STATIKA KONSTRUKCIJA I

Stručno-naučna disciplina koja se bavi proračunom napona, deformacija i pomjeranja u inžinjerskim konstrukcijama u skladu sa zakonima mehanike deformabilnog tijela

TEORIJSKA MEHANIKA

TEORIJA KONSTRUKCIJA

U zavisnosti od vrste opterećenja na koje računamo uticaje (napone, deformacije i pomjeranja) razlikujemo sljedeće oblasti teorije konstrukcija:

- STATIKA KONSTRUKCIJA
- DINAMIKA KONSTRUKCIJA
- STABILNOST KONSTRUKCIJA

Predmet izučavanja u STATICI KONSTRUKCIJA:

Statičke metode za proračun uticaja kod linijskih nosača usljed dejstva opterećenja koje se ne mijenja u toku vremena, opterećenje nije funkcija vremena (statičko opterećenje)

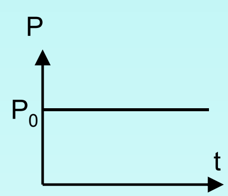
Dinamičko opterećenje je funkcija vremena, mijenja se u toku vremena.

STATIKA KONSTRUKCIJA **DINAMIKA KONSTRUKCIJA** **STABILNOST KONSTRUKCIJA**

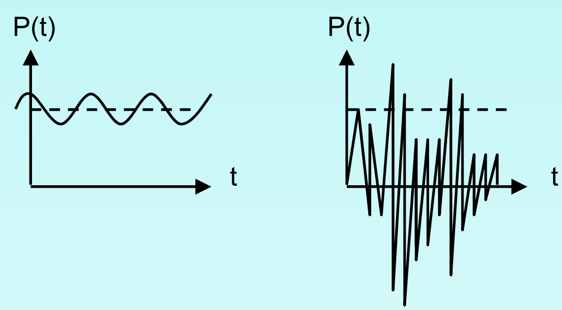
Pri statičkom opterećenju **Pri dinamičkom opterećenju**

LINIJSKI NOSAČI **POVRŠINSKI NOSAČI**

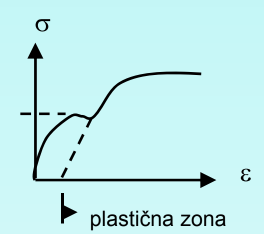
Elastičan materijal **Plastičan materijal** **Viskozan materijal**



Statičko opterećenje



Dinamičko opterećenje



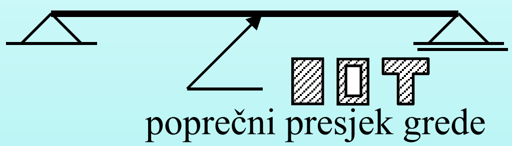
Veza napon-deformacija

Vrste nosača koji su predmet analize u Teoriji konstrukcija:

- Linijski nosači
- Površinski nosači (ploče i ljuske)

Linijski nosači – nosači koji mogu da se prikažu kao linije (prave, izlomljene i krive)

Najjednostavniji linijski nosač je prosta greda:

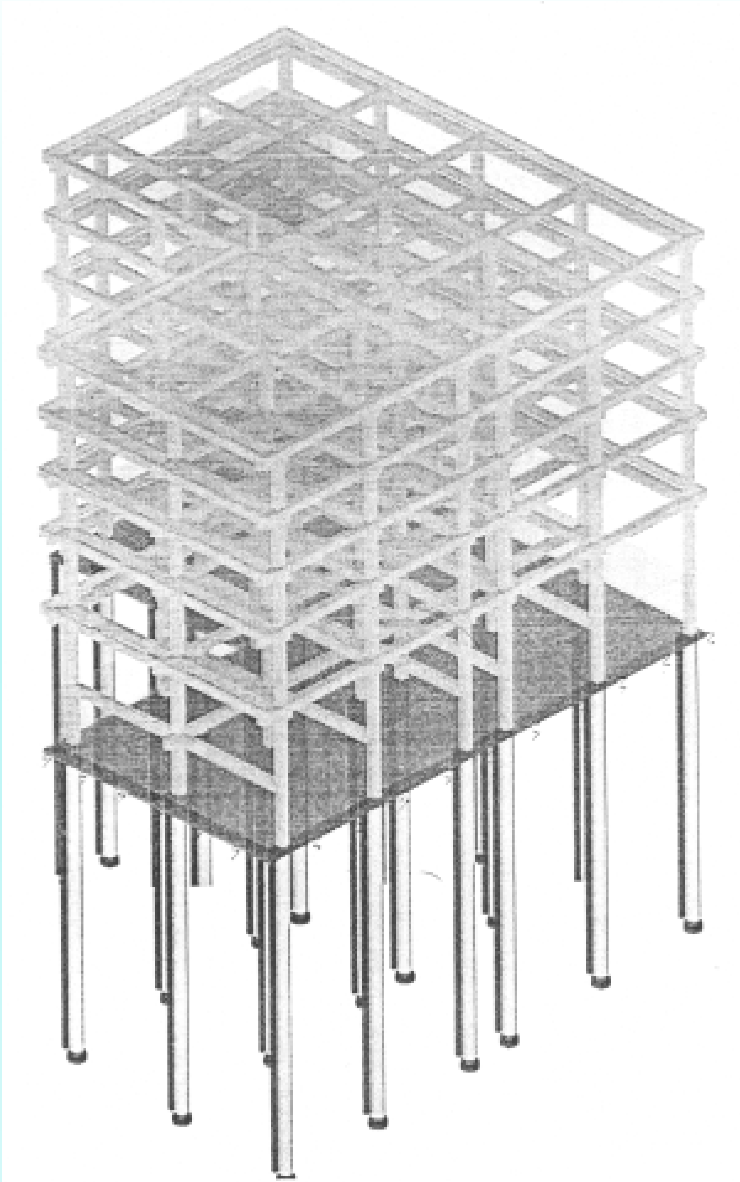


Predmet analize Statike konstrukcija su ravni linijski nosači

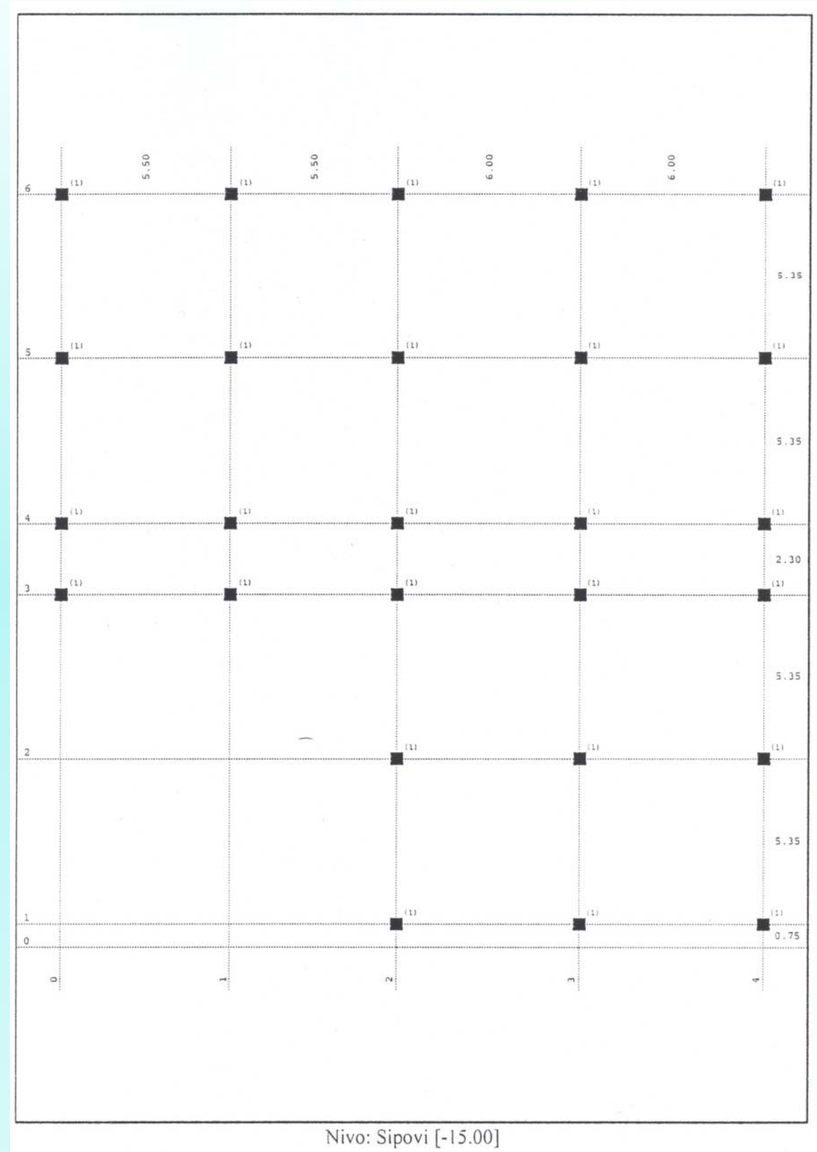
Ploče i ljuske ne možemo prikazati kao linijske nosače linijama već se oni prikazuju površinama zbog čega ih nazivamo *površinskim nosačima*.

Nakon definisanja vrste nosača koju treba sračunati i analizirati, prelazimo na izbor geometrijskih i materijalnih karakteristika i metode proračuna (u zavisnosti od vrste nosača).

