PRINCIP VIRTUALNIH POMJERANJA I PRINCIP VIRTUALNIH SILA

Moguće ravnotežno stanje i moguće stanje deformacije nosača

Uslovi ravnoteže kosog elementa štapa prikazani preko vertikalnih i horizontalnih komponeti sila:

$$dH+p_x dy=0$$
$$dV+p_y dx=0$$
$$dM+Hdy-Vdx=0 \qquad (1)$$

Uslovi ravnoteže čvorova nosača:

$$\Sigma N_{ik}\cos\alpha_{ik}-\Sigma T_{ik}\sin\alpha_{ik}+C_{oi}\cos\beta_i+P_{ix}=0$$
$$\Sigma N_{ik}\sin\alpha_{ik}+\Sigma T_{ik}\cos\alpha_{ik}+C_{oi}\sin\beta_i+P_{iy}=0$$
$$\Sigma\chi_{ik}M_{ik}+C_{ui}+M_i=0 \qquad (2)$$

Veze pomjeranja, obrtanja ideformacijskih veličina elementa ose štapa:

$$du=\varepsilon\, dx-\varphi\, dy$$
$$dv=\varepsilon\, dy+\varphi\, dx \qquad (3)$$
$$d(\varphi-\varphi_t)=-\chi ds$$

Uslovi kompatibilnosti pomjeranja čvorova: $(u_k-u_i)\cos\alpha_{ik}+(v_k-v_i)\sin\alpha_{ik}=\Delta l_{ik}$

$$\frac{(v_k-v_i)\cos\alpha_{ik}-(u_k-u_i)\sin\alpha_{ik}}{l_{ik}}-\frac{(v_r-v_i)\cos\alpha_{ir}-(u_r-u_i)\sin\alpha_{ir}}{l_{ir}}=\tau_{ir}-\tau_{ik} \qquad (4)$$

$$u_i\cos\beta i+v_i\sin\beta i=c_{oi}$$

$$c_{ui}=\tau_{ik}+\frac{(v_k-v_i)\cos\alpha_{ik}-(u_k-u_i)\sin\alpha_{ik}}{l_{ik}}$$

gdje su:

$$\tau_{ik} = \frac{1}{L_{ik}} \int_i^k \left(\xi L_{ik} \chi - \varphi_T \right) dx$$

$$\tau_{ki} = -\frac{1}{L_{ik}} \int_i^k \left(\xi L_{ik} \chi + \varphi_T \right) dx$$

$$\Delta L_{ik} = \int_i^k \varepsilon dx$$

Veze deformacijskih veličina, sila u presjecima i temperaturnih promjena u teorije elestičnosti date su Hooke-ovim zakonom:

$$\varepsilon = \frac{N}{EF} + \alpha_t t$$

$$\chi = \frac{M}{EI} + \alpha_t \frac{\Delta t}{h}$$

$$\varphi_t = \frac{kT}{GF}$$

Broj integracionih konstanti jednačina (1) i (3), odnosno, broj statičkih i deformacijskih veličina, jednak je broju uslova (2) i (4) i one se iz tih uslova mogu jednoznačno odrediti.

Cesto se problemi Statike ne mogu na ovaj način sa uspjehom riješiti. Tada se umjesto jednačina (1) i (3) **koriste dva ekstremalna principa** kojima te jednačine mogu da se zamijene.

Da bi te principe definisali potrebno je **definisati dva pojma**: ***moguće ravnotežno stanje*** *i* ***moguće stanje deformacija***.

***Moguće ravnotežno stanje nosača* opterećenog raspodijeljenim silama p_x i p_y, koncentrisanim silama P_i i koncentrisanim momentima M_i je svaki sistem reakcija C_{oi} i C_{ui} i sila u presjecima N, T, M koje zadovoljavaju *uslove ravnoteže elemenata (1) svih štapova* i *uslove ravnoteže (2) svih čvorova*.**

Kada je zadatak **statički određen** tada za dato opterećenje postoji **samo jedan sistem reakcija i sila u presjecima**, odnosno, postoji samo **jedno moguće ravnotežno stanje**.

Kada je nosač **statički neodređen** za dato opterećenje postoji **više sistema reakcija i sila u presjecima** koje zadovoljavju jednačine (1) i (2), tj. postoji **više mogućih ravnotežnih stanja.** **Stvarno stanje je samo jedno moguće stanje.**

***Moguće stanje deformacije* nosača je svaki sistem jednačina χ, ε, φ_T, pomjeranja c_{oi} i obrtanja c_{ui} kome saglasno jednačinama *(3)* odgovaraju deformacijske veličine štapova Δl_{ik} i τ_{ik}, tako da postoje obrtanja φ i pomjeranja u i v koja *zadovoljavaju sve uslove kompatibilnosti pomjeranja čvorova (4)*.**

Kada je nosač **statički određen**, odnosno **kinematički prosto stabilan**, broj uslova kompatibilnosti jednak je broju pomjeranja čvorova i za proizvoljne vrijednosti c_{oi}, c_{ui}, Δl_{ik} i, τ_{ik} odnosno, χ, ε, φ_T, mogu se odrediti pomjeranja koja zadovoljavaju uslove.

Kada je nosač **statički neodređen,** odnosno **kinematički višestruko stabilan**, broj uslova kompatibilnosti je veći od broja pomjeranja čvorova i svi ti uslovi **mogu biti zadovoljeni samo za određene vrijednosti** c_{oi}, c_{ui}, Δl_{ik} i, τ_{ik}, odnosno, χ, ε, φ_T.

Veza mogućih ravnotežnih stanja i mogućih stanja deformacije - princip virtualnih pomjeranja i princip virtualnih sila

Neka je dat proizvoljan nosač, statički određeni ili statički neodređen, i **dva stanja u tom nosaču**.

Moguće ravnotežno stanje

$$\tilde{p}_x, \tilde{p}_y, \tilde{P}_i, \tilde{M}_i$$

$$\tilde{C}_{oi}, \tilde{C}_{ui}, \tilde{H}, \tilde{V}, \tilde{M}$$

Moguće stanje deformacija

$$\tilde{\tilde{\chi}}, \tilde{\tilde{\varepsilon}}, \tilde{\tilde{\varphi}}_T,$$

$$\tilde{\tilde{c}}_{oi}, \tilde{\tilde{c}}_{ui}, \tilde{\tilde{u}}, \tilde{\tilde{v}}, \tilde{\tilde{\varphi}}$$

Ova dva stanja nemaju nikakve veze.

