Integrali uslova ravnoteže elementa štapa i izrazi za sile u presjecima

$$dN + p_x dx = 0$$
$$dT + p_y dx = 0$$
$$dM - T\,dx = 0$$

Direktnom integracijom uslova ravnoteže elementa štapa dobijamo sile u presjecima:

$$N_c = N_i - \int_i^c p_x dx \qquad T_c = T_i - \int_i^c p_y dx \qquad M_c = M_i + \int_i^c T dx$$

Primjenom parcijalne integracije dobijamao:

$$\int_i^c T dx = Tx \,/_i^c - \int_i^c x dT = T_c x_c - T_i x_i - \int_i^c x dT$$

Promjena transverzalne sile je **$dT=-p_y dx$** slijedi

$$\int_i^c T dx = T_c x_c - T_i x_i + \int_i^c x p_y dx$$

Ako u ovaj izraz ubacimo vezu (2b* x_c) dobija se:

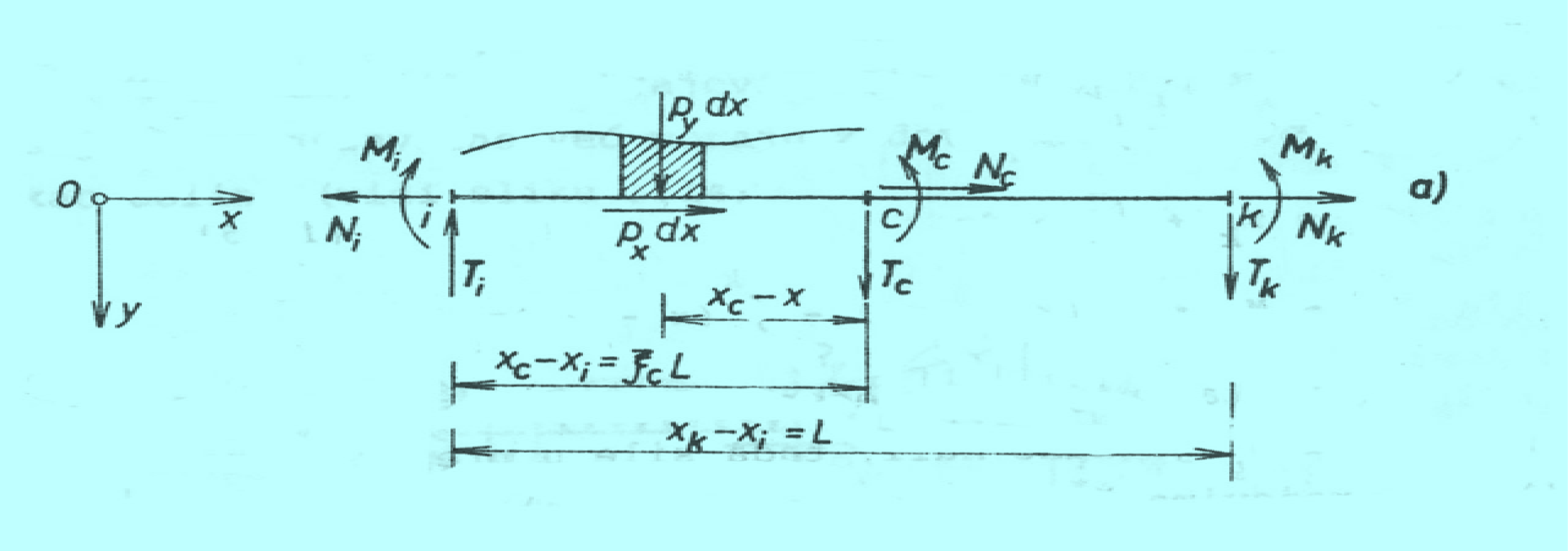
$$\int_i^c T dx = T_i (x_c - x_i) - \int_i^c p_y (x_c - x) dx$$

Sada se sistem jednačina (uslovi ravnoteze) može napisati u sljedećem obliku

$$N_c = N_i - \int_i^c p_x dx$$

$$T_c = T_i - \int_i^c p_y dx$$

$$M_c = M_i + T_i (x_c - x_i) - \int_i^c (x_c - x) p_y dx$$



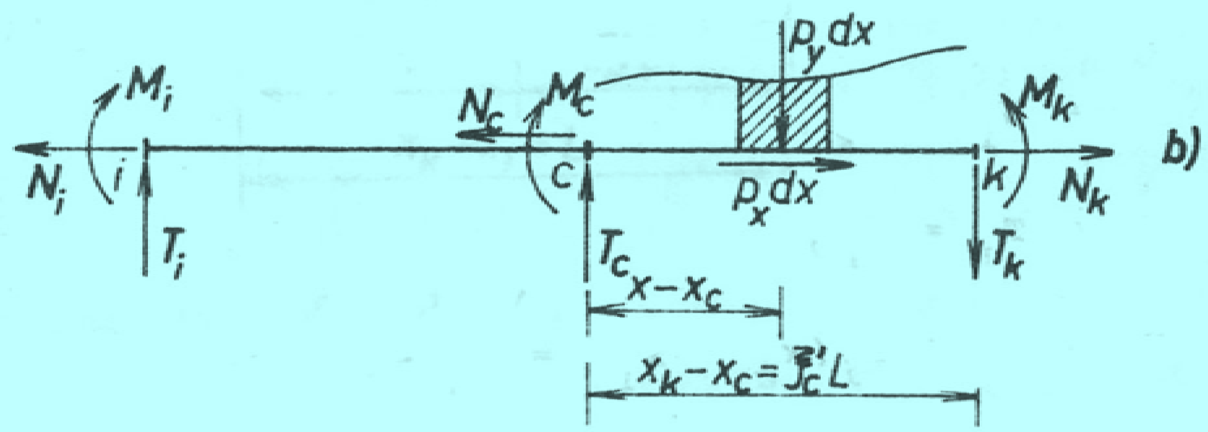
$$N_c = N_i - \int_i^c p_x \, dx$$

$$T_c = T_i - \int_i^c p_y \, dx$$

$$M_c = M_i + T_i(x_c - x_i) - \int_i^c (x_c - x) p_y \, dx$$

Jednačine predstavljaju integrale uslova ravnoteže elementa štapa, odnosno, ***uslove ravnoteže svih sila na konačnom dijelu štapa od i do c.***

Sličnim postupkom možemo izvesti izraze za sile u presjeku c integracijom uslova ravnoteže elementa štapa od c do k:



$$N_c = N_k + \int_c^k p_x dx$$

$$T_c = T_k + \int_c^k p_y dx$$

$$M_c = M_k - T_k (x_k - x_c) - \int_c^k (x - x_c) p_y dx$$

Na osnovu izvedenih jednačina može se iskazati sljedeće:

- *Normalna sila Nc u presjeku c štapa ik jednaka je algebarskom zbiru komponenti svih spoljašnjih sila koje djeluju na štap lijevo ili desno od posmatranog presjeka, a u pravcu ose štapa*

- *Transverzalna sila Tc u presjeku c štapa ik jednaka je algebarskom zbiru komponenti svih spoljašnjih sila koje djeluju na štap lijevo ili desno od posmatranog presjeka, a u pravcu upravnom na osu štapa*

- *Moment savijanja Mc u presjeku c štapa ik jednak je algebarskom zbiru momenata svih spoljašnjih sila koje djeluju na štap lijevo ili desno od posmatranog presjeka, a u odnosu na težište tog presjeka.*

Kada je štap neopterećen duž ose štapa tada je $p_x=p_y=0$:

$$N_c = N_i = N_k$$
$$T_c = T_i = T_k$$
$$M_c = M_i + T_i(x_c - x_i) = M_k - T_k(x_k - x_c)$$

Iz jednačina se primjećuje da se **sile u proizvoljnom presjeku štapa mogu odrediti ako su pored zadatog opterećenja px i py poznate i sile na jednom ili na drugom kraju štapa** ili bilo koje tri veličine **X_1, X_2 i X_3 iz kojih se sile na krajevima štapa mogu izračunati**.