Konstruktivni sistemi:

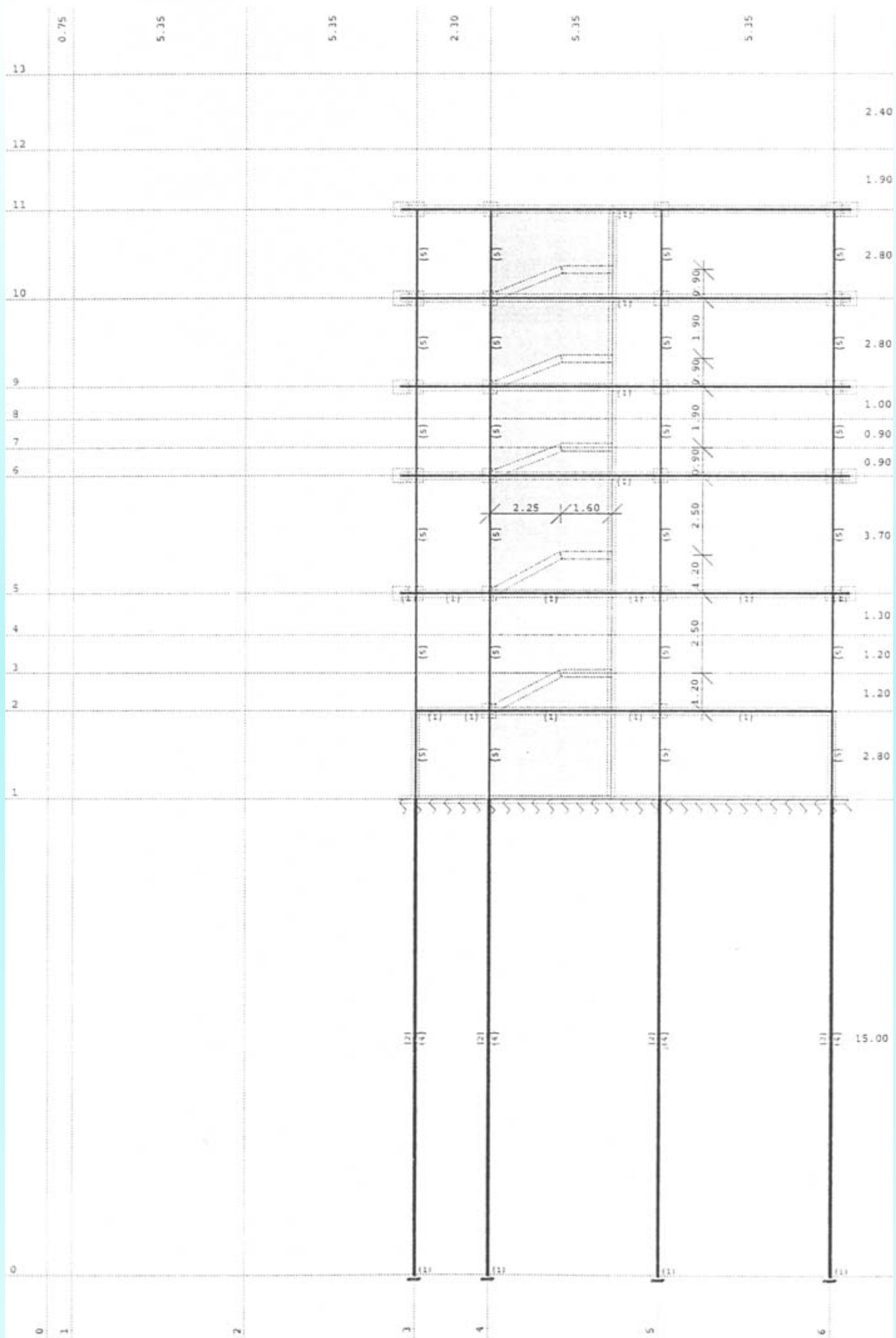


Prostorni prikaz –Konstruktivni sistem ZGRADE

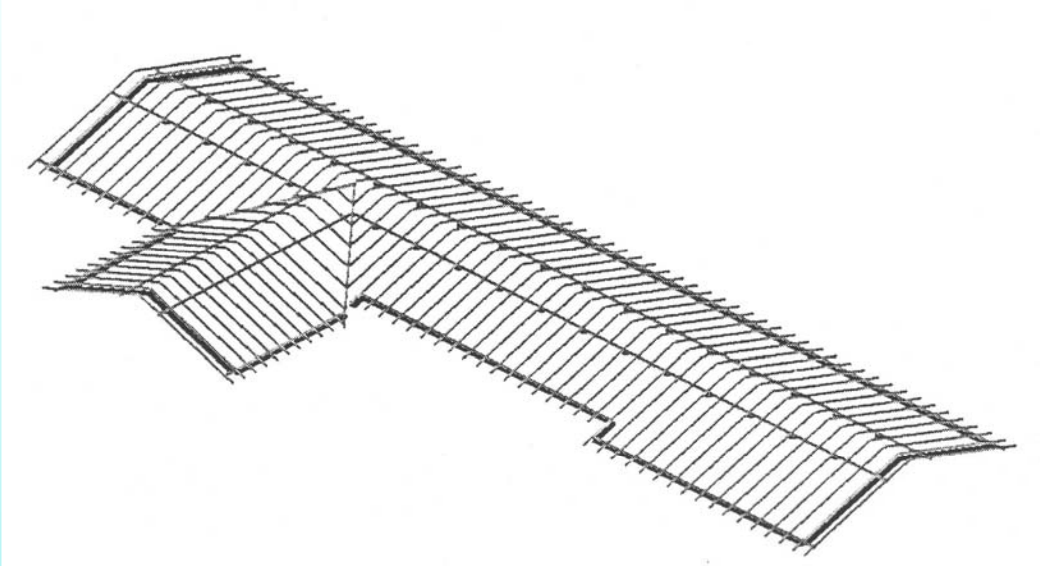


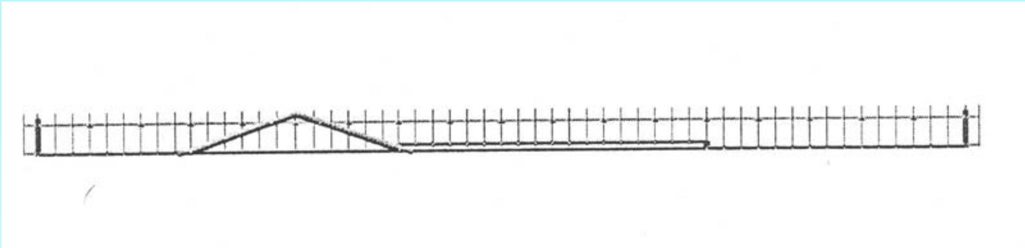
Osnova – nivo šipovi

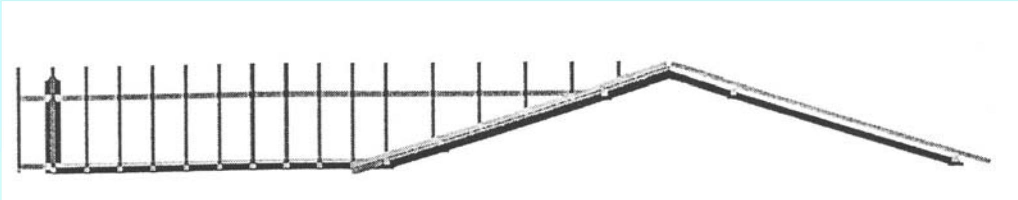
Ravni nosač, šematski prikaz - Poprečni presjek