Kada uslove **(1) napišemo za moguće ravnotežno stanje**, **pomnožimo sa pomjeranjima, saberemo i integralimo od i do k**, dobijamo ***zbir radova spoljašnjih i unutrašnjih sila mogućeg ravnotežnog stanja na pomjeranjima i obrtanjima mogućeg stanja deformacija***:

$$d\tilde{H} + \tilde{p}_x dy = 0 \qquad /\cdot \tilde{\tilde{u}}$$

$$d\tilde{V} + \tilde{p}_y dx = 0 \qquad /\cdot \tilde{\tilde{v}}$$

$$d\tilde{M} + \tilde{H}dy - \tilde{V}dx = 0 \qquad /\cdot -\left(\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T\right)$$

$$\int_i^k \left[\tilde{\tilde{u}} d\tilde{H} - \tilde{H}\left(\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T\right)dy\right] + \int_i^k \left[\ \tilde{\tilde{v}} d\tilde{V} + \tilde{V}\left(\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T\right)dx\ \right] - \int_i^k \left(\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T\right)d\tilde{M} + \int_i^k \left(\tilde{p}_x \tilde{\tilde{u}} dy + \tilde{p}_y \tilde{\tilde{v}} dx\right) = 0$$

$$\int_i^k \left[\tilde{\tilde{u}} d\tilde{H} - \tilde{H}\left(\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T\right)dy\right] = \left[\tilde{\tilde{u}}\tilde{H}\right]_i^k - \int_i^k \tilde{H}\left(d\tilde{\tilde{u}} + \tilde{\tilde{\varphi}} dy - \tilde{\tilde{\varphi}}_T dy\right)$$

$$\int_i^k \left[\tilde{\tilde{v}} d\tilde{V} + \tilde{V}\left(\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T\right)dx\right] = \left[\tilde{\tilde{v}}\tilde{V}\right]_i^k - \int_i^k \tilde{V}\left(d\tilde{\tilde{v}} - \tilde{\tilde{\varphi}} dx - \tilde{\tilde{\varphi}}_T dx\right)$$

$$-\int_i^k \left[\left(\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T\right)d\tilde{M}\right] = -\left[\left(\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T\right)\tilde{M}\right]_i^k + \int_i^k \tilde{M} d\left(\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T\right)$$

Kada ubacimo izraze sa desne strane gornjih jednacina i veze ***$du+\varphi dy=\varepsilon dx$ i $dv-\varphi dx=\varepsilon dy$*** *u prvi izraz dobijamo:*

$$\left[-\left(\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T\right)\tilde{M} + \tilde{\tilde{u}}\tilde{H} + \tilde{\tilde{v}}\tilde{V}\right]_i^k + \int_i^k \left(\tilde{p}_x \tilde{\tilde{u}} dy + \tilde{p}_y \tilde{\tilde{v}} dx\right) = \int_i^k \left[\tilde{M}\tilde{\tilde{\chi}} ds + \tilde{\tilde{\varepsilon}}\left(\tilde{H} dx + \tilde{V} dy\right) - \tilde{\tilde{\varphi}}_T\left(\tilde{H} dy - \tilde{V} dx\right)\right]$$

$$dx = ds\cos\alpha$$
$$dy = ds\sin\alpha$$
$$N = H\cos\alpha + V\sin\alpha$$
$$T = V\cos\alpha - H\sin\alpha$$

Kada ovu jednačinu ispišemo za svaki štap nosača i izvršimo sabiranje tih jednačina dobijamo:

$$\sum_{s}\left[-\left(\tilde{\tilde{\varphi}}-\tilde{\tilde{\varphi}}_{T}\right)\tilde{M}+\tilde{\tilde{u}}\tilde{H}+\tilde{\tilde{v}}\tilde{V}\right]_{i}^{k}+\sum_{s}\int_{i}^{k}\left(\tilde{p}_{x}\tilde{\tilde{u}}dy+\tilde{p}_{y}\tilde{\tilde{v}}dx\right)=\sum_{s}\int_{i}^{k}\left[\tilde{M}\tilde{\tilde{\chi}}+\tilde{\tilde{\varepsilon}}\tilde{N}+\tilde{\tilde{\varphi}}_{T}\tilde{T}\right]ds$$

Algebarski zbir radova svih spoljašnjih i unutrašnjih sila mogućeg ravnotežnog stanja jednog štapa na pomjeranjima i obrtanjima poprečnih presjeka štapa pri njegovom mogućem stanju deformacija jednak je nuli.

$$\sum_{s}\int_{i}^{k}=\int_{s}$$

$$\sum_{s}\left[-\left(\tilde{\tilde{\varphi}}-\tilde{\tilde{\varphi}}_{T}\right)\tilde{M}+\tilde{\tilde{u}}\tilde{H}+\tilde{\tilde{v}}\tilde{V}\right]_{i}^{k}=\sum_{i}\tilde{P}_{i}\tilde{\tilde{s}}_{i}+\sum_{i}\tilde{M}_{i}\left(\tilde{\tilde{\varphi}}-\tilde{\tilde{\varphi}}_{T}\right)_{i}+\sum_{i}\tilde{C}_{oi}\tilde{\tilde{c}}_{oi}+\sum_{i}\tilde{C}_{ui}\tilde{\tilde{c}}_{ui}$$

$$\int_{s}\left(\tilde{p}_{x}\tilde{\tilde{u}}dy+\tilde{p}_{y}\tilde{\tilde{v}}dx\right)+\sum_{i}\tilde{P}_{i}\tilde{\tilde{s}}_{i}+\sum_{i}\tilde{M}_{i}\left(\tilde{\tilde{\varphi}}-\tilde{\tilde{\varphi}}_{T}\right)_{i}+\sum_{i}\tilde{C}_{oi}\tilde{\tilde{c}}_{oi}+\sum_{i}\tilde{C}_{ui}\tilde{\tilde{c}}_{ui}=\int_{s}\left[\tilde{M}\tilde{\tilde{\chi}}+\tilde{\tilde{\varepsilon}}\tilde{N}+\tilde{\tilde{\varphi}}_{T}\tilde{T}\right]ds$$