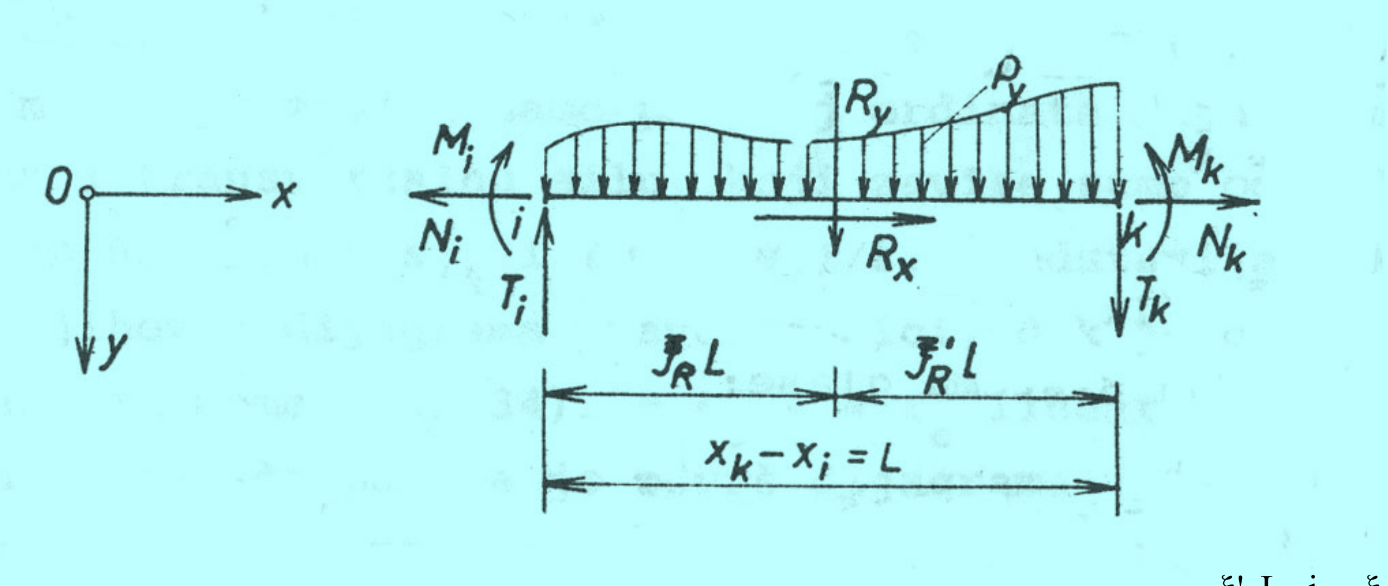
Veličine Xi, i=1,2,3, mogu biti komponente sila u određenim poprečnim presjecima ili linearne funkcije ovih komponenata, a najpogodnije je izabrati da su sile na krajevima štapova:

$$X_1=X_1(N_i, T_i, M_i, N_k, T_k, M_k)$$

$$X_2=X_2(N_i, T_i, M_i, N_k, T_k, M_k)$$

$$X_3=X_3(N_i, T_i, M_i, N_k, T_k, M_k)$$

Sile na krajevima štapa i –k nijesu međusobno nezavisne već moraju zadovoljiti uslove ravnoteže štapa kao cjeline:



$\xi'_R L$ i $\xi_R L$ – odstojanje rezultante opterećenja od kraja k , odnosno, kraja i

$$N_k - N_i + R_x = 0$$

$$T_k - T_i + R_y = 0$$

$$M_k - M_i - T_i L + R_y \xi'_R L = 0 \qquad \text{ili} \qquad M_k - M_i - T_k L - R_y \xi_R L = 0$$

Gdje su :

$$R_x = \int_i^k p_x dx \quad R_y = \int_i^k p_y dx \quad R_y \xi'_R L = \int_i^k (x_k - x) p_y dx \quad R_y \xi_R L = \int_i^k (x - x_i) p_y dx$$

Tri definisane veze sila Xi (i=1,2,3) zajedno sa tri uslova ravnoteže štapa kao cjeline predstavljaju sistem od 6 linearnih algebarskih jednačina sa 6 nepoznatih sila na krajevima štapa N_i, T_i, M_i, N_k, T_k, M_k.

Kada si funkcije Xi međusobno nezavisne i nezavisne od uslova ravnoteže tada se ovaj sistem može riješiti.

Veličine X_i **(i=1,2,3)** se nazivaju ***statički nezavisne veličine štapa ili statični neodređene veličine***.

Najpogodnije je izabrati da su: $X_1 = M_i\,,\ X_2 = M_k\,,\quad X_3 = S_{ik} = (N_i + N_k)/2$

Iz uslova ravnoteže štapa Σx slijedi:

$$N_i - N_k = R_x$$

$$N_i + N_k = 2S_{ik}$$

Ako riješimo ove jednačine dobija se: $N_i = S_{ik} + R_x/2$ **i** $N_k = S_{ik} - R_x/2$

Iz uslova ravnoteze za stap, treci uslov:

$$T_i = R_y \xi_R' + \frac{M_k - M_i}{L}$$

$$T_k = -R_y \xi_R + \frac{M_k - M_i}{L}$$

Kada smo odredili sile na krajevima Ni, Nk, Ti i Tk onda se sile u proizvoljnom poprečnom presjeku c dobijaju na sljedeći način:

$$N_c = S_{ik} + N_{c,o}$$

$$T_c = \frac{M_k - M_i}{L} + T_{c,o}$$

$$M_c = M_i \xi_c' + M_k \xi_c + M_{c,o}$$

N_{co}, T_{co} i M_{co} zavise od zadatih sila p_x i p_y i njihovih rezultanti:

$$N_{c,o} = \frac{R_x}{2} - \int_i^c p_x \, dx$$

$$T_{c,o} = R_y \xi_R' - \int_i^c p_y \, dx$$

$$M_{c,o} = R_y \xi_R' (x_c - x_i) - \int_i^c (x_c - x) p_y \, dx$$

I ako je jednostavno prikazati sile u presjecima primjenom **analitičkih izraza**, mnogo češće **promjenu sila prikazujemo graficima** koji se u Statici konstrukcija nazivaju ***dijagrami presječnih sila*** *ili* ***dijagrami sila u presjecima***.

