* Одредити једначину површи коју образује промјенљива права која сијече параболе $y^2=2x$, $z=0$ и $z^2=-2x$, $y=0$ и стално је паралелна равни $y-z=0$.

$$P_1: \begin{cases} y^2=2x \\ z=0 \end{cases} \qquad P_2: \begin{cases} z^2=-2x \\ y=0 \end{cases}$$

$M_1 \in P_1$ $\qquad$ $M_2 \in P_2$

$M_1\left(\frac{t^2}{2}, t, 0\right), t \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $M_2\left(-\frac{s^2}{2}, 0, s\right) \quad s \in \mathbb{R}$

$\alpha: y-z=0$

$\vec{n}_\alpha = (0,1,-1)$ $\qquad$ Нека $p \ni M_1$, $p \ni M_2$.

$$\overrightarrow{M_1M_2} \parallel \alpha \Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2} \circ \vec{n}_\alpha = 0$$

$$\left(-\frac{s^2+t^2}{2}, -t, s\right) \circ (0,+1,-1) = 0$$

$$-t-s=0 \Rightarrow \boxed{t+s=0} \quad (1)$$

$M(x,y,z) \in p$

Вектори $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ су колинеарни, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ т. д.

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda \overrightarrow{M_1M_2}$$

$$\left(x-\frac{t^2}{2}, y-t, z\right) = \lambda\left(-\frac{s^2+t^2}{2}, -t, s\right)$$

$$\frac{x-t^2/2}{-\frac{s^2+t^2}{2}} = \frac{y-t}{-t} = \frac{z}{s}$$

$$(y-t)s = -zt$$

из (1) $\Rightarrow$ $s=-t$

$$-(y-t)\cancel{t} = -z\cancel{t}, \quad t \neq 0$$

$$\boxed{t = y-z}$$

$$-\left(x-\frac{t^2}{2}\right)t = -\frac{s^2+t^2}{2}(y-t)$$

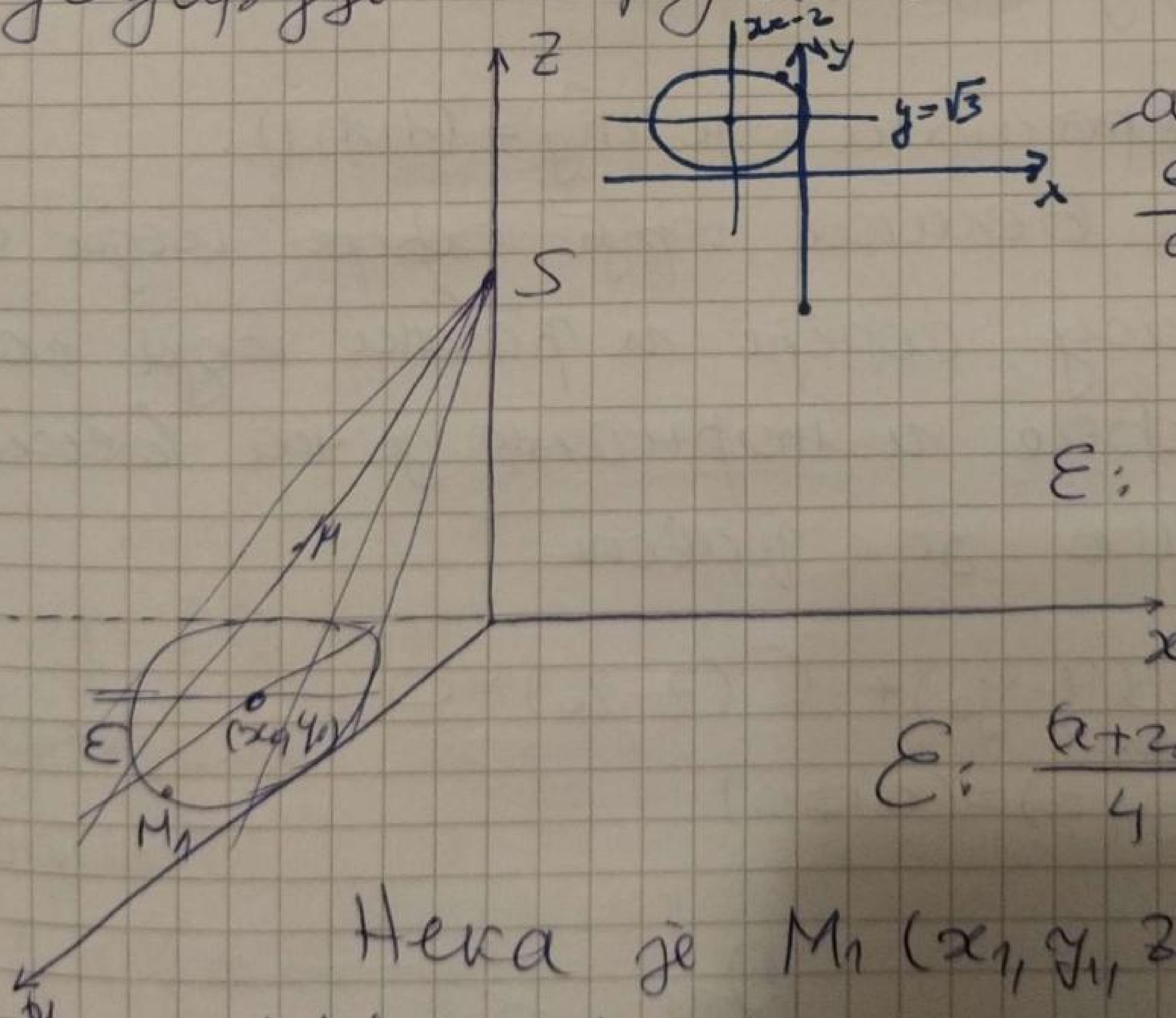
$$\left(x-\frac{t^2}{2}\right)\cancel{t} = \frac{\cancel{2}t^{\cancel{2}}}{\cancel{2}}(y-t)$$