Rad aktivnih i reaktivnih spoljašnjih sila:

$$\sum \tilde{P}\,\tilde{\tilde{s}} = \int_s \left(\tilde{p}_x \tilde{\tilde{u}}\,dx + \tilde{p}_y \tilde{\tilde{v}}\,dy\right) + \sum_i \tilde{P}_i \tilde{\tilde{s}}_i + \sum_i \tilde{M}_i \left(\tilde{\tilde{\varphi}} - \tilde{\tilde{\varphi}}_T\right)_i$$

$$\sum \tilde{C}\tilde{\tilde{c}} = \sum_i \tilde{C}_{oi}\tilde{\tilde{c}}_{oi} + \sum_i \tilde{C}_{ui}\tilde{\tilde{c}}_{ui}$$

$$\sum \tilde{P}\tilde{\tilde{s}} + \sum \tilde{C}\tilde{\tilde{c}} = \int_s \left[\tilde{M}\tilde{\tilde{\chi}} + \tilde{\tilde{\varepsilon}}\tilde{N} + \tilde{\tilde{\varphi}}_T \tilde{T}\right] ds$$

Ova jednačina predstavlja osnovnu ***vezu mogućih ravnotežnih stanja i mogućih stanja deformacije nosača***.

Kada je moguće ravnotezno stanje stvarno ravnotezno stanje koje nastaje pod zadatim opterećenje, a moguće stanja deformacija virtualno stanje koje ćemo označimo jednom crtom, dobijamo jednačinu koja prikazuje **princip virtualnih pomjeranja**:

$$\sum P\overline{s} + \sum C\overline{c} = \int_s \left[M\overline{\chi} + N\overline{\varepsilon} + T\overline{\varphi}_T \right] ds$$

Kada za moguće stanje deformacije unesemo pomjeranja i deformacijske veličine koje se u nosaču javljaju usled zadatog opterećenja – stvarno stanje deformacija, a moguće ravnotežnog stanje je virtulno ravnotezno stanje koje umjesto talasa označimo crtom dobijamo jednačinu koja prikazuje **princip virtualnih sila** :

$$\sum \overline{P}s + \sum \overline{C}c = \int_s \left[\overline{M}\chi + \overline{N}\varepsilon + \overline{T}\varphi_T \right] ds$$

Primjenom principa virtualnih pomjeranja može da se sračuna sve ono što može da se sračuna iz uslova ravnoteže **(1) i (2)**.

Primjenom principa virtualnih sila može da se izračuna sve ono što može da se izračuna iz deformacijskih uslova **(3) i (4).**

Za sistem ***krutih tijela sve deformacijske veličine su jednake nuli*** *pa matematička formulacija* ***principa virtualnih pomjeranja*** *glasi:*

$$\sum P\overline{s} + \sum C\overline{c} = 0$$

i ***principa virtualnih sila glasi****:*

$$\sum \overline{P}s + \sum \overline{C}c = 0$$

DIJAGRAMI UTICAJA I UTICAJNE LINIJE

Uticaji u nosačima. Stalno i pokretno opterećenje

Uticaji u nosačima
- → *Reakcije oslonaca, reaktivni momenti, sile u presjecima*
- → *Pomjeranja i obrtanja poprečnih presjeka nosača, deformacijske velicine*

Zadatak određivanja uticaja *u nosačima određen je sistemom linearnih diferencijalnih jednačina i stoga važi princip superpozicije uticaja.*

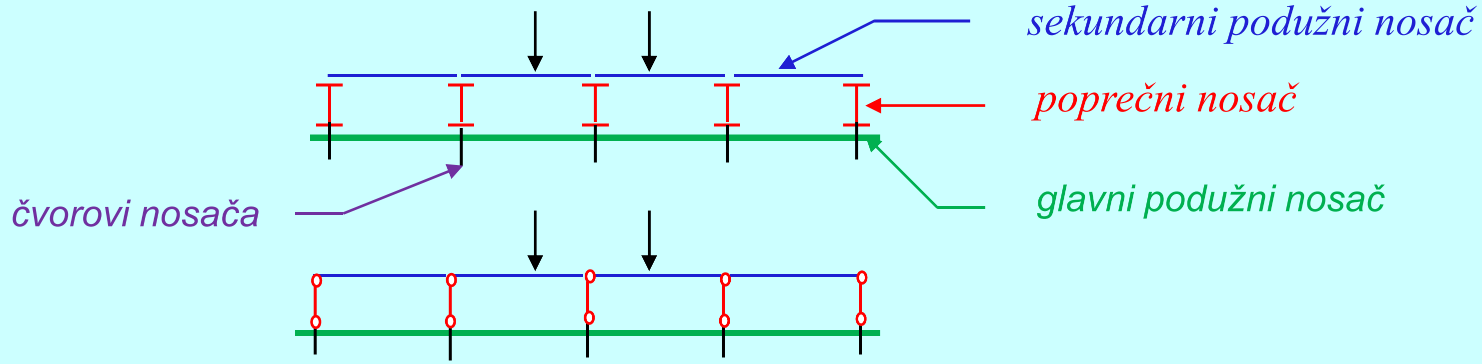
1. Prema načinu nanošenja spoljašnje ili aktivne sile dijelimo na:

- **raspodijeljene sile, raspodijeljene momente**
- **koncentrisane sile, koncentrisani momenti**

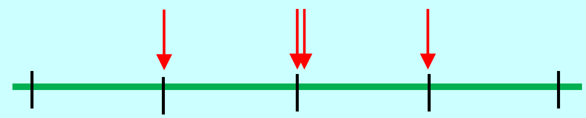
2. Prema načinu prenošenja opterećenja na nosač razlikujemo:

- **neposredno opterećenje** → *nosač prima opterećenje po cijeloj dužini, u svim tačkama ose*
- **posredno opterećenje** → *opterećenje se prenosi u određenim tačkama nosača*

posredno opterećenje



Ekvivalentno čvorno opterećenje



neposredno opterećenje

3. Prema vremenu trajanja

- *stalno opterećenje* → *sopstvena težina glavnih podužnih nosača i svih djelova konstrukcije koji se preko njega prenose.*
- *povremeno opterećenje* → *snijeg, vetar, ljudska navala, usladišteni materijal, vozila, i sl.*

Povremeno opterećenje koje mijenja svoj položaj na nosaču naziva se:

POKRETNO OPTEREĆENJE

- *jednako podijeljeno pokretno opterećenje*
- *sistem pokretnih koncentrisanih sila*

2. Ekstremne vrijednosti uticaja

Vrijednosti uticaja u nosačima, koje izazivaju stalna i povremena opterećenja, zavise samo od intenziteta opterećenja.