- **dio koji zavisi od sila raspodijeljenih po dužini ose štapa**

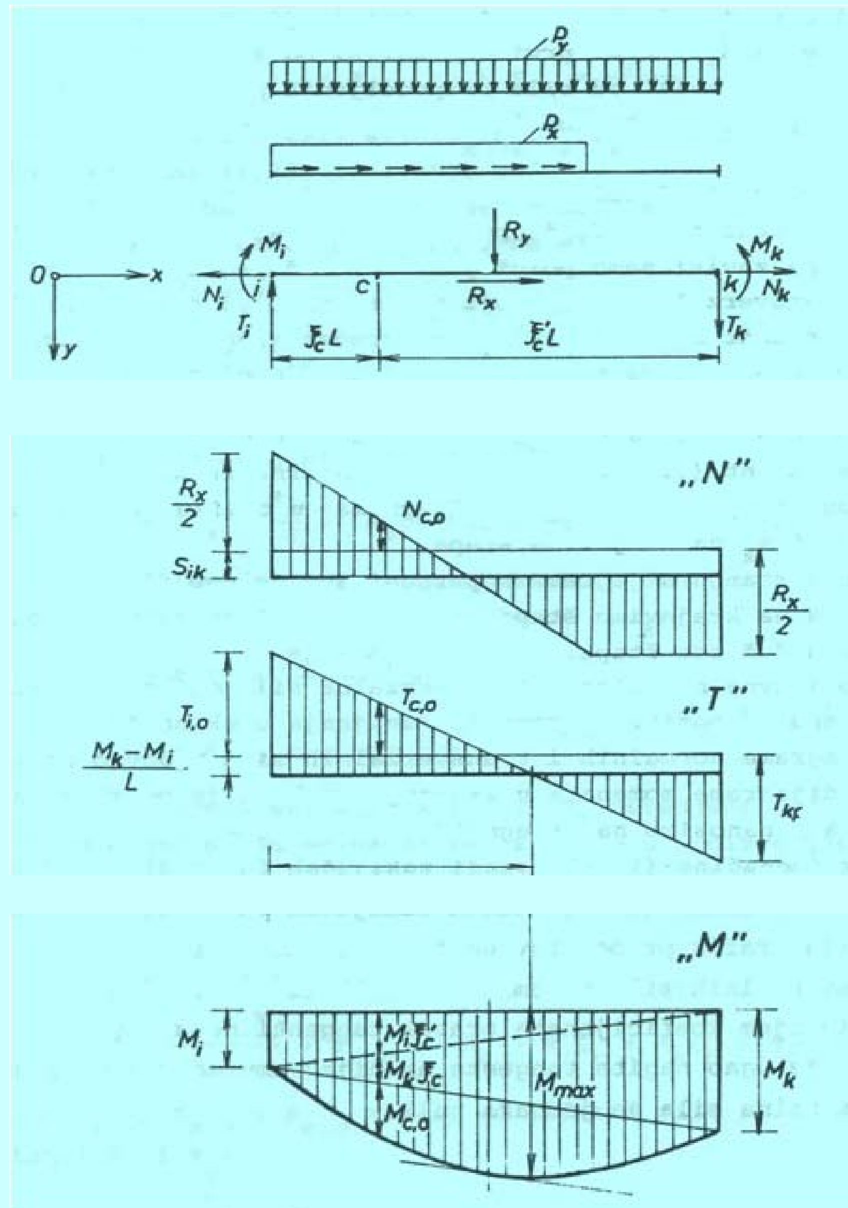
Oblici dijagrama sila u presjecima zavise od raspodjele opterećenja po dužini štapa.

Kada iscrtavamo dijagrame presječnih sila jednostavno superponiramo dijagrame koje potiču od sila na krajevima štapa i dijagrame koji potiče od opterećenja na štapu.

Pri iscrtavanju dijagrama presječnih sila pozitivne normalne i transverzalne sile nanosimo na "gornju" stranu štapa i redovno upisujemo znak, dok pri iscrtavanju dijagrama momenata, momente nanosimo- crtamo na onu stranu štapa koja je zategnuta i ne upisujemo znak.

Grafik transverzalne sile - funkcija prvog izvoda funkcije momenata savijanja.

- **dio koji zavisi od sila na krajevima**



Integrali deformacijskih jednačina i izrazi za pomjeranja i obrtanja

Obrtanje elementa ose **φ** i obrtanje poprečnog presjeka **φ-φ_T** , kao i pomjeranje **u** i **v** određujemo integracijom jednačina (za ds=dx)

$d(\varphi-\varphi_t)= -\chi\, dx$ **$du= \varepsilon\, dx$** **$dv= \varphi\, dx$**

$$(\varphi-\varphi_T)_c-(\varphi-\varphi_T)_i=-\int_i^c \chi dx$$

$$u_c-u_i=\int_i^c \varepsilon\, dx$$

$$v_c-v_i=\int_i^c \varphi\, dx-\int_i^c \varphi_T dx+\int_i^c \varphi_T dx=\int_i^c \varphi_T dx+\int_i^c (\varphi-\varphi_T)dx$$

Iz trece jednacine primjenom parcijalne integracije dobija se:

$$\int_i^C (\varphi - \varphi_T) dx = x(\varphi - \varphi_T)/_i^c - \int_i^c x \, d(\varphi - \varphi_T)$$