$$x-\frac{t^2}{2}-ty+t^2=0$$

$$x-ty+\frac{t^2}{2}=0$$

$$\boxed{x-(y-z)y+\frac{1}{2}(y-z)^2=0}$$

* Одредити једначину конусне површи чији је врх тачка $S(0,0,1)$, а директриса у равни Oxy је елипса дата на следећи начин: велика оса (дужине 4) паралелна је са x-осом, нумерички ексцентрицитет је $1/2$, елипса лежи у II квадранту ($x\leq 0, y\geq 0$) и додирује координатне осе.



$$a^2=4$$

$$\frac{e}{a}=\frac{1}{2} \Rightarrow e=1$$

$$b^2=a^2-e^2=3$$

$$\mathcal{E}: \frac{(x-x_0)^2}{4}+\frac{(y-y_0)^2}{3}=1, \; z=0$$

$$\mathcal{E}: \frac{(x+2)^2}{4}+\frac{(y-\sqrt{3})^2}{3}=1, \; z=0$$

Нека је $M_1(x_1,y_1,z_1)\in\mathcal{E}$ и $M(x,y,z)$ на конусу.

$$SM: \frac{x}{x_1}=\frac{y}{y_1}=\frac{z-1}{z_1-1} \quad \dots (1)$$

$$\mathcal{E}: \frac{(x_1+2)^2}{4}+\frac{(y_1-\sqrt{3})^2}{3}=1, \quad z_1=0 \quad \dots (2)$$

$U_3(2)$: $\frac{y}{y_1} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow \boxed{y_1 = \frac{y}{1-z}}$

$U_3(2)$: $\frac{x}{x_1} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{x}{1-z}}$

Тражена површ је:

$$\boxed{\frac{\left(\frac{x}{1-z}+2\right)^2}{4} + \frac{\left(\frac{y}{1-z}-\sqrt{3}\right)^2}{3} = 1}$$

(*) Одредити једначину цилиндра чије генератрисе додирују сферу $x^2+y^2+z^2=1$ и заклапају међусобно једнаке углове са позитивним смјеровима координатних оса.