Vrijednosti uticaja od pokretnog opterećenja zavisi ne samo od intenziteta uticaja već i od njegovog ***POLOŽAJA na nosaču***.

Položaj opterećenja pri kome uticaj na posmatranom mjestu nosača ima ekstremnu vrijednost je ***opasan ili mjerodavan položaj.***

Znači da se **opasan položaj mijenja sa promjenom položaja presjeka u kome tražimo uticaj**, kao **i sa promjenom vrste traženog uticaja**.

Maksimalne i minimalne vrijednosti nekog uticaja usljed pokretnog opterećenja prikazujemo dijagramima ekstremnih vrijednosti uticaja.

Između ***dijagrama uticaja*** i ***dijagrama ekstremnih uticaja*** postoji suštinska razlika.

Ordinate dijagrama uticaja *pokazuju vrijednosti uticaja u svim presjecima* ***za jedan jedini položaj opterećenja***

Ordinate dijagrama ekstremnih vrijednosti uticaja *pokazuju promjenu u svim poprečnim presjecima pri čemu svakoj ordinati po pravilu odgovara novi položaj opterećenja.*

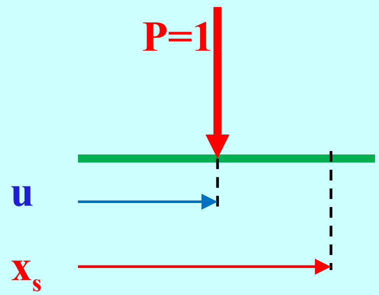
Najveći od ekstremnih uticaja u pojedinim poprečnim presjecima, odnosno brojno najveći uticaj u nosaču nazivamo ***apsolutni maksimum*** **ili** ***apsolutni minimum*** tog uticaja.

Često je za dimenzionisanje nosača potrebno da se odredi samo ***apsolutni maksimum ili minimum pojedinih uticaja****.*

Pojam uticajne funkcije i uticajne linije

*Uticaje u nosačima usljed dejstva pokretnog opterećenja određujemo preko **uticajnih linija**.*

Ako ***jedinična koncentrisan sila*** djeluje u tački sa apcisom **u**, tada će ***uticaj u presjeku*** sa apcisom x_s **zavisiti od obije apcise**:



$$Z_s = Z_s(x_s, u)$$

Kada je:

u=const	*– sila se ne pomjera*
$x_s \neq$ **const**	*– položaj presjeka je promjenljiv*

→ $Z_s = Z_s(x_s, u)$ *funkcija Z je **funkcija uticaja** usljed P=1 u tački sa apcisom **u***

Kada je:

u ≠ const	*– sila se pomjera, apcisa **u** je promjenljiva*
x_s **= const**	*– položaj presjeka u kojem tražimo uticaj je nepromjenljiv*

→ $Z_s = Z_s(x_s, u)$ *funkcija Z je **uticajna funkcija** za uticaj **Z** u presjeku sa apcisom x_s*

Grafički prikaz uticajne funkcije je ***uticajna linija*** *za uticaj Z u presjeku* ***x_s*** ***koja ima ordinate koje se nanose na mjesto dejstva sile****, odnosno,* ***u presjeku sa apcisom u****.*

Uticajne linije mogu biti

- ***krive linije***
- ***prave linije***

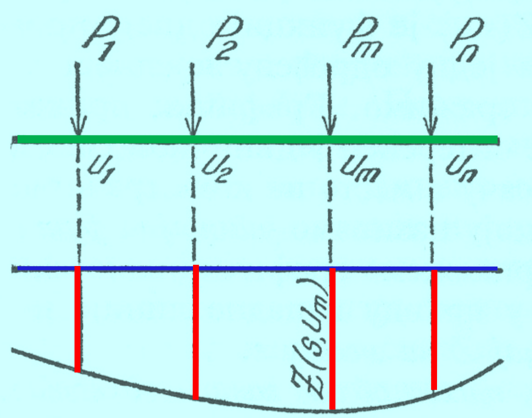
Oblik uticajne linije *zavisi od*

- ***vrste nosača***
- ***vrste uticaja u nosaču***
- ***načina prenošenja opterećenja na nosač*** *(posredno ili neposredno)*

Računanje vrijednosti uticaja iz uticajne linije

1. Sistem koncentrisanih sila

Na osnovu ***principa superpozicije uticaja Z_s*** *u presjeku sa apcisom* ***x_s****, usljed dejstva* ***sistema koncentrisanih sila P_1, P_2, ...,P_n****, u presjecima sa apcisama* ***u_1, u_2, ..., u_n*** *određena je algebarskom zbirom pojedinih uticaja sila* ***P_m****, $m=1,n$:*