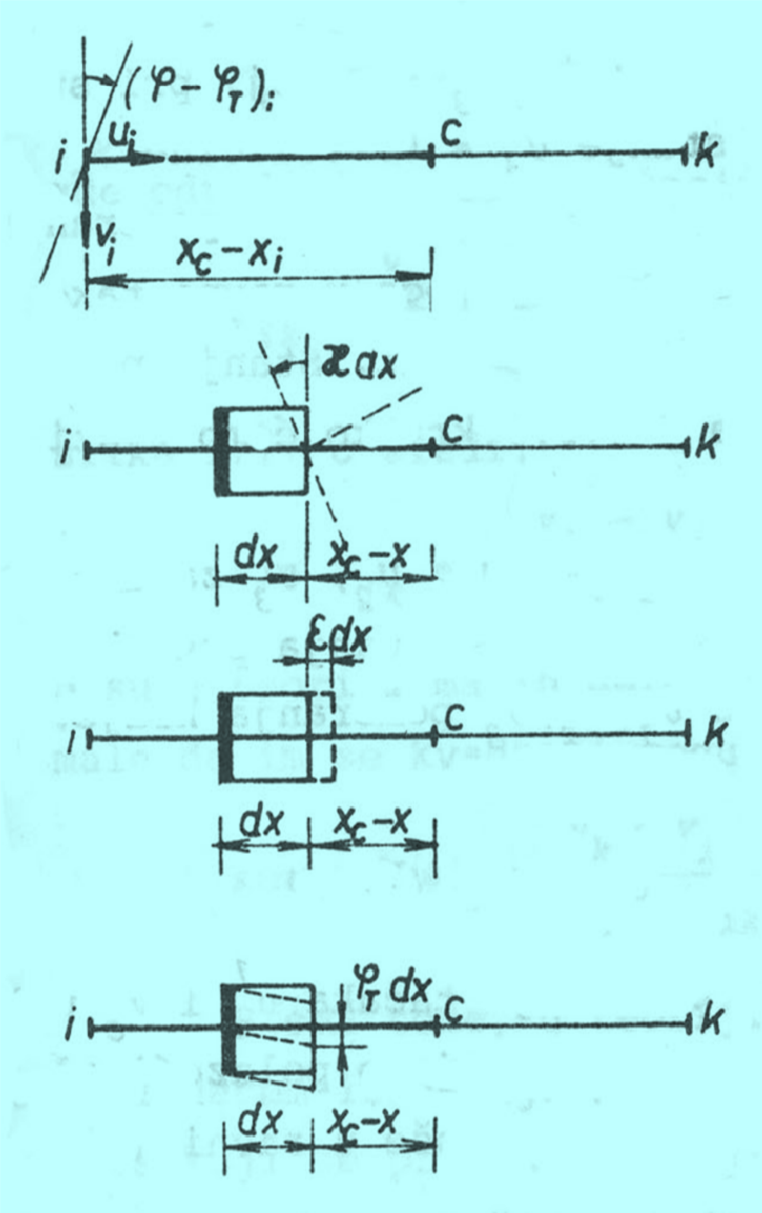
$$\int_i^c (\varphi - \varphi_T) dx = x_c (\varphi - \varphi_T)_c - x_i (\varphi - \varphi_T)_i + \int_i^c x \;\; \chi dx$$

Prvu jednacinu pomnožimo sa x_c:

$$\mathrm{x}_{\mathrm{c}} (\varphi - \varphi_{\mathrm{T}})_{\mathrm{c}} = \mathrm{x}_{\mathrm{c}} (\varphi - \varphi_{\mathrm{T}})_{\mathrm{i}} - \int_{\mathrm{i}}^{\mathrm{c}} \mathrm{x}_{\mathrm{c}} \chi \mathrm{dx}$$

uvrstimo u prethodnu jednačinu i dobija se:

$$\int_i^c (\varphi - \varphi_T) dx = (\varphi - \varphi_T)_i (x_c - x_i) - \int_i^c (x_c - x) \, \chi dx$$



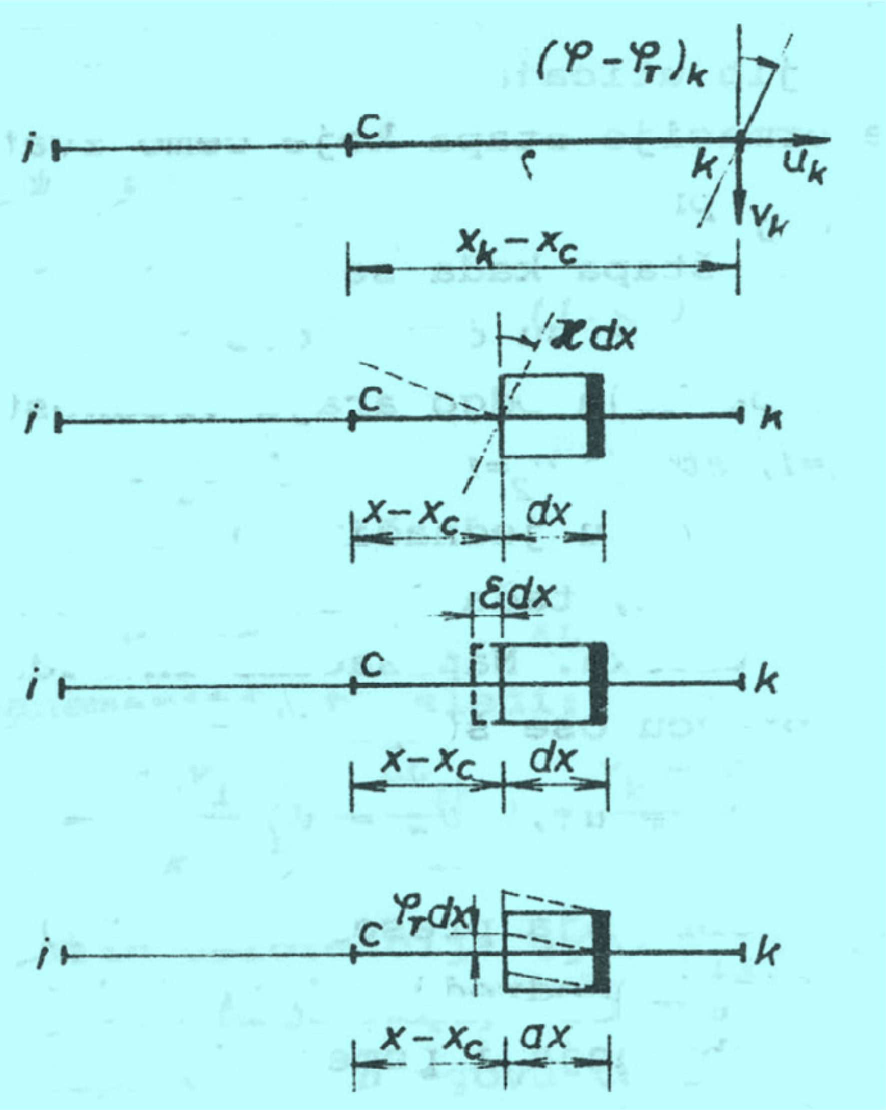
Sada jednačine dobijaju sljedeći oblik:

$$(\varphi-\varphi_T)_c = (\varphi-\varphi_T)_i - \int_i^c \chi\,dx$$

$$u_c = u_i + \int_i^c \varepsilon\,dx$$

$$v_c = v_i + (x_c - x_i)(\varphi-\varphi_T)_i - \int_i^c \left[(x_c - x)\chi - \varphi_T\right]dx$$

Pomjeranja i obrtanja u presjeku c data u funkciji pomjeranja i obrtanja na kraju i i deformacije elementa ose štapa