Вектор генератрисе је $\vec{n}_g = (1,1,1)$.
Директриса је велики круг сфере који се добија у пресјеку сфере и равни која садржи центар сфере и нормална је на вектор генератрисе. То је раван

α: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

$(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$

$\vec{n}_\alpha = (1,1,1)$

24

$\boxed{\alpha: x+y+z=0}$

~~Дир~~ Нека је $M_0(x_0,y_0,z_0)$ тачка не директриси. Имамо:

$$D: \begin{cases} x_0 + y_0 + z_0 = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1 \end{cases}$$

$$g: \frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{1} = \frac{z - z_0}{1} = (t)$$

$$x = t + x_0 \Rightarrow x_0 = x - t \Rightarrow x_0 = \frac{2x - y - z}{3}$$

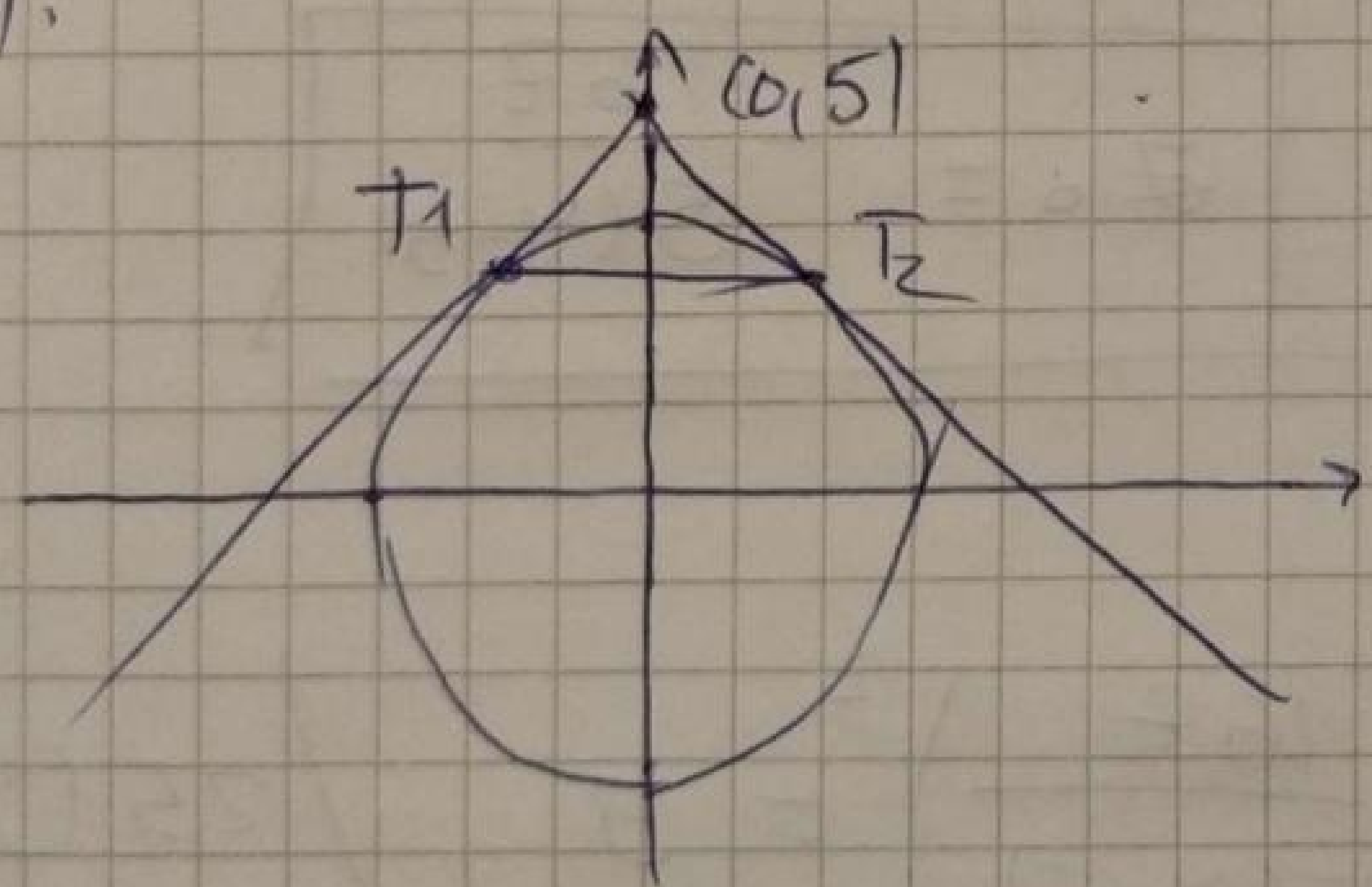
$$y = t + y_0 \Rightarrow y_0 = y - t \Rightarrow y_0 = \frac{2y - x - z}{3}$$