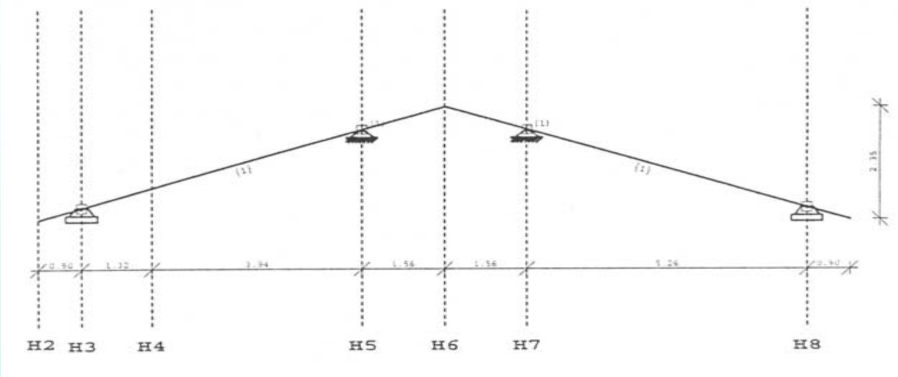


KROVNA KONSTRUKCIJA

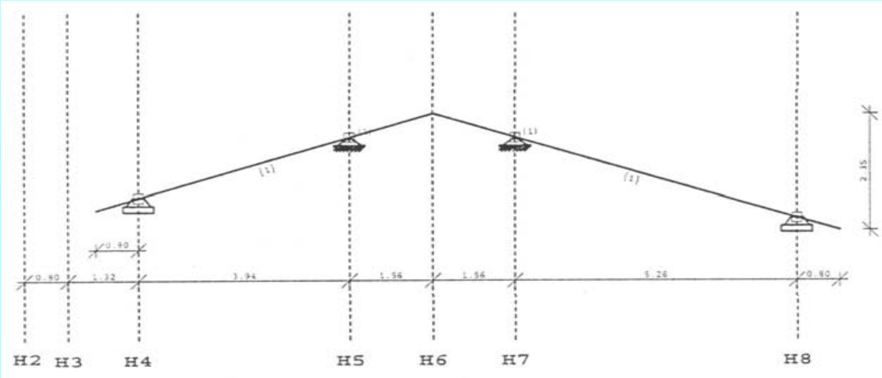




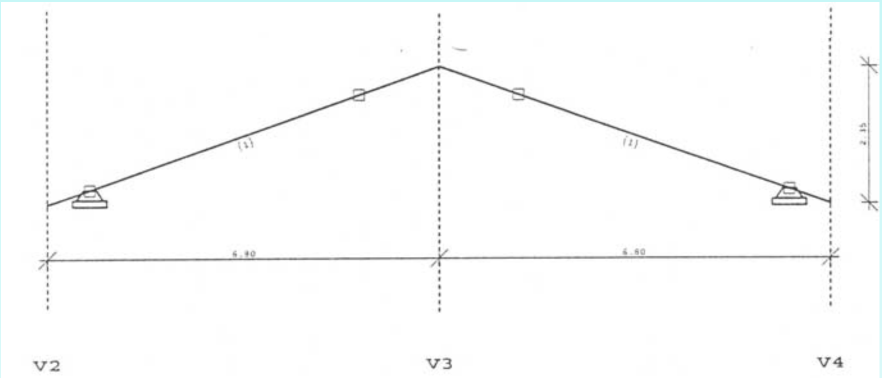




Krov – statička šema 1, ravan linijski nosač

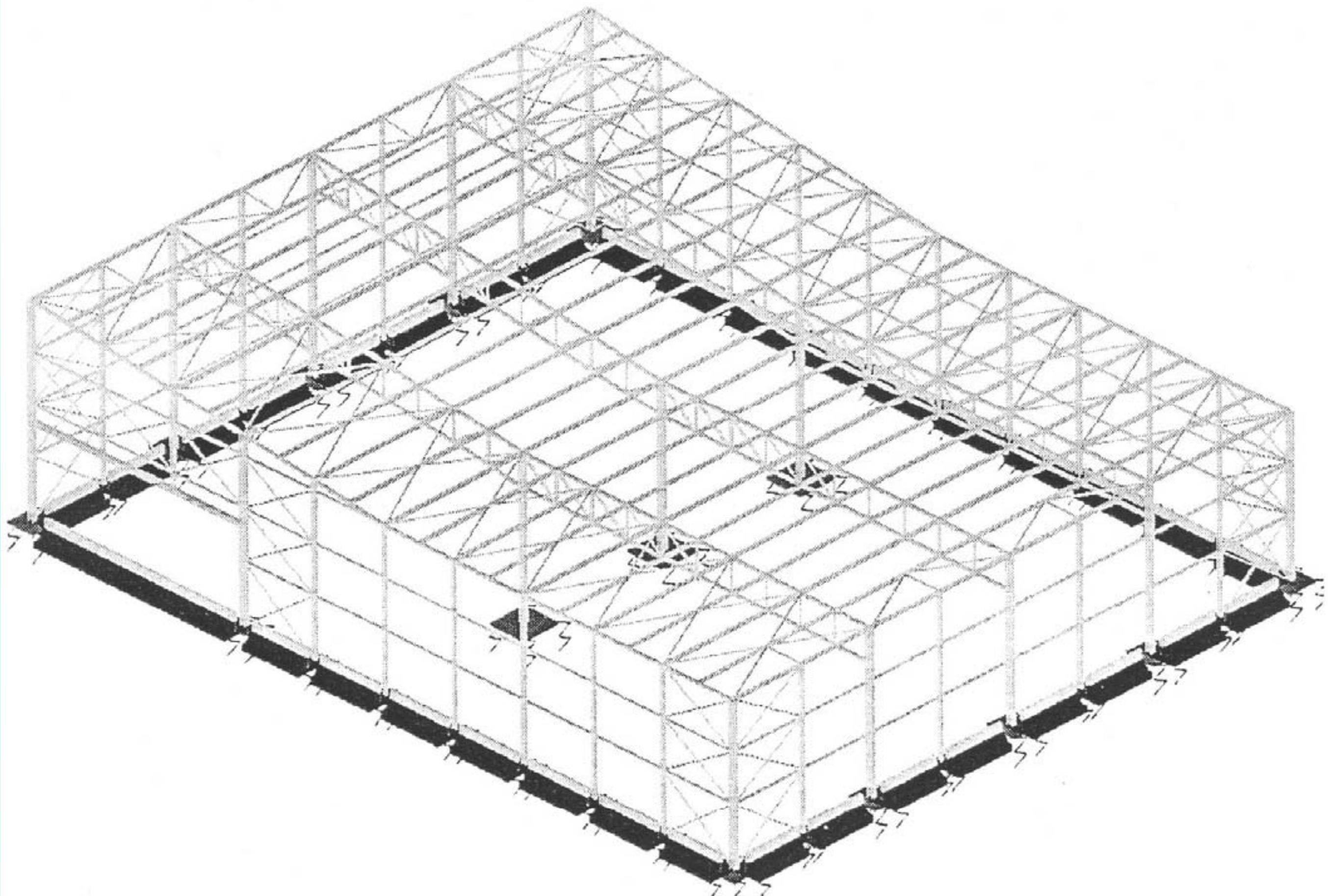


Krov – statička šema 2, ravan linijski nosač

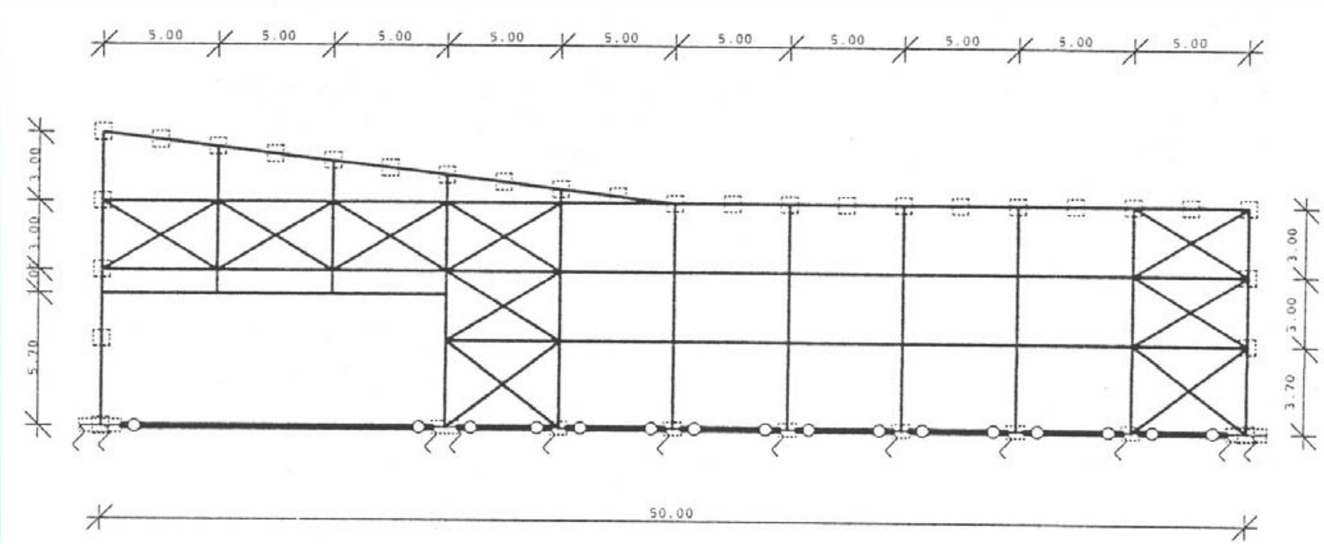


Krov – statička šema 3, ravan linijski nosač

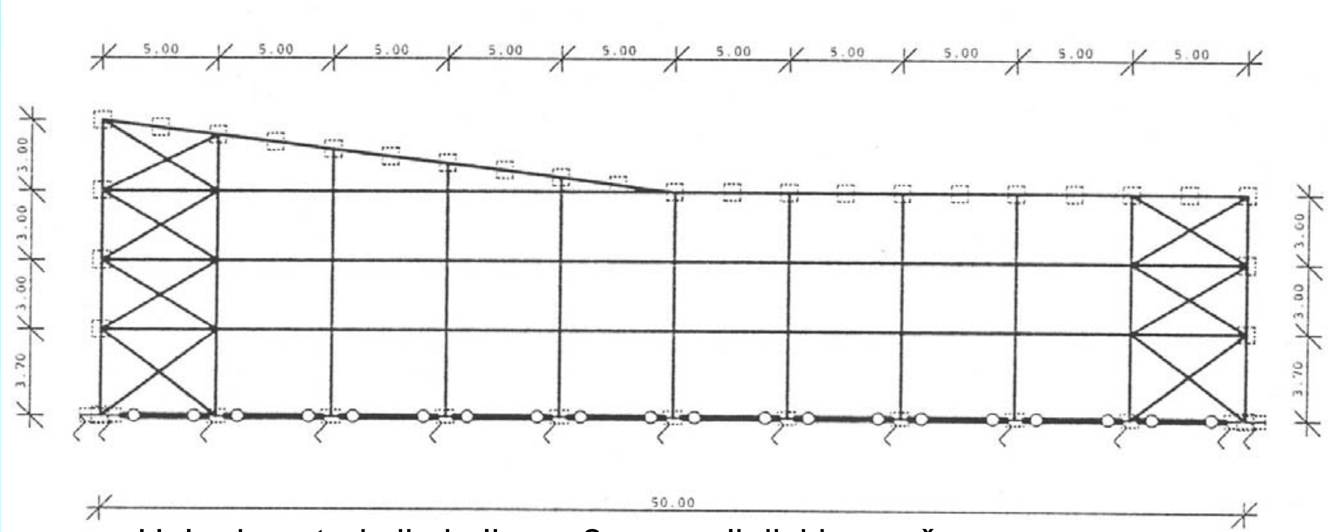
KONSTRUKCIJA HALE



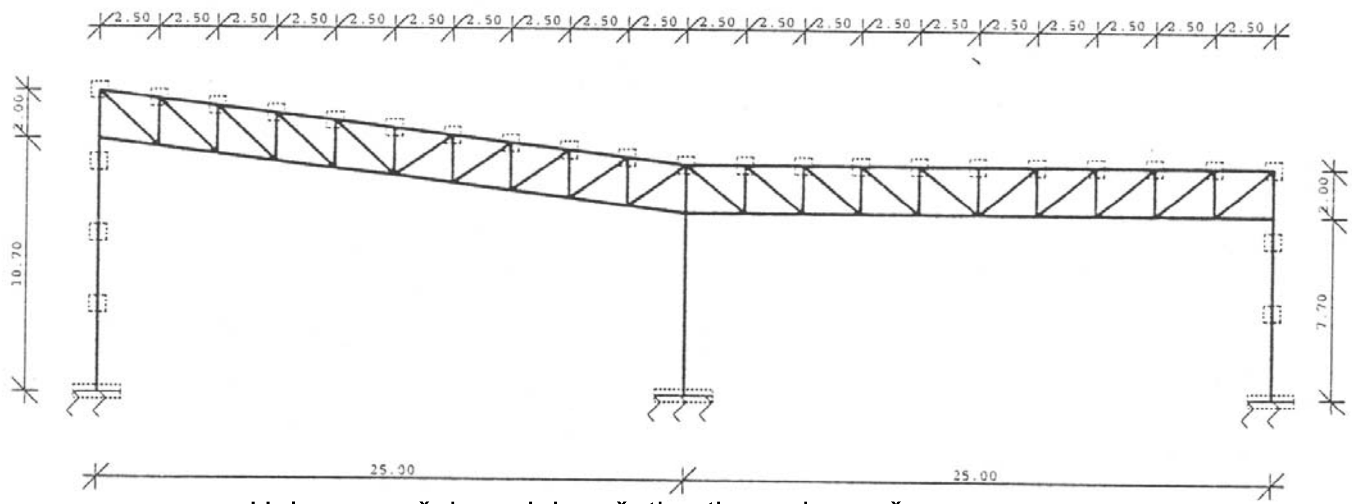
Prostorni konstruktivni sistem



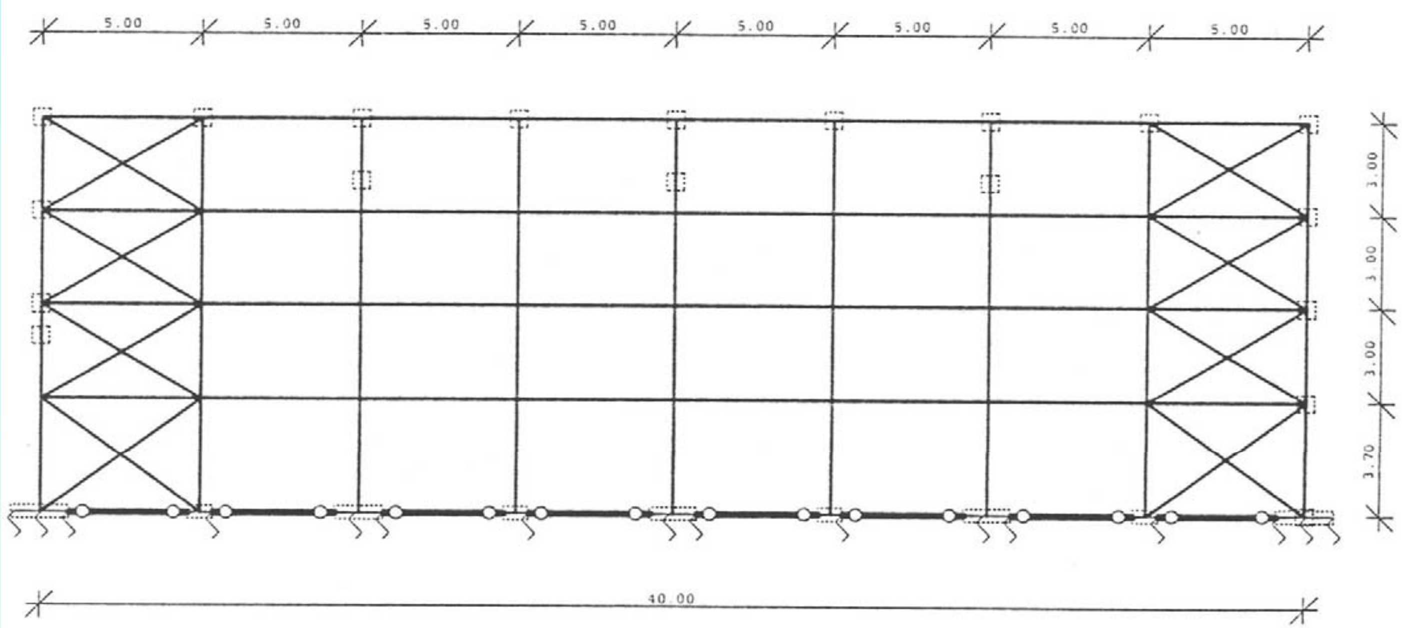
Hala- konstrukcija kalkana 1, ravan linijski nosač



Hala- konstrukcija kalkana 2, ravan linijski nosač



Hala- poprečni presjek, rešetkasti ravni nosač



UVOD

Metode teorije konstrukcija zasnovane su na ***MEHANICI DEFORMABILNOG TIJELA***

Mehanika deformabilnog tijela je dio mehanike koji izučava ponašanje čvrstih tijela uzimajući u obzir njihovu deformabilnost.

Teorije razvijene u mehanici deformabilnog tijela, a u zavisnosti od veza napona i deformacija, su:

- **teorija elastičnosti** koja obuhvata probleme elastičnih deformacija
- **teorija plastičnosti** koja obuhvata probleme plastičnih deformacija
- **Ostale teorije**

U zavisnosti od pretpostavki koje se odnose na deformaciju presjeka u teoriji linijskih nosača definisaće se:

- **teorija malih**
- **i teorija velikih deformacija**

Na osnovu ovoga zaključuje se da mehanika deformabilnog tijela obuhvata:

- **čitav spektar problema**
- **često rješavanje vrlo složenih problema**
- **vrlo često se ne mogu dobiti analitička rješenja**
- **koriste se numeričke metode proračuna.**

Od numeričkih metoda najpoznatija je **METODA KONAČNIH ELEMENATA** na kojoj su zasnovani programski paketi za proračun uticaja (**SAP, STRES, TOWER, ABAQUS, ANSYS** i sl.)
.

ISTORIJSKI RAZVOJ METODA ZA PRORAČUN LINIJSKIH NOSAČA

- u prvoj polovini 17. vijeka **Galileo Galilej** je izučavao ponašanje skeletne konstrukcije broda izložene dejstvu spoljašnjih sila