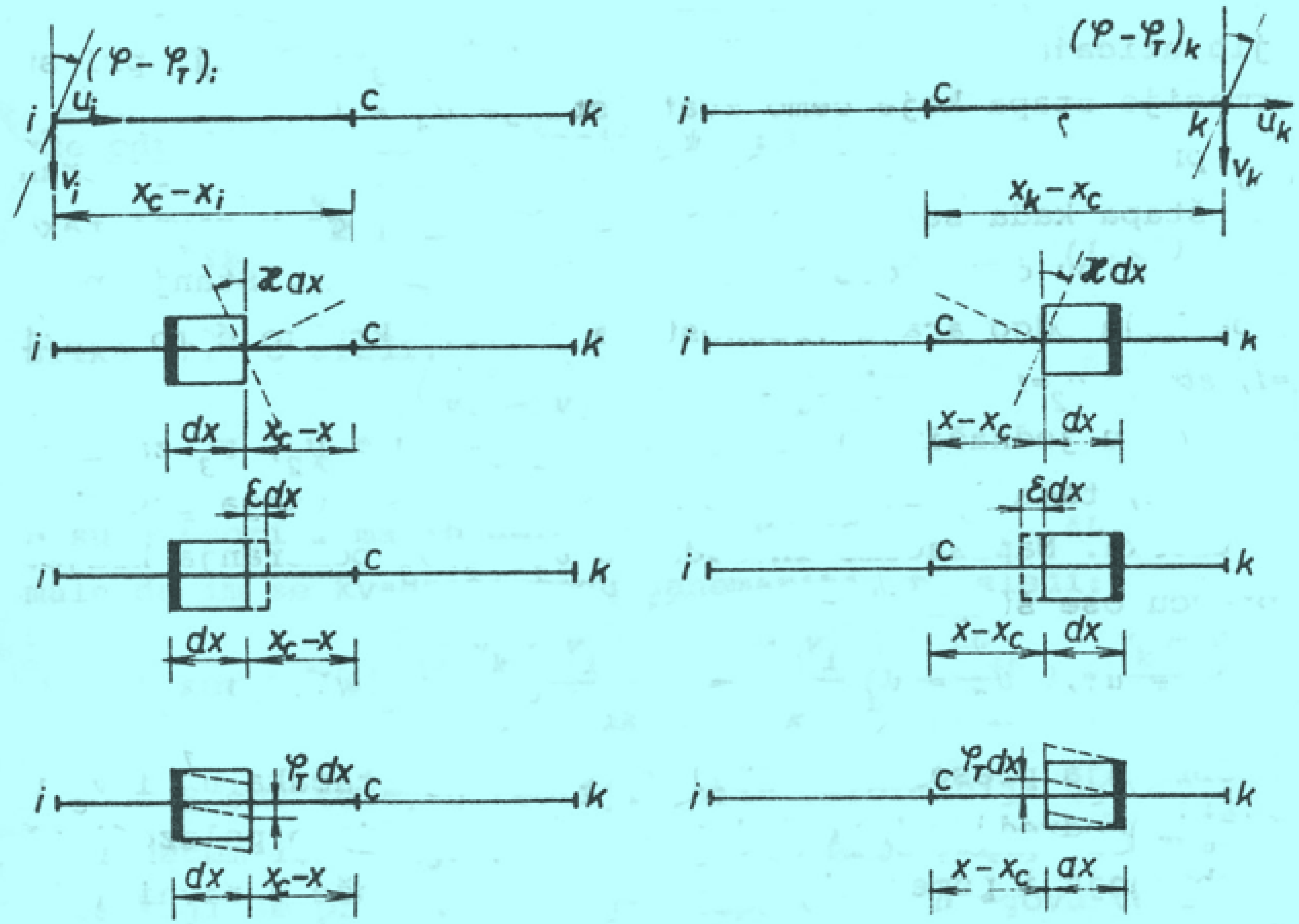
od c-k

$$(\varphi-\varphi_T)_c = (\varphi-\varphi_T)_k + \int_c^k \chi dx$$

$$u_c = u_k - \int_c^k \varepsilon \, dx$$

$$v_c = v_k - (x_k - x_c)(\varphi-\varphi_T)_k - \int_c^k [(x - x_c)\chi - \varphi_T] dx$$

Pomjeranja i obrtanja u presjeku c data u zavisnosti od pomjeranja i obrtanja na kraju k i deformacije elementa ose štapa



$(\varphi-\varphi_T)_i$
u_i
v_i
i
c
k
x_c-x_i
$(\varphi-\varphi_T)_k$
u_k
v_k
x_k-x_c
$\varkappa dx$
dx
x_c-x
$x-x_c$
εdx
$\varphi_T dx$

Specijalan slucaj, štap se ne deformiše: $\chi, \varepsilon, \varphi_T = 0$

Tada je

$$\varphi_c^l = \varphi_i \,, \qquad \varphi_c^d = \varphi_k$$

$$u_c^l = u_i \,, \qquad u_c^d = u_k$$

$$v_c^l = v_i + (x_c - x_i)\,\varphi_i \,, \quad v_c^d = v_k - (x_k - x_c)\,\varphi_k$$

ovi izrazi nam pokazuju da pomjeranja i obrtanja presjeka c, bilo da ih računamo sa lijeve ili desne strane, određuju onaj **dio pomjeranja štapa koji potiče od pomjeranja štapa kao krute ploče u ravni**.

Veličine u_i, v_i, φ_i i u_k, v_k, φ_k određuju pomjeranja štapa kao krute ploče u ravni

Međutim, umjesto pomjeranja i obrtanja krajeva, mogu da budu zadate tri veličine koje određuju pomjeranja štapa kao krute ploče u ravni. Te veličine, koje obeležavamo sa U_1, U_2, U_3 zovu se ***deformacijski nezavisne veličine štapa*** , i mogu biti pomjeranja ili obrtanja krajeva i ili k ili linearne funkcije tih veličina:

$$U_j = U_j\,(u_i, v_i, \varphi_i, u_k, v_k, \varphi_k) \,, \quad j=1,2,3$$

Opšti izrazi za pomjeranja tačaka i obrtanja presjeka mogu da se napišu na sljedeći način:

$$(\varphi - \varphi_T)_c = (\varphi - \varphi_T)_{c,o} + U_1\, \varphi_{c,1} + U_2\, \varphi_{c,2} + U_3\, \varphi_{c,3}$$

$$u_c = u_{c,o} + U_1\, u_{c,1} + U_2\, u_{c,2} + U_3\, u_{c,3}$$

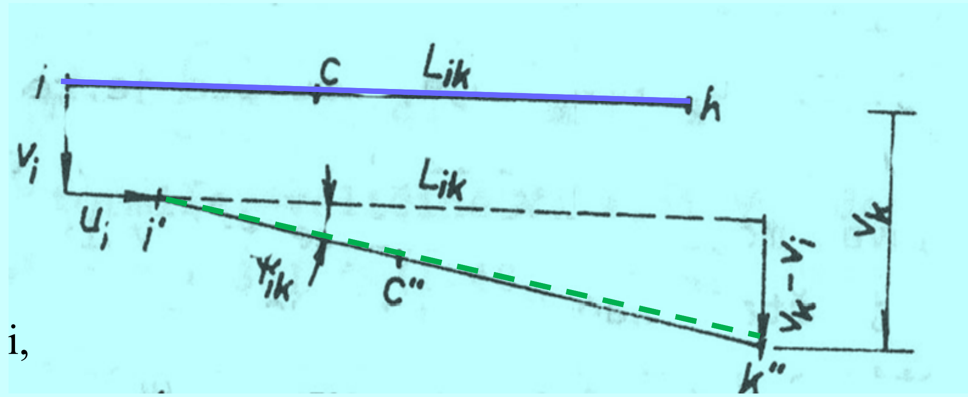
$$v_c = v_{c,o} + U_1\, v_{c,1} + U_2\, v_{c,2} + U_3\, v_{c,3}$$