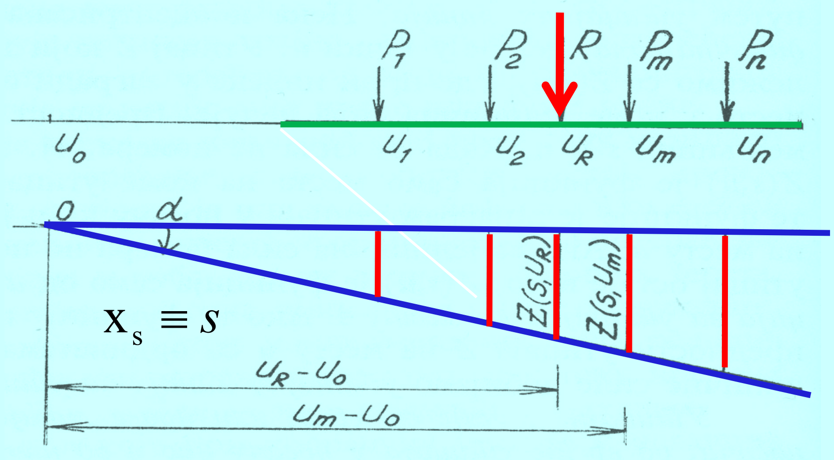
$Z_s, (x_s, u_m)$

$$Z_s = \sum_{m=1}^{n} P_m Z_s(x_s, u_m)$$

Kada je uticajna linija ***prava linija*** na onom dijelu na kome djeluje sistem koncentrisanih sila tada izraz

$$Z_s = \sum_{m=1}^{n} P_m Z_s(x_s, u_m)$$

postaje:



$$Z_s = \mathrm{tg}\alpha \sum_{m=1}^{n} P_m (u_m - u_o)$$

Kada se statički moment sila P_1, P_2, ...,P_n u odnosu na tacku O *zamijeni sa* ***statičkim momentom rezultante R u odnosu na istu tačku dobija se***:

$$\sum_{m=1}^{n} P_m (u_m - u_o) = R(u_R - u_o)$$

gdje je sa R obeležena rezultanta sila

$$R = \sum_{m=1}^{n} P_m$$

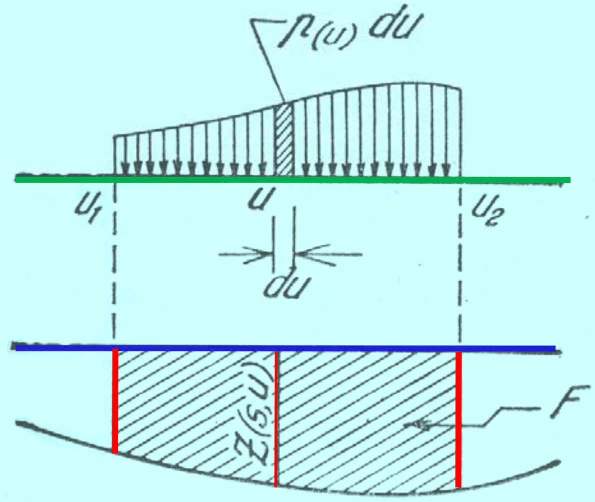
Vrijednost traženog uticaja određujemo *proizvodom rezultante* i *ordinate uticajne linije ispod rezultante*:

$$Z_s = R(u_R - u_o)\mathrm{tg}\alpha = RZ(x_s, u_R)$$

2. Raspodijeljeno opterećenje

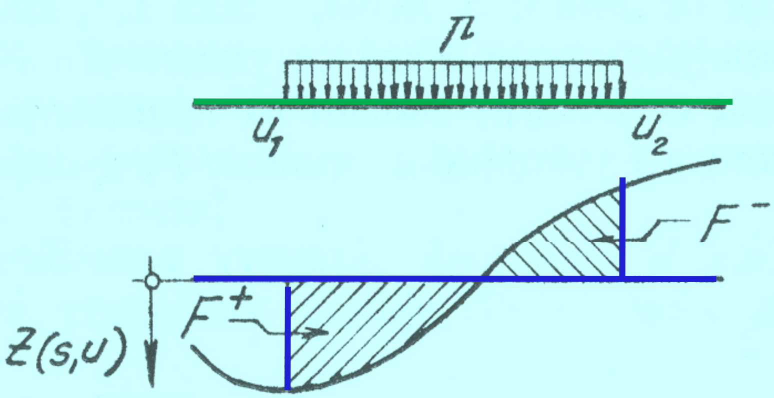
Ako uvedemo pojam elementarne koncentrisane sile ***p(u)du***, primjenom izraza $Z_s = \sum_{m=1}^{n} P_m Z_s(x_s, u_m)$ dobijamo:

$$Z_s = \int_{u_1}^{u_2} p(u) Z(x_s, u) du$$



Kada je opterećenje ***jednako podijeljeno*** *intenziteta:*

p(u)=p=const



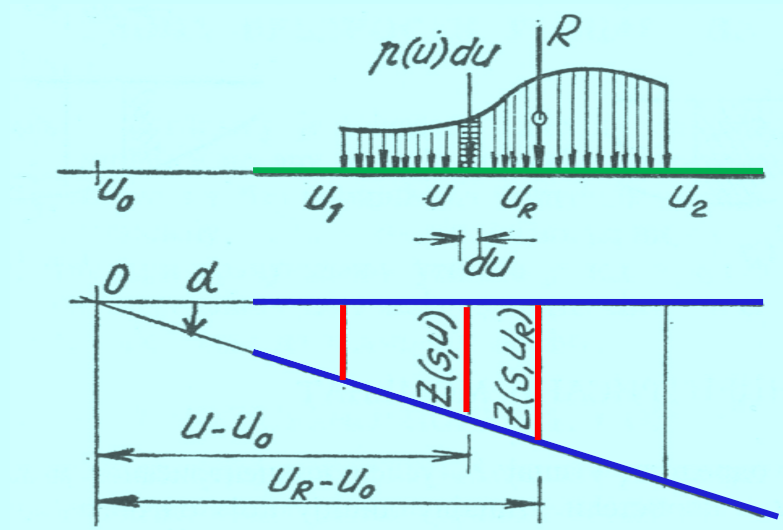
$$Z_s = p \int_{u_1}^{u_2} Z(x_s, u) du = pF$$

F - *uticajna površina ispod opterećenja*

Ako uticajna površina ispod opterecenja mijenja znak tada površinu treba uzeti u algebarskom smislu

$$\boldsymbol{F = F^+ + F^-}$$

*Kada je opterećeni dio uticajne površi ograničen pravom linijom koja apcisnu osu sječe u tački 0 tada se **ordinate uticajne** linije mogu sračunati izrazom*:



$$Z_s(x_s, u) = (u - u_o)\mathrm{tg}\alpha$$

$$Z_s = \mathrm{tg}\alpha \int_{u_1}^{u_2} p(u)(u - u_o)du$$

Integral na desnoj strani predstavlja statički moment **elementarnih sila** ***p(u)du*** u odnosu na presjek sa apcisom $\mathbf{u_o}$