- vodeći istraživača i naučnika 18. i 19. vijeka su: **Newton** (1642.-1727.), **Coulomb** (1736.-1806.), **Euler** (1707.-1783.), **Poisson** (1781.-1840.), **Navier** (1785.-1857.), **Saint Venant** i drugi.

Na osnovu ovih istraživanja , krajem 19 i početkom 20. vijeka, formulisane su i kasnije usavršene **primjenljive inžinjerijske teorije i metode analize**.

Prvo su se formulisale danas dobro poznate **klasične metode** Statike linijskih nosača.

•J.C. **Maxwell** (1831.-1879.) daje postupak za proračun statički neodređenih linijskih nosača;
•O. **Mohr** (1835.-1918.) izlaže sličan postupak;
•**Muller-Breslau**, 1886., izlaže novi postupak proračuna statički neodređenih linijskih nosača usvajajući *reakcije oslonaca i presječne sile za nepoznate veličine* (**METODA SILA**);

•H. **Manderla**, 1880., daje ideju o korišćenju *pomjeranja i obrtanja čvorova kao osnovnih neodređenih veličina* (**TAČNA METODA DEFORMACIJA**). Imajući u vidu veliki broj jednačina koji se pojavljuje u ovoj metodi, kao i raspoloživa proračunska sredstva, ova metoda nije imala široku primjenu;

•O. **Mohr** je predložio uproččeni postupak koji je predložio Manderla, određujući *pomjeranja čvorova datog nosača kao pomjeranja čvorova nosača sa zglavkastim vezama*. Na taj način broj jednačina se znatno smanjio (**PRIBLIŽNA METODA DEFORMACIJA**).

- A. Bedihen i G.A. Maney prethodnu metodu uopštavaju i primjenjuju za okvirne konstrukcije;
- Nakon toga 1920. godine razvijeno je nekoliko iterativnih metoda za proračun linijskih nosača;
- H. Cross, 1930., predlaže Krosovu metodu;
- Nakon 30-te godine predloženo je niz približnih metoda.

- poslednjih 50- tak godina, za razliku od dosadašnjih **KLASIČNIH METODA**, razvijaju se savremene ili moderne metode proračuna. Ove metode koriste matrični aparat i nazivaju se **MATRIČNE METODE**, a sam način analize konstrukcija primjenom ovih metoda naziva se **MATRIČNA ANALIZA KONSTRUKCIJA**.

Razvoj ovih metoda išao je uporedo sa razvojem računara.