$(\varphi - \varphi_T)_{c,o}$, $u_{c,o}$, $v_{c,o}$ – obrtanja presjeka i pomjeranja tačaka ose štapa usljed dejstva spoljašnjih uticaja kada su $U_1 = U_2 = U_3 = 0$, odnosno pri *stanju* $U_j = 0$

$u_{c,j}$, $v_{c,j}$, $\varphi_{c,j}$, $j=1,2,3$ – predstavljaju obrtanja presjeka i pomjeranja tačaka ose štapa kada se štap pomjera kao kruta ploča u ravni a kada je jedna od $U_j=1$ a ostale dvije veličine U su nula. Stanja pomjeranja štapa kratko ćemo zvati ***stanje*** $U_1 = 1$***, stanje*** $U_2 = 1$ ***i stanje*** $U_3 = 1$

Usvaja se da su: $U_1 = u_i$, $U_2 = v_i$, $U_3 = v_k$

Obrtanja presjeka $(\varphi - \varphi_T)_c^l$ i pomjeranja u_c^l i v_c^l usled deformacijski neodređenih veličina U_1, U_2, U_3 dobijamo polazeći od izraza za obrtanja i pomjeranja štapa kao krute ploče u ravni

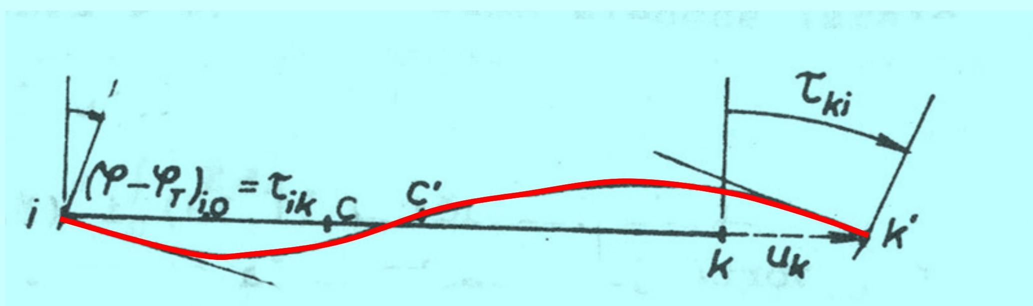


$$(\varphi - \varphi_T)_c^l = \psi_{ik}$$
$$u_c^l = u_i$$
$$v_c^l = v_i + \xi_c L_{ik} \psi_{ik}$$

u_i, v_i – kompontalna pomjeranja tačke i, translacija ploče za veličinu pomjeranja tačke i

ψ_{ik} – ugao rotacije štapa kao krutog tijela

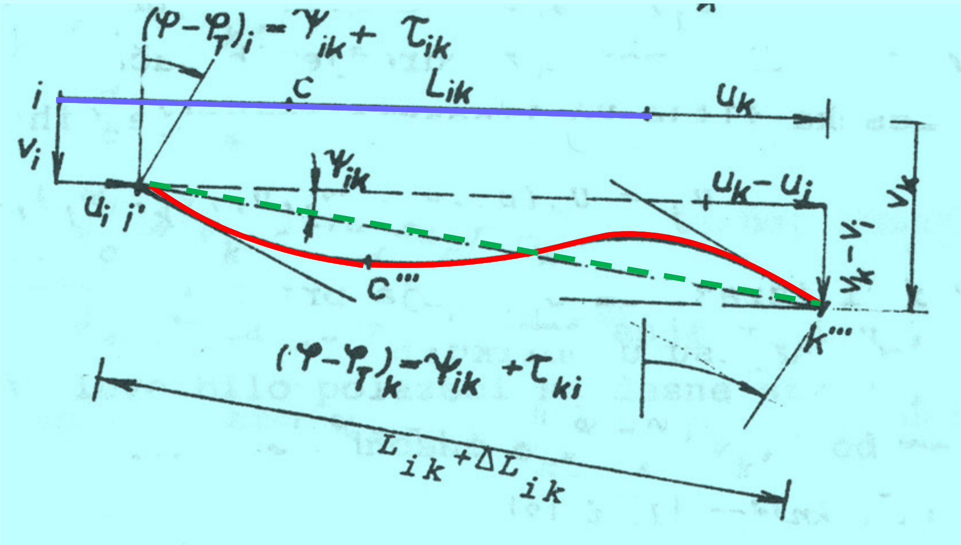
$(\varphi - \varphi_T)_{c,o}$, $u_{c,o}$, $v_{c,o}$ – obrtanja presjeka i pomjeranja tačaka ose štapa pri *stanju* $U_j=0$

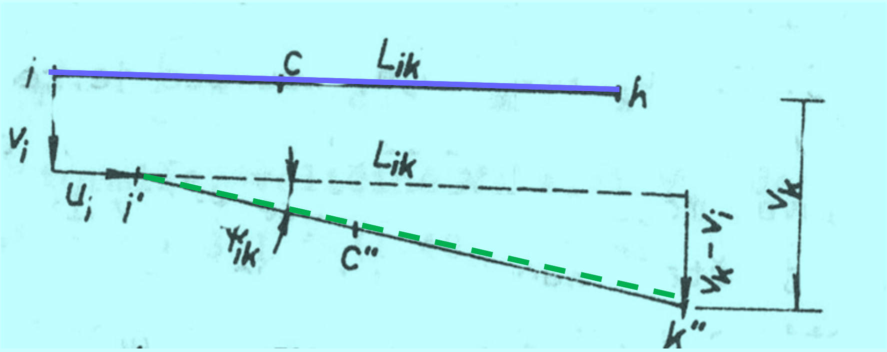


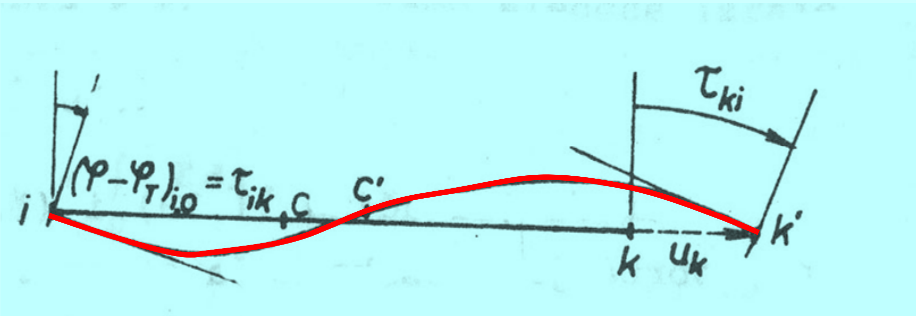
$$(\varphi - \varphi_T)_c = (\varphi - \varphi_T)_{c,o} + U_1\, \varphi_{c,1} + U_2\, \varphi_{c,2} + U_3\, \varphi_{c,3}$$

$$u_c = u_{c,o} + U_1\, u_{c,1} + U_2\, u_{c,2} + U_3\, u_{c,3}$$

$$v_c = v_{c,o} + U_1\, v_{c,1} + U_2\, v_{c,2} + U_3\, v_{c,3}$$







superpozicija

Kako odrediti obrtanje tetive stapa ψ_{ik} ?

