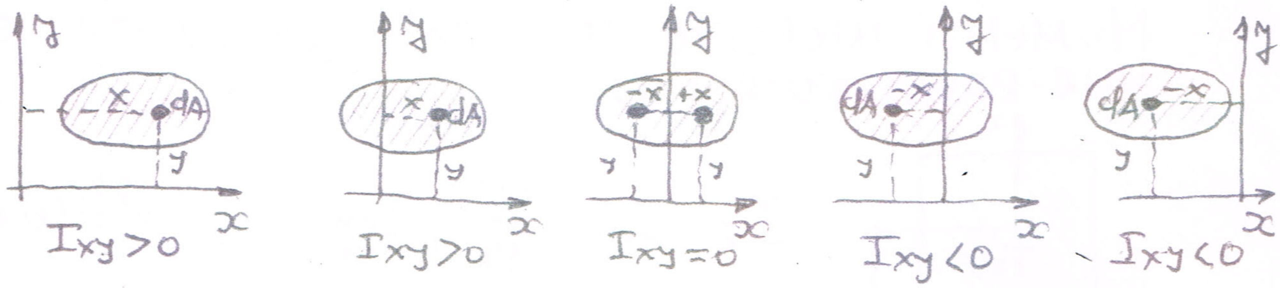
- POLARNI MOMENT INERCIJE JEDNAK JE ZBIRU AKSIJALNIH MOMENATA INERCIJE, TJ.

$$I_0 = I_x + I_y.$$

PREDHODNA JEDNAKOST SE LAKO DOKAZUJE IMAJUĆI U VIDU (8) I ČINJENICU DA JE $r^2 = x^2+y^2$

$$I_0 = \int_A r^2 dA = \int_A (x^2+y^2)\,dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_y + I_x$$

• MOMENTI INERCIJE I_x, I_y I I_o SU UVIJEK POZITIVNI DOK I_{xy} MOŽE BITI POZITIVAN, NEGATIVAN ILI JEDNAK NULI. AKO RAVNA POVRŠ IMA BAR JEDNU OSU SIMETRIJE ONDA JE CENTRIFUGALNI MOMENT INERCIJE ZA TU I DRUGU, NA NJU NORMALNU OSU, JEDNAK NULI. (SL.)



IZ SAME DEFINICIJE MOMENATA INERCIJE (8) VIDI SE DA SU PROMJENLJIVE x, y I r KOD MOMENATA INERCIJE I_x, I_y I I_o NALAZE NA DRUGOM STEPENU PA SU ONI IZ TOG RAZLOGA UVIJEK POZITIVNI, JER SU SABIRCI OBLIKA x^2dA, y^2dA I r^2dA UVIJEK POZITIVNI. KOD MOMENTA INERCIJE I_{xy} SABIRCI OBLIKA $xydA$ MOGU BITI I POZITIVNI I NEGATIVNI ZAVISNO OD TOGA U KOJEM KVADRANTU SE NALAZI UOČENA ELEMENTARNA POVRŠINA dA, JER OD NJENOG POLOŽAJA ZAVISI ZNAK KOORDINATA x I y. AKO JE JEDNA OD OSA UJEDNO I OSA SIMETRIJE RAVNE POVRŠI ONDA SVAKOM POZITIVNOM SABIRKU $xydA$ ODGOVARA ISTI ALI NEGATIVAN SABIRAK $-xydA$ PA PRILIKOM FORMIRANJA SUME ODNOSNO INTEGRALA $I_{xy}=\int_A xydA$ DOBIJA SE REZULTAT JEDNAK NULI.

OSE RAVNE POVRŠI ZA KOJE JE CENTRIFUGALNI MOMENT INERCIJE JEDNAK NULI ZOVU SE **GLAVNE OSE INERCIJE**, A ODGOVARAJUĆI AKSIJALNI MOMENTI INERCIJE SU **GLAVNI MOMENTI INERCIJE**

IMAJUĆI U VIDU PRETHODNU KONSTATACIJU I OSOBINU 2) PROIZILAZI DA SU OSE SIMETRIJE