- Levy- daje osnovne jednačine metode sila u matričnom obliku sredinom 20 vijeka;

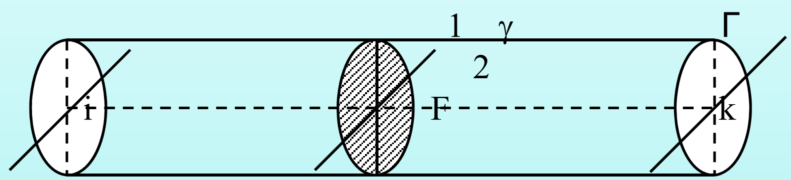
- Lang, Bisplinghof, Langefors, Wehlw, Lansing i drugi razrađuju koncept matrične formulacije metode sila uz primjenu računara;

- Lavy a kasnije i Argyris sa saradnicima izlažu ***opštu matričnu formulaciju na bazi osnovnih energetskih principa***. Njihovi radovi predstavljaju osnovu za dalji razvoj metoda matrične analize konstrukcija.

I TEORIJA ŠTAPA

OSNOVNE JEDNAČINE TEHNIČKE TEORIJE ŠTAPOVA U RAVNI

Oko zadate linije ik, koja je data na slici, u normalnim ravnima opisane su zatvorene krive Γ, koje ograničavaju površinu F pri čemu se težište površine F nalazi na liniji i-k:



U poređenju sa dužinom linije i-k površina F je mala. Geometrijsko mjesto tačaka γ čini površ Γ. *Tijelo koje ograničava površ Γ i površ F u tačkama i i k nazivano štapom.*

Štap može

- krivi štap
- pravi štap

Osa štapa ***l****inija i-k, linija težišta poprečnih presjeka;*

Poprečni presjeci štapa *su površi F i u zavisnosti od promjene poprečnog presjeka duž ose štapa može biti:*

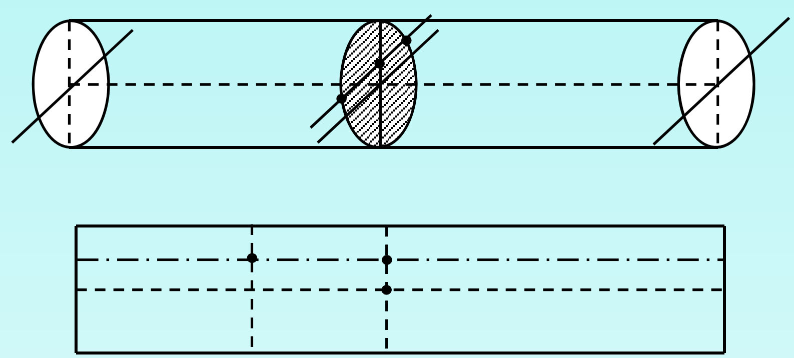
- *štap konstantnog poprečnog presjeka*
- *štap promjenljivog poprečnog presjeka.*

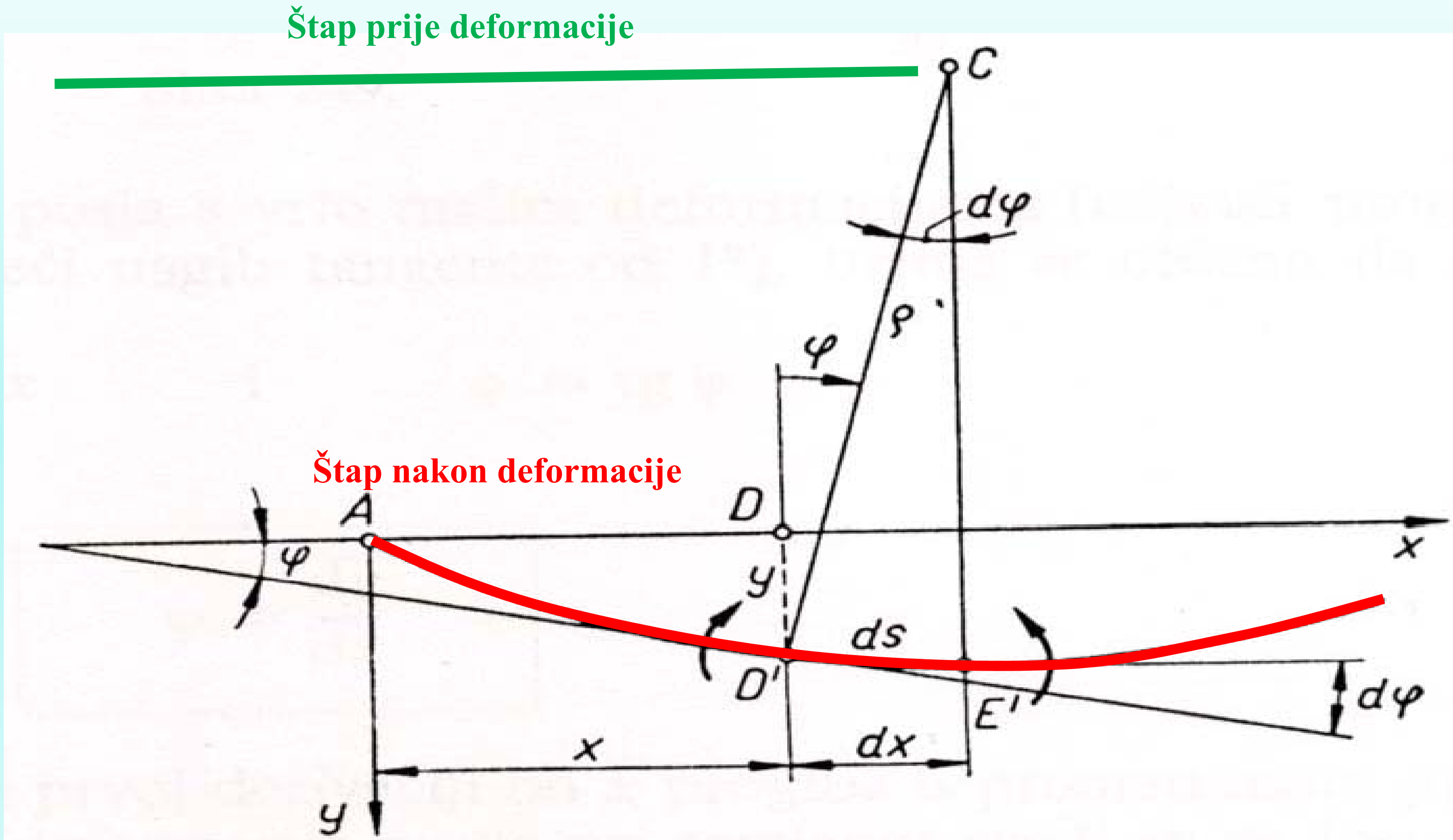
Ravan štap je štap čija osa sa jednom od glavnih centralnih osa inercija poprečnih presjeka leži u jednoj ravni, a odgovarajuću ravan nazivamo *ravan štapa.*

Prostorni štap je štap čija osa ne leži u jednoj ravni, i/ili osa štapa ne leži u istoj ravni sa jednom od glavnih centralnih osa inercije.

Deformacija ose štapa

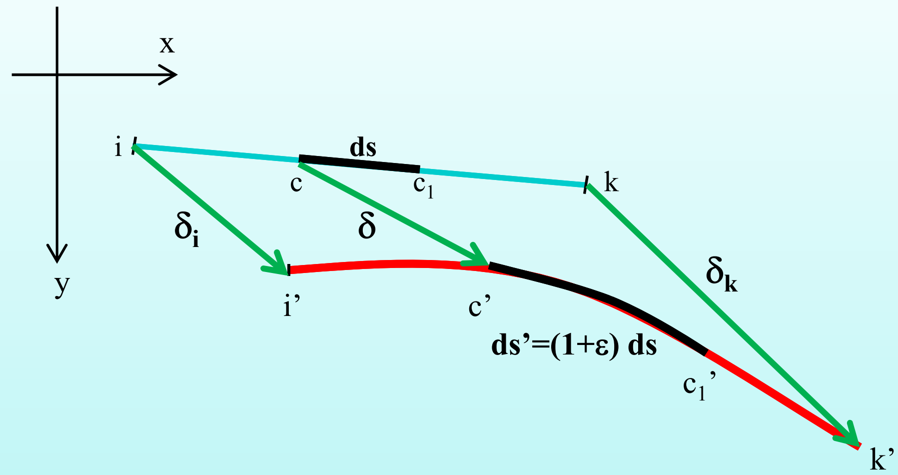
Ravna deformacija **-** tačke jednog ravnog štapa pomjeraju se u ravnima koje su paralelne sa ravni štapa



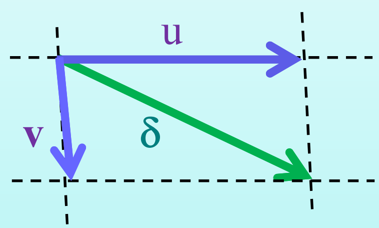


Štap prije deformacije
Štap nakon deformacije
C
dφ
ρ
φ
A
D
x
φ
y
ds
D'
E'
dφ
x
dx
y

Osa štapa prije i posle deformacije



$$\vec{\delta} = \vec{\delta}(u, v)$$



δ - vektor pomjeranja tačake

u - komponenta pomjeranja u pravcu x ose

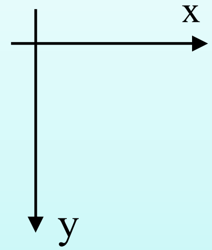
v - komponenta pomjeranja u pravcu y ose