Kada u prethodne relacije ubacimo da je $\xi_c=1$ pomjeranje $v_c^1=v_k$ tada dobijamo:

$$\mathbf{v_k = v_i + L_{ik}\,\psi_{ik}}$$

$$\psi_{ik} = \frac{v_k - v_i}{L_{ik}}$$

Ova relacija se može izvesti i direkno sa slike, preko sinusa tog ugla:

$$\sin\psi_{ik} = \frac{v_k - v_i}{L_{ik} + \Delta L_{ik}}$$

Kako su u **teoriji malih deformacija** veličine ψ_{ik}, ΔL_{ik}, v_i, v_k toliko male da im se njihovi kvadrati i proizvodi mogu zanemariti, slijedi:

$$\sin\psi_{ik} \cong \psi_{ik} = \frac{v_k - v_i}{L_{ik} + \Delta L_{ik}} \cong \frac{v_k - v_i}{L_{ik}}\left(1 - \frac{\Delta L_{ik}}{L_{ik}}\right) \cong \frac{v_k - v_i}{L_{ik}}$$

Kada izraz za obrtanje tetive štapa ubacimo u prethodne relacije dobija se:

$(\varphi - \varphi_T)_c{}^I = (v_k - v_i)/L_{ik}$
$u_c{}^I = u_i$
$v_c{}^I = v_i\, \xi_c' + v_k\, \xi_c$

Kada ovim vrijednostima dodamo obrtanja i pomjeranja koja nastaju pri stanju $U_j=0$ tada dobijamo ukupna pomjeranja:

$$(\varphi - \varphi_T)_c = \frac{v_k - v_i}{L_{ik}} + (\varphi - \varphi_T)_{c,o}$$

$$u_c = u_i + u_{c,o}$$

$$v_c = v_i \xi_c' + v_k \xi_c + v_{c,o}$$

$(\varphi - \varphi_T)_{c,o}$, $u_{c,o}$ i $v_{c,o}$ je potrebno odrediti

$$(\varphi - \varphi_T)_{c,o} = \tau_{ik} - \int_i^c \chi dx = \tau_{ki} + \int_c^k \chi dx$$

$$u_{c,o} = \int_i^c \varepsilon dx = \Delta L_{ik} - \int_c^k \varepsilon dx$$

$$v_{c,o} = \xi_c L_{ik} \tau_{ik} - \int_i^c [(x_c - x)\chi - \varphi_T] dx = -\xi_c' L_{ik} \tau_{ik} - \int_c^k [(x - x_c)\chi + \varphi_T] dx$$

U kojima su uvedene sljedeće oznake, **deformacijske veličine štapa kao cjeline** date preko pomjeranja i obrtanja krajeva štapa:

$$\Delta L_{ik} = u_k - u_i$$

$$\tau_{ik} = (\varphi - \varphi_T)_i - \psi_{ik} = (\varphi - \varphi_T)_i - \frac{v_k - v_i}{L_{ik}}$$

$$\tau_{ki} = (\varphi - \varphi_T)_k - \psi_{ik} = (\varphi - \varphi_T)_k - \frac{v_k - v_i}{L_{ik}}$$

Veličine ΔL_{ik}, τ_{ik} i τ_{ki} imaju jednostavno fizičko značenje:

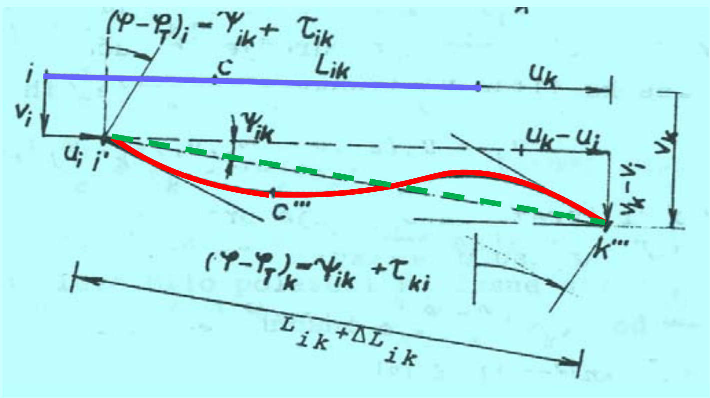
ΔL_{ik} *promjena dužine tetive štapa*

$$\mathbf{l'_{ik} \cos \psi_{ik} + u_i = l_{ik} + u_k}$$

$$\mathbf{\cos \psi_{ik} \cong 1}$$

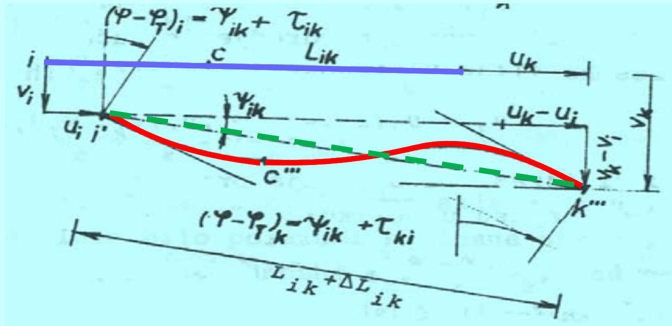
$$\mathbf{l_{ik} + \Delta L_{ik} + u_i = l_{ik} + u_k}$$

$$\mathbf{\Delta L_{ik} = u_k - u_i}$$



τ_{ik} deformacioni ugao na kraju i štapa i-k, razlika ugla obrtanja na kraju i obrtanja tetive štapa :

$$\tau_{ik} = (\varphi - \varphi_T)_i - \psi_{ik}$$



τ_{ki} deformacioni ugao na kraju k štapa i-k

ΔL_{ik}, τ_{ik} i τ_{ki} su čiste deformacijske veličine i jednake su nuli kada se štap ne deformiše

Ove veličine možemo prikazati i preko **deformacijskih veličina elementa štapa χ, ε i φ_T**, kad u ranije izvedenom izrazu tačku c izjednačimo sa tackom i:

$$\tau_{ik} = \frac{1}{L_{ik}} \int_i^k \left(\xi' L_{ik} \chi - \varphi_T \right) dx$$

$$\tau_{ki} = -\frac{1}{L_{ik}} \int_i^k \left(\xi L_{ik} \chi + \varphi_T \right) dx$$

$$\Delta L_{ik} = \int_i^k \varepsilon dx$$

Veze statički nezavisnih veličina i deformacijskih veličina štapa

Da bi odredili **statičke veličine** u presjeku potrebno je poznavati p_x , p_y , i tri nezavisne statičke veličine Xi (i=1,2,3).

Da bi odredili **pomjeranja i obrtanja poprečnih presjeka** treba poznavati presječne sile N, T i M, t i Δt i tri deformacijski nezavisne veličine Ui (i=1,2,3).

Znači da bi odredili sve uticaje potrebno je da znamo tri nezavisne satičke veličine **Xi** i tri deformacijski nezavisne veličine **Ui** ili manje jednih a više drugih tako da suma bude **6 nezavisnih veličina**.

