

Prvi domaći zadatak Analitička geometrija

1.a) Neka je dat paralelogram ABCD, i neka su K, L, M i N redom sredine duži $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$. Ako je

$$|\overrightarrow{AK}| : |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BL}| : |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CM}| : |\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{DN}| : |\overrightarrow{DA}| = \lambda,$$

dokazati da je četvorougao KLMN paralelogram.

b) Ako je $\lambda \neq \frac{1}{2}$, i KLMN paralelogram, dokazati da je četvorougao ABCD paralelogram.

2. Dati su vektori $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MA}$ i $\overrightarrow{MB}$. Znajući uglove α, β i γ između vektora $\overrightarrow{MB}$ i $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MC}$ i $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MA}$ i $\overrightarrow{MB}$, respektivno, naći odnos njihovih dužina $|\overrightarrow{MA}| : |\overrightarrow{MB}| : |\overrightarrow{MC}|$.

3. Dati su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Predstaviti vektor $\vec{b}$ kao sumu vektora $\vec{x}$ i $\vec{y}$, tako da je vektor $\vec{x}$ kolinearan vektoru $\vec{a}$, a vektor $\vec{y}$ ortogonalan na vektor $\vec{a}$.

4. Ako su $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{c}$ i $\vec{c} \times \vec{a}$ komplanarni, onda su oni kolinearni. Dokazati.

5. Naći zapreminu i dužine ivica tetraedra, čije je jedno tjeme koordinatni početak, a ostala tjemena su presjeci ravni $2x + 3y - 5z + 10 = 0$ sa koordinatnim osama.

6. Naći jednačinu ravni koja prolazi kroz tačku $(1, 1, 2)$, i na osama Ox i Oy odsijeca odsječke dužine 5 i 7, respektivno.

7. Unutar trougla, kojeg isijecaju ravni $x + 4y + 8z + 8 = 0$, $x - 2y + 2z + 2 = 0$, $3x + 4y + 12 = 0$ na ravni O_{xy} , naći tačku koja je jednako udaljena od ovih ravni.

8. Naći jednačinu cilindrične površi, čija je direktrisa kružnica

$$x^2 + y^2 = 0, \quad z = 0$$

, i čija generatriisa zaklapa jednake uglove sa koordinatnim osama.

9. Napisati jednačinu konusne površi, čiji je vrh tačka $(0, 0, a)$, a čija je direktrisa hiperbola $2xy = a^2, z = 0$.

10. Za koje vrijednosti parametra a postoji inverzna matrica matrice

$$A = \begin{pmatrix} a+2 & -2 & 5-a \\ 3 & -a-1 & 4 \\ a+5 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

Za te vrijednosti parametra naći inverznu matricu.