*i možemo ga odrediti pomoću statičkog momenta **rezultante** **R(u_R-u_o)** u odnosu na isti presjek:*

$$Z_s = R(u_R - u_o)tg\alpha = RZ(x_s, u_R)$$

gdje su

$$Z(x_s, u_R) = (u_R - u_o)tg\alpha \qquad R = \int_{u_1}^{u_2} p(u)du$$

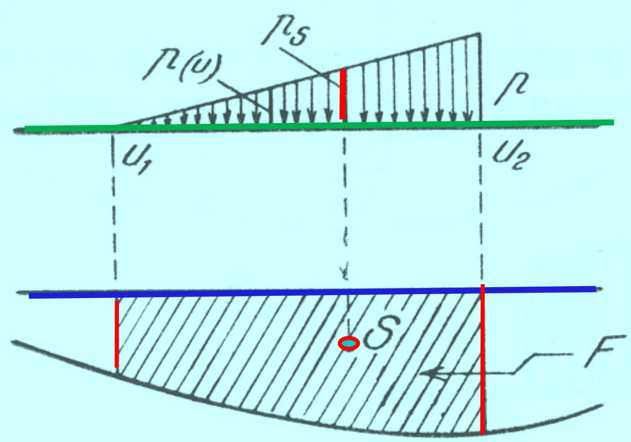
$Z(x_s, u_R)$ - ***ordinata uticajne linije ispod rezultante****, odnosno, ispod težišta dijagrama opterećenja*

Ako se opterećenje **p(u) linearno mijenja** *tada se integralom određuje brojna vrijednost povrsine opterećenog dijela uticajne površine:*

$$F = \int_{u_1}^{u_2} Z(x_s, u)du$$

Iz relacije

$$Z_s = \int_{u_1}^{u_2} p(u)Z(x_s, u)du$$



vodeći računa da je:

$$\frac{p(u)}{(u - u_1)} = \frac{p}{u_2 - u_1} \qquad \Rightarrow \qquad p(u) = \frac{p}{u_2 - u_1}(u - u_1)$$

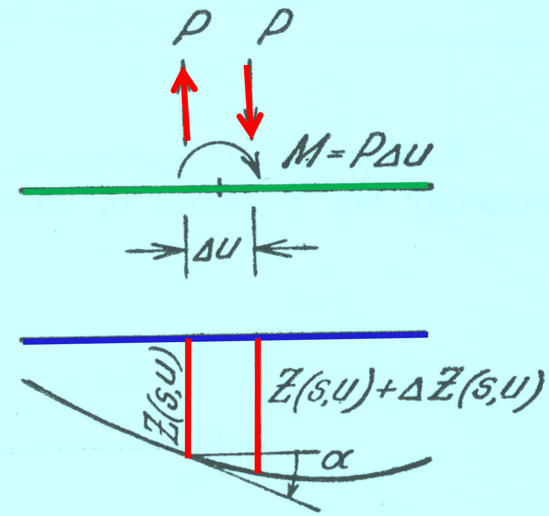
dobijamo

$$Z_s = \frac{p}{u_2 - u_1}\int_{u_1}^{u_2} Z(x_s, u)(u - u_1)du = \frac{p}{u_2 - u_1}u_s F = p_s F$$

3. Koncentrisani momenat

Ako koncentrisani momenat u presjeku u **zamijenimo ekvivalentnim spregom sila P koje djeluju na razmaku Δu** *tako da važi izraz*

M=PΔu



tada je:

$$P\left|Z(x_s,u)+\Delta Z(x_s,u)-Z(x_s,u)\right| = P\Delta Z(x_s,u) = M\frac{\Delta Z(x_s,u)}{\Delta u}$$

Kada razmak Δu→0, tada:

$$Z_s = M\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta Z(x_s,u)}{\Delta u} = MZ'(x_s,u) = M\mathrm{tg}\alpha$$

$Z'(x_s,u)$ – izvod uticajne funkcije po promjenljivoj **u**

$$Z_s = Mtg\alpha$$

Određivanje mjerodavnog položaja i proračun ekstremnih vrijednosti uticaja

1. Jednako podijeljeno pokretno opterećenje

Jednako podijeljeno pokretno opterećenje može da bude:

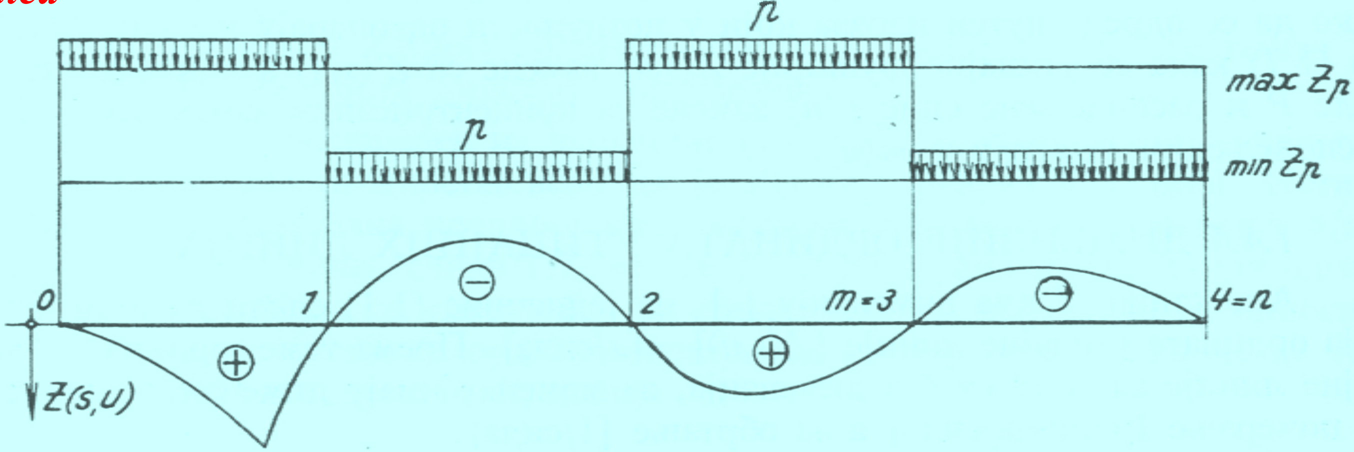
- ***proizvoljne dužine rasprostiranja** (može se prekidati na proizvoljnom mjestu)*
- ***određene dužine rasprostiranja** (koja se ne može prekidati)*