Ako su nam poznate samo deformacijske veličine najbolje je usvojiti:

$$U_j = U_j\,(u_i, v_i, (\varphi-\varphi_T)_i, u_k, v_k, (\varphi-\varphi_T)_k)\ ,\ j=1,2,...,6$$

koje su linearno nezavisne.

Ako iskoristimo **veze pomjeranja i deformacijske veličine ΔL_{ik}, τ_{ik} i τ_{ki} i** veza sa statickim velicinama, dobijamo veze između statičkih i deformacijskih nezavisnih veličina i pomjeranja i obrtanja krajeva štapa.

Usvajamo:

$$U_1=u_i\ ,\ U_2=v_i\ ,\ U_3=u_k\ ,\ U_4=v_k\ ,\ U_5=(\varphi - \varphi_T)_i\ ,\ U_6=(\varphi - \varphi_T)_k$$

$$X_1= M_i,\ X_2= M_k\ , X_3= S_{ik}$$

Kada u ove relacije

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{EF}} + \alpha_{\mathrm{t}}\mathrm{t}$$

$$\chi = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}} + \alpha_{\mathrm{t}}\frac{\Delta\mathrm{t}}{\mathrm{h}}$$

$$\varphi_{\mathrm{t}} = \frac{\mathrm{kT}}{\mathrm{GF}}$$

Ubacimo veze

$$N = S_{ik} + N_o$$

$$T = \frac{M_k - M_i}{L} + T_o$$

$$M = M_i\xi' + M_k\xi + M_o$$

Slijedi da je

$$\varepsilon = \frac{S_{ik}}{EF} + \frac{N_o}{EF} + \alpha_t t$$

$$\chi = M_i\frac{\xi'}{EI} + M_k\frac{\xi}{EI} + \frac{M_0}{EI} + \alpha_t\frac{\Delta t}{h}$$

$$\varphi_t = \frac{M_k}{L_{ik}}\frac{k}{GF} - \frac{M_i}{L_{ik}}\frac{k}{GF} + T_o\frac{k}{GF}$$

$$\tau_{\mathrm{ik}} = \frac{1}{\mathrm{L}_{\mathrm{ik}}}\int_{\mathrm{i}}^{\mathrm{k}}\left(\xi'\mathrm{L}_{\mathrm{ik}}\chi - \varphi_{\mathrm{T}}\right)\mathrm{dx}$$

$$\tau_{\mathrm{ki}} = -\frac{1}{\mathrm{L}_{\mathrm{ik}}}\int_{\mathrm{i}}^{\mathrm{k}}\left(\xi\mathrm{L}_{\mathrm{ik}}\chi + \varphi_{\mathrm{T}}\right)\mathrm{dx}$$

$$\Delta\mathrm{L}_{\mathrm{ik}} = \int_{\mathrm{i}}^{\mathrm{k}}\varepsilon\,\mathrm{dx}$$

$$\Delta l_{ik} = S_{ik}\int_i^k \frac{dx}{EF} + \int_i^k \frac{N_0}{EF}dx + \int_i^k \alpha_t t dx$$

$$\tau_{ik} = M_i\left[\int_i^k \frac{\xi'^2}{EI}dx + \frac{k}{L_{ik}^2}\int_i^k \frac{dx}{GF}\right] + M_k\left[\int_i^k \frac{\xi'\xi}{EI}dx - \frac{k}{L_{ik}^2}\int_i^k \frac{dx}{GF}\right] + \left(\int_i^k \frac{\xi' M_0}{EI}dx - \int_i^k \frac{T_0 dx}{GF}\right) + \int_i^k \xi'\alpha_t \frac{\Delta t}{h}dx$$

$$-\tau_{ki} = M_i\left[\int_i^k \frac{\xi\xi'}{EI}dx - \frac{k}{L_{ik}^2}\int_i^k \frac{dx}{GF}\right] + M_k\left[\int_i^k \frac{\xi^2}{EI}dx + \frac{k}{L_{ik}^2}\int_i^k \frac{dx}{GF}\right] + \left(\int_i^k \frac{\xi M_0}{EI}dx + \frac{k}{L_{ik}}\int_i^k \frac{T_0 dx}{GF}\right) + \int_i^k \xi\alpha_t \frac{\Delta t}{h}dx$$

uvedemo sljedeće oznake:

$$\Delta l_{ik,s} = \int_i^k \frac{dx}{EF} \qquad \Delta l_{ik,0} = \int_i^k \frac{N_0}{EF}dx \qquad \Delta l_{ik,t} = \int_i^k \alpha_t t dx$$

$$\alpha_{ik} = \int_i^k \frac{\xi'^2}{EI}dx + \frac{k}{L_{ik}^2}\int_i^k \frac{dx}{GF} \qquad \beta_{ik} = \beta_{ki} = \int_i^k \frac{\xi'\xi}{EI}dx - \frac{k}{L_{ik}^2}\int_i^k \frac{dx}{GF}$$

$$\alpha_{ki} = \int_i^k \frac{\xi^2}{EI}dx + \frac{k}{L_{ik}^2}\int_i^k \frac{dx}{GF} \qquad \alpha_{ik,0} = \int_i^k \frac{\xi' M_0}{EI} - \frac{k}{L_{ik}}\int_i^k \frac{T_0 dx}{GF}$$

$$\alpha_{ki,0} = \int_i^k \frac{\xi M_0}{EI} + \frac{k}{L_{ik}}\int_i^k \frac{T_0 dx}{GF} \qquad \alpha_{ik,\Delta t} = \int_i^k \xi'\alpha_t \frac{\Delta t}{h}dx \qquad \alpha_{ki,\Delta t} = \int_i^k \xi\alpha_t \frac{\Delta t}{h}dx$$

Dobijamo **veze između statičkih i deformacijskih veličina**:

$$\Delta l_{ik} = S_{ik}\Delta_{ik,S} + \Delta_{ik,0} + \Delta_{ik,t}$$

$$\tau_{ik} = M_i \alpha_{ik} + M_k \beta_{ik} + \alpha_{ik,0} + \alpha_{ik,t}$$

$$-\tau_{ki} = M_i \beta_{ik} + M_k \alpha_{ki} + \alpha_{ki,0} + \alpha_{ki,t}$$

Ako **ΔL_{ik}, τ_{ik} i τ_{ki} prikažemo preko pomjeranja na krajevima štapa**:

$$S_{ik}\Delta l_{ik,s} = (u_k - u_i) - \Delta l_{ik,0} - \Delta l_{ik,t}$$

$$M_{ik}\alpha_{ik} + M_{ki}\beta_{ik} = (\varphi - \varphi_T)_i - \frac{v_k - v_i}{L_{ik}} - \alpha_{ik,0} - \alpha_{ik,\Delta t}$$

$$M_{ik}\beta_{ik} + M_{ki}\alpha_{ik} = -(\varphi - \varphi_T)_k + \frac{v_k - v_i}{L_{ik}} - \alpha_{ki,0} - \alpha_{ki,\Delta t}$$