$$z = t + z_0 \Rightarrow z_0 = z - t \Rightarrow z_0 = \frac{2z - x - y}{3}$$

$$x + y + z - 3t = 0 \Rightarrow t = \frac{x + y + z}{3}$$

$$\left(\frac{2x - y - z}{3}\right)^2 + \left(\frac{2y - x - z}{3}\right)^2 + \left(\frac{2z - x - y}{3}\right)^2 = 1$$

Написати једначину конуса који додирује сферу $S: x^2 + y^2 + z^2 = 9$, а врх му је у тачки $V(0,5,0)$.



$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

$$\boxed{y = kx + 5}$$

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$x^2 + k^2x^2 + 10kx + 25 - 9 = 0$$

$$(1 + k^2)x^2 + 10kx + 16 = 0$$

$$D = 100k^2 - 64(1 + k^2) = 0$$

$$100k^2 - 64 - 64k^2 = 0$$

$$36k^2 = 64$$

$$k = \pm \frac{8}{6} = \pm \frac{4}{3}$$

$$y = \pm \frac{4}{3}x + 5$$

Одредимо тачке додира.

$$x^2 + \left(\frac{4}{3}x + 5\right)^2 = 9 \Rightarrow x = -\frac{12}{5}$$

$$x^2 + \left(-\frac{4}{3}x + 5\right)^2 = 9 \Rightarrow x = \frac{12}{5}$$

Дакле,

$$T_1\left(-\frac{12}{5}, \frac{9}{5}\right)$$

$$T_2\left(\frac{12}{5}, \frac{9}{5}\right)$$

Даље, директриса је

$$D: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ y=9/5 \end{cases}$$

Генератриса је $\frac{x}{x_0} = \frac{y-5}{y_0-5} = \frac{z}{z_0}$, где је $M(x,y,z)$ на конусу, а $M_0(x_0,y_0,z_0)$ на директриси.

$$x_0^2+y_0^2+z_0^2=9$$

$$y_0=9/5$$

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y-5}{\frac{9}{5}-5} = \frac{z}{z_0} = t$$

$$\cancel{y = 5-\frac{16}{5}t}$$

$$\cancel{z = z_0 t \Rightarrow z_0 = \frac{z}{t}}$$

$$\cancel{x = x_0 t \Rightarrow x_0 = \frac{x}{t}}$$

$$x = -x_0(y-5)\frac{5}{16}$$

$$\boxed{x_0 = -\frac{16x}{5(y-5)}} \qquad \boxed{z_0 = -\frac{16z}{5(y-5)}}$$

$$\left(\frac{16x}{5(y-5)}\right)^2 + \frac{81}{25} + \left(\frac{16z}{5(y-5)}\right)^2 = 9 \quad / \cdot 25(y-5)^2$$

$$256x^2 + \cancel{81} + 256z^2 + 81(y-5)^2 = 225(y-5)^2$$

$$256x^2 + 256z^2 = 144(y-5)^2$$

$$\boxed{16(x^2+z^2) = 9(y-5)^2}$$

23. Доћи до једначине површи ротацијом $y = \frac{4}{3}x+5$.