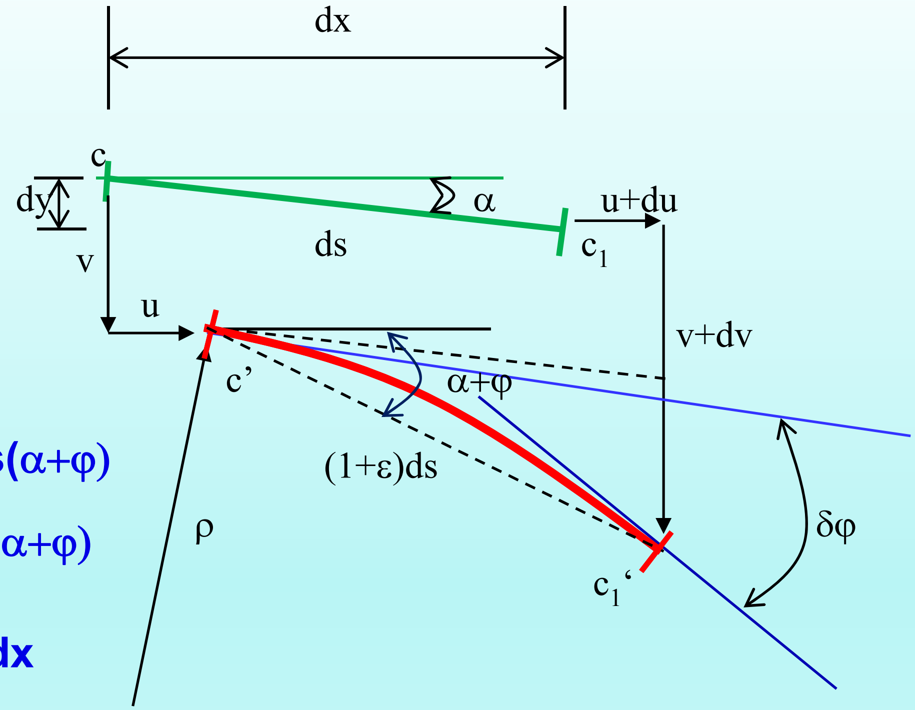
D*eformacijske veličine ose štapa*

ε - specifična promjena dužine, odnosno, *dilatacija elementa ose štapa.* Ovo je čista deformacijska veličina jer postoji samo na onim mjestima na kojima se osa deformiše

φ - je ugao za koji se obrne element ose štapa. Ovo nije čista deformacijska veličina jer može postojati i bez deformacije elementa

δφ - je promjena ugla između tangenti na liniju deformacije u beskonačno bliskim tačkama ose. Ovo je čista deformacijska veličina i ako se element ne deformiše jednaka je nuli.





$dx=ds\cos\alpha$
$dy=ds\sin\alpha$

$$dx+\cancel{u}+du=\cancel{u}+(1+\varepsilon)ds\cos(\alpha+\varphi)$$

$$dy+\cancel{v}+dv=\cancel{v}+(1+\varepsilon)ds\sin(\alpha+\varphi)$$

$$du=(1+\varepsilon)ds\cos(\alpha+\varphi)-dx$$

$$dv=(1+\varepsilon)ds\sin(\alpha+\varphi)-dy$$

nelinearni sistem jednačina , teorija konačnih-velikih deformacija

Ova jednačina predstavlja veze pomjeranja u i v, obrtanja φ i dilatacije ε

*Pretpostavka o **malim deformacijama***: $\varphi \ll 1$ $\varepsilon \ll 1$ **i** $\varphi\varepsilon \approx 0$ tada su

$$\cos\varphi = 1-\varphi^2/2!+\varphi^4/4!\ldots \cong 1$$

$$\sin\varphi = \varphi-\varphi^3/3!+\varphi^5/5!\ldots \cong \varphi$$

iz relacije $(\cos\alpha \cos\varphi - \sin\alpha \sin\varphi)$ **$\cos(\alpha+\varphi) = \cos\alpha - \varphi\sin\alpha$**

iz relacije $(\sin\alpha \cos\varphi + \sin\varphi \cos\alpha)$ **$\sin(\alpha+\varphi) = \sin\alpha + \varphi\cos\alpha$**

$du = (1+\varepsilon)ds\,(\cos\alpha - \varphi\sin\alpha) - dx$ $dx = ds\cos\alpha$

$dv = (1+\varepsilon)ds\,(\sin\alpha + \varphi\cos\alpha) - dy$ $dy = ds\sin\alpha$

$$\begin{aligned} du &= \varepsilon\, dx - \varphi\, dy \\ dv &= \varepsilon\, dy + \varphi\, dx \end{aligned} \qquad (1)$$

veze pomjeranja u i v sa def. veličinama dilatacijama ε, uglovima obrtanja tangente na deformisanu liniju φ

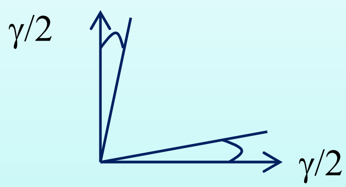
Deformacija poprečnog presjeka štapa

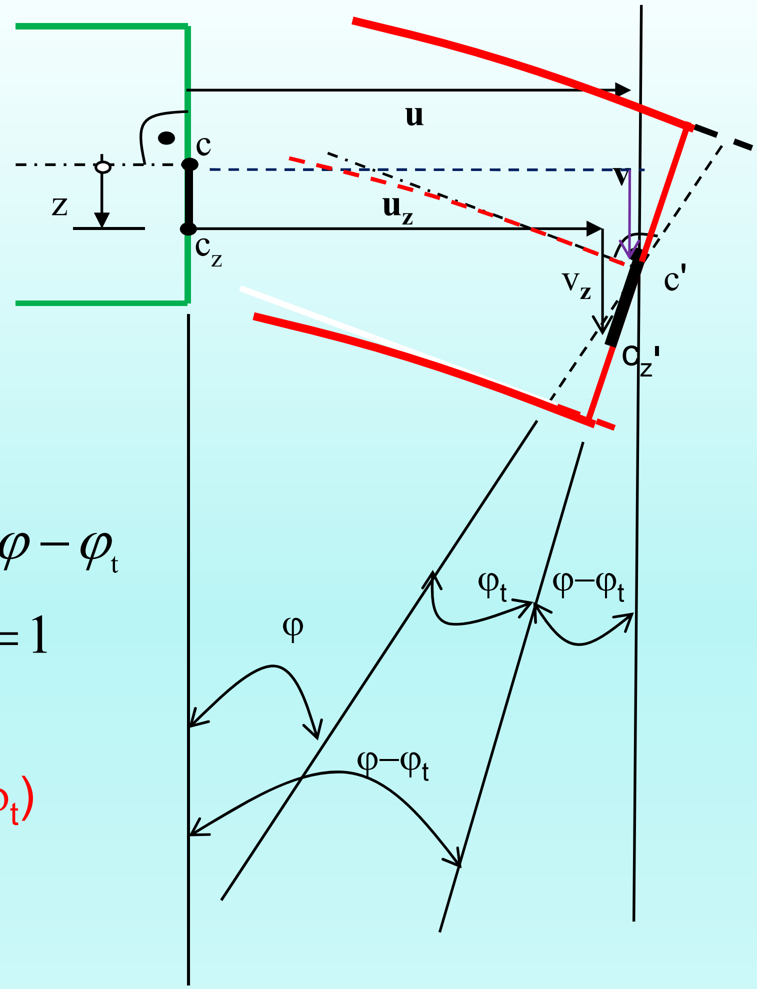
Bernolli-jeva pretpostavka o nedeformabilnom poprečnom presjeku: *pri deformaciji štapa poprečni presjeci ostaju ravni, nepromijenjene dužine i upravni na deformisanu osu štapa.*

Ova pretpostavka je tačna za prave prizmatične štapove napregnute na čisto savijanje

φ_t – klizanje poprečnog presjeka, čisto deformacijska veličina

Klizanje je promjena ugla između dva pravca pri deformaciji.





$$u_z = u - z\sin(\varphi - \varphi_t), \qquad \sin(\varphi - \varphi_t) = \varphi - \varphi_t$$

$$z + v_z = v + z\cos(\varphi - \varphi_t), \quad \cos(\varphi - \varphi_t) = 1$$

$(\varphi - \varphi_t) \ll 1, \quad \cos(\varphi - \varphi_t) \approx 1, \quad \sin(\varphi - \varphi_t) \approx (\varphi - \varphi_t)$

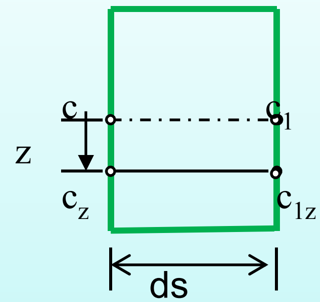
$$u_z = u - z(\varphi - \varphi_t)$$

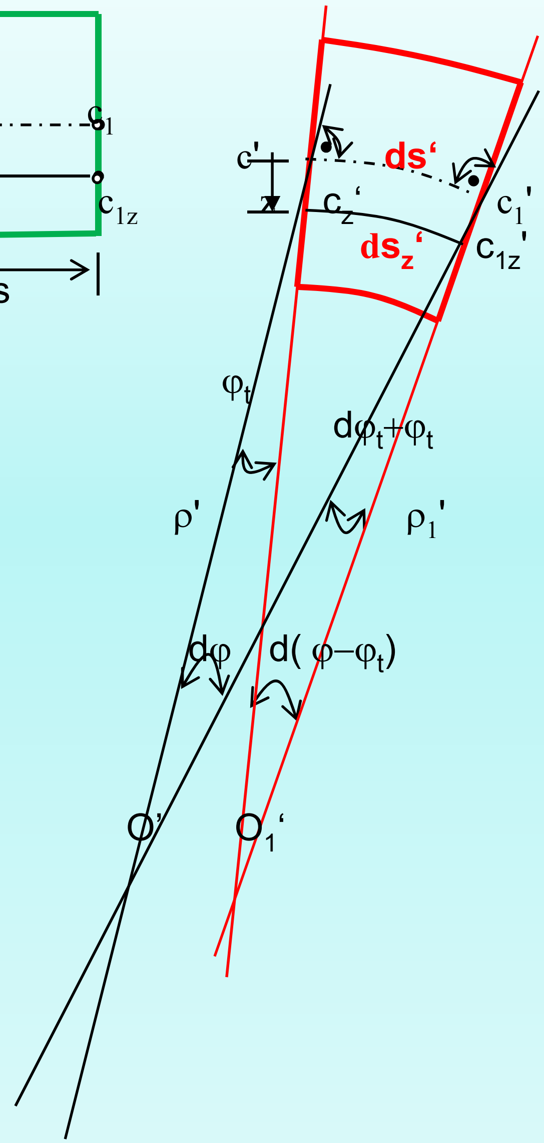
$$v_z = v$$

$ds'=(1+\varepsilon)ds$

dilatacija elementa na odstojanju z od ose štapa:

$ds_z'=(1+\varepsilon_z)ds$





Primjenom sinusne teoreme

$\Delta c'c_1'O_1'$

$\Delta c_z'c_{z1}'O_1'$

ρ_1' - polupriečnik krivine

$\sin(\pi/2-\varphi_t) = \cos\varphi_t$

$\varphi_t \ll 1$

$\cos\varphi_t \approx 1$

$$\frac{(1+\varepsilon)\mathrm{ds}}{\sin[\mathrm{d}(\varphi-\varphi_t)]}=\frac{\rho_1'}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_t\right)} \qquad (1)$$

$$\frac{(1+\varepsilon_z)\mathrm{ds}}{\sin[\mathrm{d}(\varphi-\varphi_t)]}=\frac{\rho_1'-z}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi_t\right)} \qquad (2)$$

Iz izraza 1. se dobija: $(1+\varepsilon)ds=\rho_1'\sin(d(\varphi-\varphi_t))$

Iz izraza 2. se dobija: $(1+\varepsilon_z)ds=(\rho_1'-z)\sin(d(\varphi-\varphi_t))$

$d(\varphi-\varphi_t) \ll 1$

$\sin(d(\varphi-\varphi_t)) \approx d(\varphi-\varphi_t)$

$(1+\varepsilon)ds=\rho_1' d(\varphi-\varphi_t)$

$(1+\varepsilon_z)ds=(\rho_1'-z)\, d(\varphi-\varphi_t)$

$(1+\varepsilon_z)ds=(1+\varepsilon)ds-z\, d(\varphi-\varphi_t) \qquad /:ds$

$1+\varepsilon_z=(1+\varepsilon)-z\, d(\varphi-\varphi_t)/ds$

χ – promjena krivine štapa

$$\chi=-\frac{d(\varphi-\varphi_t)}{ds}$$

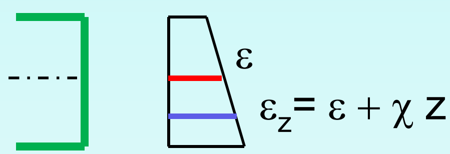
du= ε dx-φ dy

dv= ε dy+φ dx

Promjena krivine je čista deformacijska veličina

Dilatacija poprečnog presjeka po veličini z je linearna

$$\varepsilon_z=\varepsilon+z\chi$$



Spoljašnje i unutrašnje sile

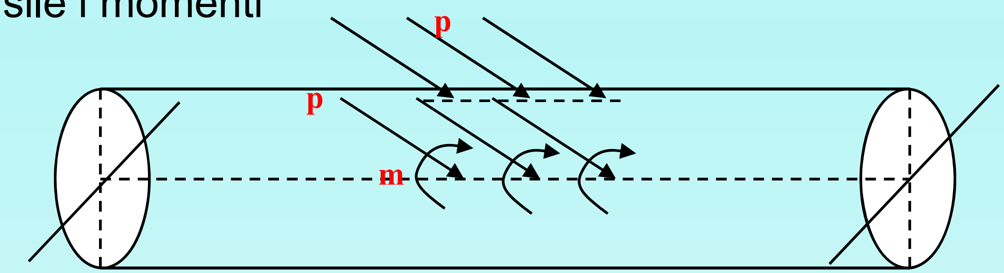
Spoljašnje sile:

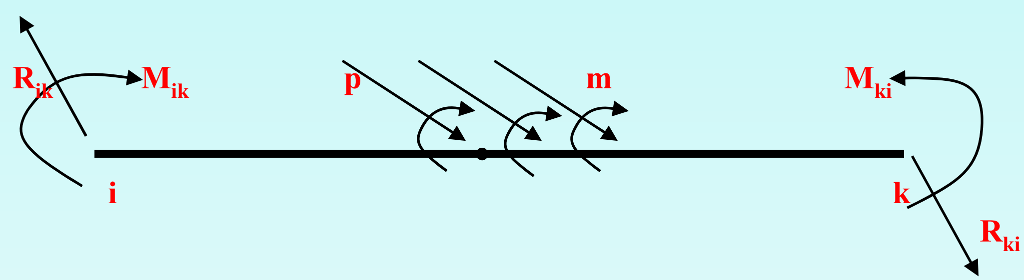
- **aktivne sile – opterećenje štapa**
- **reaktivne sile – reakcije i momenti uklještenja**

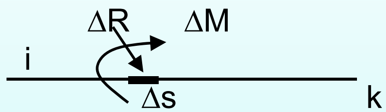
Spoljašnje sile predstavljaju :

- **zapreminske i**
- **površinske sile**

Statički ekvivalentne sile i momenti





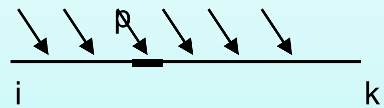


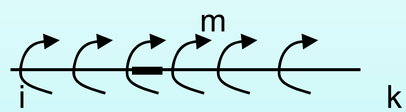
$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta s} = \frac{dR}{ds} = p$$

raspodijeljena sila

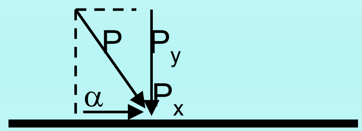
$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta M}{\Delta s} = \frac{dM}{ds} = m$$

raspodijeljeni momenti





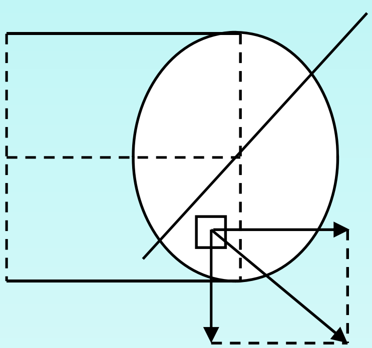
Opterećenje p i m velikog intenziteta na kratkom dijelu ose štapa može se zamijeniti njihovim rezultantama P i M - **koncentrisno opterećenje silom P i momentom M**



$P_y = P \sin \alpha$

$P_x = P \cos \alpha$

Unutrasnje sile:



$$N = \int_F \sigma dF$$

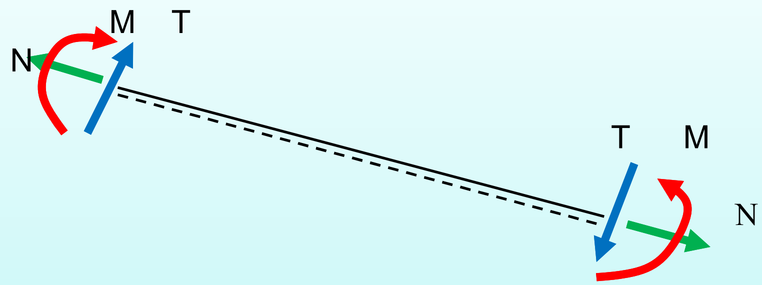
$$T = \int_F \tau dF$$

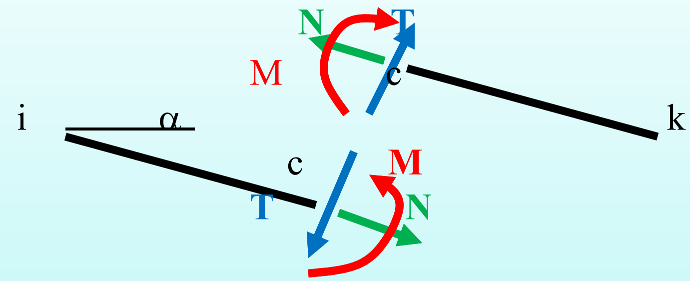
$$M = \int_F \sigma z dF$$

F- površina poprešnog presjeka
N - normalna sila , sila u pravcu ose štapa
T - transverzalna sila, u ravni presjeka a upravna na osu štapa
M- moment savijanja

Sile **N, T i M** nazivamo zajedničkim imenom ***sile u presjeku ili presječne sile***. One predstavljaju međusobni uticaj štapa lijevo i desno od posmatranog presjeka

Konvencija o pozitivnom smjeru

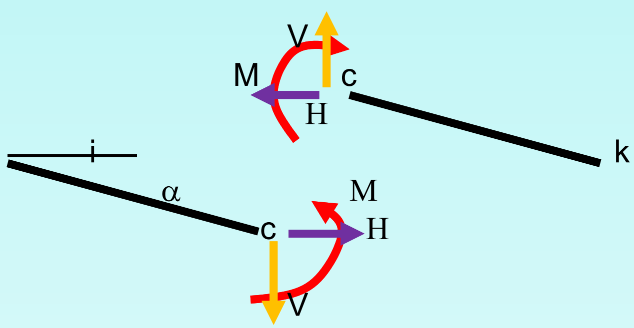




Konvencija o pozitivnom smjeru:

- normalna sila je pozitivna kada isteže štap
- transverzalna sila je pozitivna kada suprotan kraj štapa obrće u smjeru skazaljke časovnika
- moment savijanja je pozitivan kada zateže donju stranu štapa.

Prema zakonu akcije i reakcije sile koje napadaju lijevi dio su jednake silama koje napadaju desni dio ali su im smjerovi suprotni.



$H = N \cos\alpha - T \sin\alpha$

$V = N \sin\alpha + T \cos\alpha$

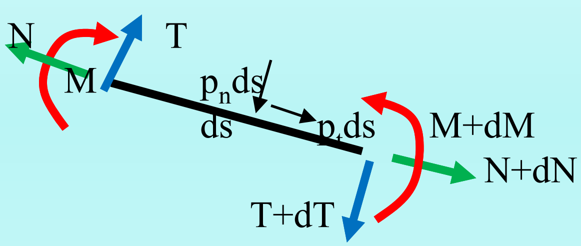
$N = H \cos\alpha + V \sin\alpha$

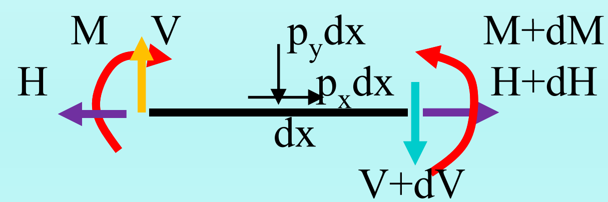
$T = - H \sin\alpha + V \cos\alpha$

Uslovi ravnoteže elementa štapa

SPOLJAŠNJE SILE STOJE U RAVNOTEŽI SA UNUTRAŠNJIM SILAMA NA NEDEFORMISANOM ŠTAPU.

Pretpostavka o statičkoj linearnosti problema - Pomjeranja su mala u odnosu na dimenziju štapa tako da se uslovi ravnoteže ispisuju na nedeformisanom štapu, što ima za posledicu linearne veze između sila u presjeku i opterećenja.





$$dN + p_t ds = 0$$
$$dT + p_n ds = 0$$
$$dM - T\,ds = 0$$

$$dH + p_x dx = 0$$
$$dV + p_y dx = 0$$
$$dM - T\,dx = 0$$

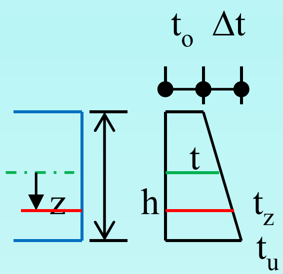
uslovi ravnoteže- veze spoljašnjih sila i sila u presjecima

Veze između deformacijskih veličina elementa ose štapa, sila u presjecima i temperaturnih promjena

Važi Hukov zakon - materijal idealno elastičan- linearna veza napona i deformacija.

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} + \alpha_t t(z)$$

ε_z - dilatacija
σ_z - normalni napon
$t(z)$ - temperaturna promjena
α_t - koeficijent linearne temperaturne dilatacije materijala.



$\Delta t = t_u - t_o$ Δt- temperaturna razlika

$t = (t_u + t_o)/2$ t- temperaturna promjena

slijedi da je:

$$\sigma_z = E\varepsilon_z - \alpha_t \left(t + z\frac{\Delta t}{h} \right) E \qquad \varepsilon_z = \varepsilon + z\chi$$

$$\sigma_z = E(\varepsilon + z\chi) - \alpha_t E \left(t + z\frac{\Delta t}{h} \right) \qquad \sigma_z = E(\varepsilon - \alpha_t t) + Ez\left(\chi - \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \right)$$

$$N = \int_F \sigma(z)dF = \int_F E(\varepsilon - \alpha_t t)dF + \int_F E\left(\chi - \alpha_t \frac{\Delta t}{h}\right)zdF = E(\varepsilon - \alpha_t t)\int_F dF + E\left(\chi - \alpha_t \frac{\Delta t}{h}\right)\int_F zdF = EF(\varepsilon - \alpha_t t)$$

$$M = \int_F z\sigma(z)dF = \int_F E(\varepsilon - \alpha_t t)zdF + \int_F E\left(\chi - \alpha_t \frac{\Delta t}{h}\right)z^2 dF = E(\varepsilon - \alpha_t t)\int_F zdF + E\left(\chi - \alpha_t \frac{\Delta t}{h}\right)\int_F z^2 dF = EI\left(\chi - \alpha_t \frac{\Delta t}{h}\right)$$

$$\int_F dF = F \qquad \int_F zdF = 0 \qquad \int_F z^2 dF = I$$

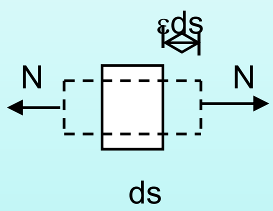
$$N = EF(\varepsilon - \alpha_t t)$$

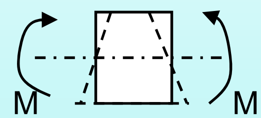
veze sila u presjecima i deformacijske veličina

$$M = EI\left(\chi - \alpha_t \frac{\Delta t}{h}\right)$$

veze deformacijske veličina i sila u presjecima

$$\varepsilon = \frac{N}{EF} + \alpha_t t$$





$$\chi = \frac{M}{EI} + \alpha_t \frac{\Delta t}{h}$$

$$\gamma(z) = \frac{\tau(z)}{G}$$

$$\tau(z) = \frac{TS}{bI}$$

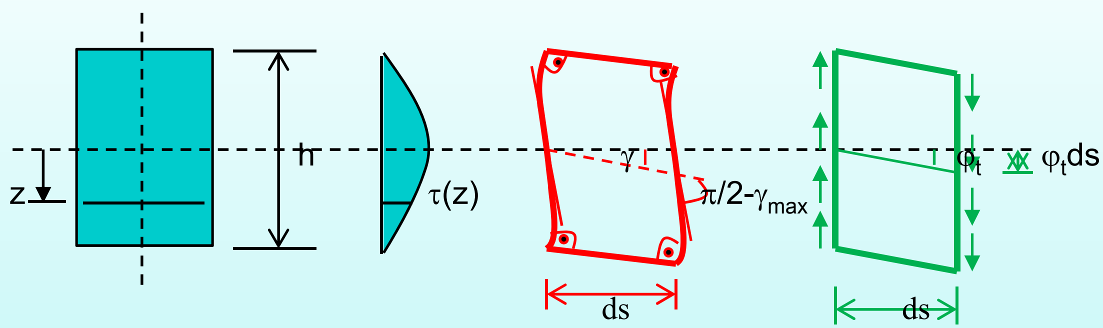
$\gamma(z)$ - ugao klizanja
$\tau(z)$ - smičući napon
G - moduo klizanja

Hipoteza Žuravskog:

$$\gamma(z) = \frac{TS}{bIG}$$

S -statički moment dijela površine iznad i ispod prave linije z=cons
b- širina poprečnog presjeka na mjestu z
I – moment inercije presjeka

γ- promjena ugla između dva prvobitno upravna pravca.



Rad napona smicanja na posmatranom elementu štapa pri stvarnoj raspodjeli ugla klizanja jednak radu tih napona pri pretpostavljenoj raspodjeli klizanja:

$$d\overline{A} = dA$$

$$dA = \int_F \tau\gamma ds dF = ds\int_F \frac{\tau^2}{G} dF = ds\frac{T^2}{GF}\frac{F}{I^2}\int_F \frac{s^2}{b^2} dF = kds\frac{T^2}{GF}$$

$$d\overline{A} = \int_F \tau\varphi_t ds dF = \varphi_t ds \int_F \tau dF = \varphi_t ds T$$

$$kds\frac{T^2}{GF} = \varphi_t ds T \qquad \varphi_t = \frac{kT}{GF}$$

Pregled jednačina i graničnih uslova teorije savijanja štapa u ravni

du= ε dx-φ dy
dv= ε dy+φ dx (A)
d(φ–φ$_t$)= - χds

dN+p$_t$ds=0
dT+p$_n$ds=0 (B)
dM -T ds=0

$$\varepsilon = \frac{N}{EF} + \alpha_t t$$

$$\chi = \frac{M}{EI} + \alpha_t \frac{\Delta t}{h} \qquad \text{(C)}$$

$$\varphi_t = \frac{kT}{GF}$$

Na raspolaganju nam stoji **devet jednačina** sa **9 nepoznatih** i to su:

- **dva pomjeranja u, v i ugao obrtanja elementa štapa j**
- **tri statičke veličine N,T,M sile i momenti**
- **tri deformacijske veličine e, χ,φ$_t$ dilatacija, promjena krivine i klizanje**

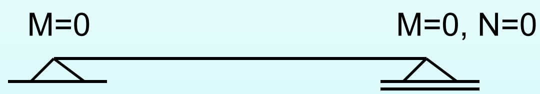
Prvih 6 jednačina su diferencijalne, a poslednje tri su algebarske jednačine

Za rješavanje ovog sistema su nam potrebni **granični uslovi**, koji mogu biti **po silama ili po pomjeranjima**.

Kada su **tri granična uslova po silama** i **tri granična uslova po pomjeranjima** tada kažemo da **zadatak statički određen**

Kada jedan, **dva ili tri granična uslova po silama zamijenimo graničnim uslovima po pomjeranjima** tada sile u presjecima ne mogu da se odrede iz uslova ravnoteže nezavisno od pomjeranja tačaka i obrtanja presjeka. Tada je zadatak proračuna sila u presjecima **statički neodređen**.

PRIMJERI



po silama 3 uslova →statički određen

po silama 2<3, po pomjeranjima 4 → statički neodređen

po silama 0<3, po pomjeranjima 6>3 →statički neodređen

U linearnoj teoriji konstrukcija važi *princip superpozicije* uticaja.