*Uvešćemo pojam **razdjelnice** uticajne linije:*

tačke koje dijele pozitivne i negativne djelove uticajne linije

ili tačke u kojima uticajna linija mijenja znak

*Kada je podijeljeno pokretno opterećenje **proizvoljne dužine** a **uticajna linija ima više razdjelnica***

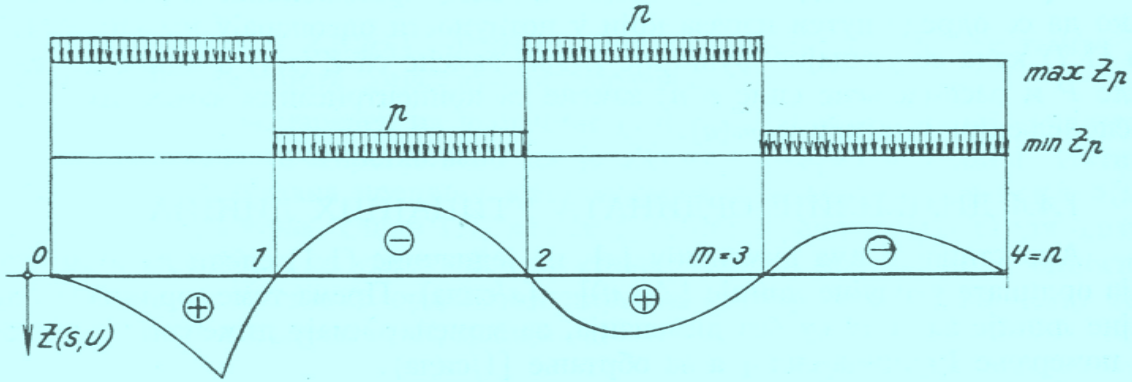


*tada se **mjerodavan položaj određuje postavljanjem opterećenja iznad onih djelova uticajnih površi koje imaju isti znak**.*

Ako ***razdjelnice*** *obilježimo sa* ***m=0,1,2,...,n****, a uticajnu površinu* ***m- tog polja*** *sa* F_m

$$F_m = \int_{m-1}^{m} Z(x_s, u)\,du$$

tada su ekstremne vrijednosti uticaja određene izrazima:



$$_{\max} Z_{s,p} = pF^{+}$$

$$_{\min} Z_{s,p} = pF^{-}$$

F^+ - pozitivna površina uticajne linije F^- - negativna površina uticajne linije

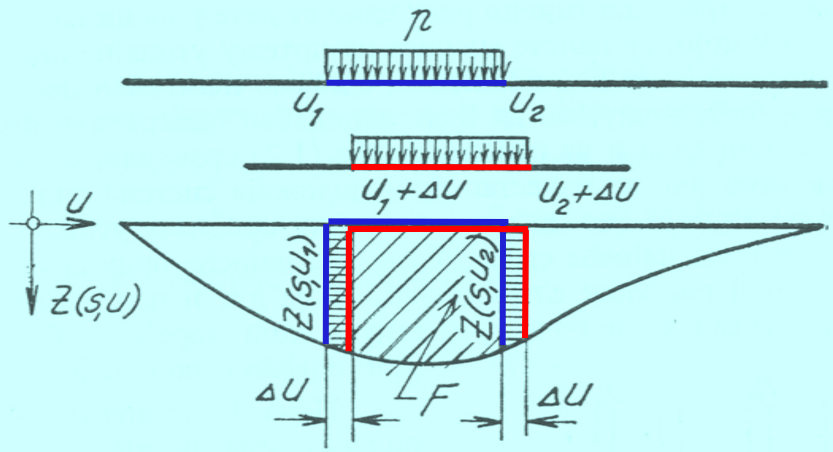
$$F^+=F_1+F_3 \qquad F^-=F_2+F_4$$

$$\Sigma F=F^+ + F^- = F_1+F_3+F_2+F_4$$

Uticaj jednako podijeljenog stalnog opterećenja intenziteta g sračunava se na sljedeći način:

$$Z_{s,g} = g\,\Sigma F = g\,F^+ + g\,F^-$$

Kada je jednako podijeljeno pokretno opterećenje ***<u>određene dužine rasprostiranja</u>*** *i to takve dužine <u>koja je manja od razmaka susjednih nultih tačaka uticajne linije</u>, mjerodavan položaj odredićemo na sljedeći način:*



Ako je položaj opterećenja dat na slici ***mjerodavan položaj****, odnosno, ako za taj položaj* $Z_s = p\,F$ *ima* ***ekstremnu vrijednost*****,**

tada pri pomjeranju opterećenja ***u lijevo ili desno*** *za veličinu* Δu *priraštaj uticaja* ΔZ_s ***mora da bude jednak nuli****, što znači da:*

$$\Delta Z_s = p\,\Delta u\,[Z(x_s, u_2) - Z(x_s, u_1)] = 0$$

Iz koje slijedi kriterijum za mjerodavan položaj:

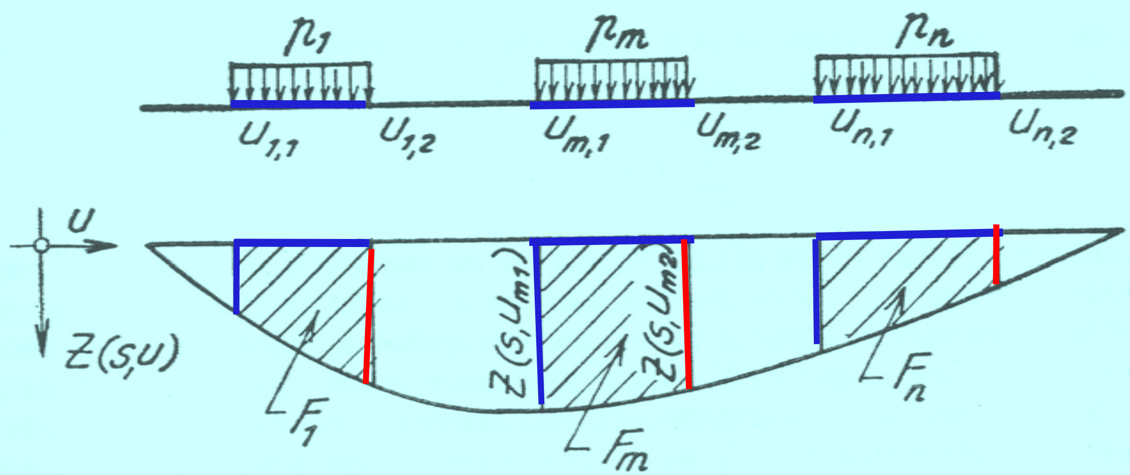
$$Z(x_s, u_2) = Z(x_s, u_1)$$

Kada je jednako podijeljeno pokretno opterećenje konačne dužine u opasnom položaju mora da bude ispunjen ***uslov jednakosti ordinata uticajne linije na krajevima opterećenja.***

*Moguće je da postoji **veći broj** položaja koji zadovoljavaju ovaj uslov.*

*U takvim slučajevima **ekstremnu vrijednost uticaja nalazimo upoređenjem vrijednosti uticaja** za sve položaje pokretnog opterećenja koji zadovoljavaju navedeni uslov jednakosti ordinata.*

Kada se **pokretno opterećenje sastoji od niza jednako podijeljenih opterećenja proizvoljnih intenziteta** konačnih dužina na razmacima koji se tokom vremena ne mijenjaju **mjerodavan položaj dobijamo treba da zadovolji uslov**:



$$\sum_{m=1}^{n} p_m Z(x_s, u_{m1}) = \sum_{m=1}^{n} p_m Z(x_s, u_{m2})$$

4.4.2. Pokretan sistem vezanih koncentrisanih sila

Mjerodavan položaj pokretnog sistema vezanih koncentrisanih sila je nešto teže odrediti.

*Kada je uticajna linija kriva linija ili poligon sa više strana, tada ekstremne vrijednosti **određujemo probanjem**.*

*Sile nanosimo na **traku papira** po redu kako su date u **šemi opterećenja** nanoseći razmake sila u razmjeri u kojoj su nanijete apcise na crtežu uticajne linije.*

*Postavljanjem tako nanijetih sila **nad pozitivnan**, odnosno, **negativan dio uticajne linije** u položaj koji očekujemo da bude mjerodavan, **odmjeravamo ordinate uticajne linije ispod sila** i na osnovu izraza **sračunavamo vrijednost uticaja**:*

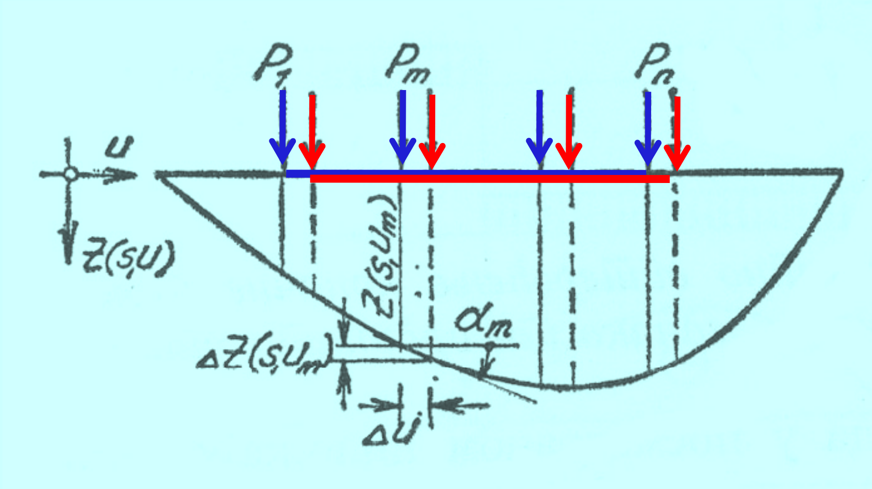
$$Z_s = \sum_{m=1}^{n} P_m Z_s(x_s, u_m)$$

Postupak ponovimo za izvjestan broj položaja sistema sila, poredimo rezultate i dobijamo mjerodavan položaj sila koji daje ekstremnu vrijednost uticaja.

***Redovno je to položaj pri kome najveće sile dolaze nad najveće ordinate uticajne linije**.*

Ovaj **postupak je dug i neprecizan**, stoga ćemo ga skratiti **koristeći kriterijume koji moraju biti zadovoljeni pri opasnom položaju sistema sila**.

Ako je data uticajna linija i pokretan sistem sila kao na slici, za koji kažemo da je mjerodavan položaj:



$$Z_s = \sum_{m=1}^{n} P_m Z_s(x_s, u_m)$$

tada uticaj ima ekstremnu vrijednost ako ***pri pomjeranju sistema sila ulijevo ili udesno*** *za* ***veličinu Δu prirast uticaja ΔZ_s mora da bude jednak nuli****:*

$$\Delta Z_s = \sum_{m=1}^{n} P_m \Delta Z(x_s, u_m) = \Delta u \sum_{m=1}^{n} P_m \operatorname{tg}\alpha_m = 0$$

Slijedi da ***kada je sistem sila u mjerodavnom položaju mora biti ispunjen uslov****:*

$$\sum_{m=1}^{n} P_m \operatorname{tg}\alpha_m = 0$$

Navedena jednačina predstavlja analitički kriterijum koji moraju zadovoljiti sile da bi posmatrani položaj bio mjerodan.

Moguće je da postoji više položaja koji zadovoljavaju analitički kriterijum, tj da postoje više maksimuma i minimuma.

Ekstremnu vrijednost uticaja Z_s dobijamo upoređujući vrijednosti uticaja za sve položaje sistema sila koji zadovoljavaju kriterijum

$$\sum_{m=1}^{n} P_m \operatorname{tg}\alpha_m = 0$$

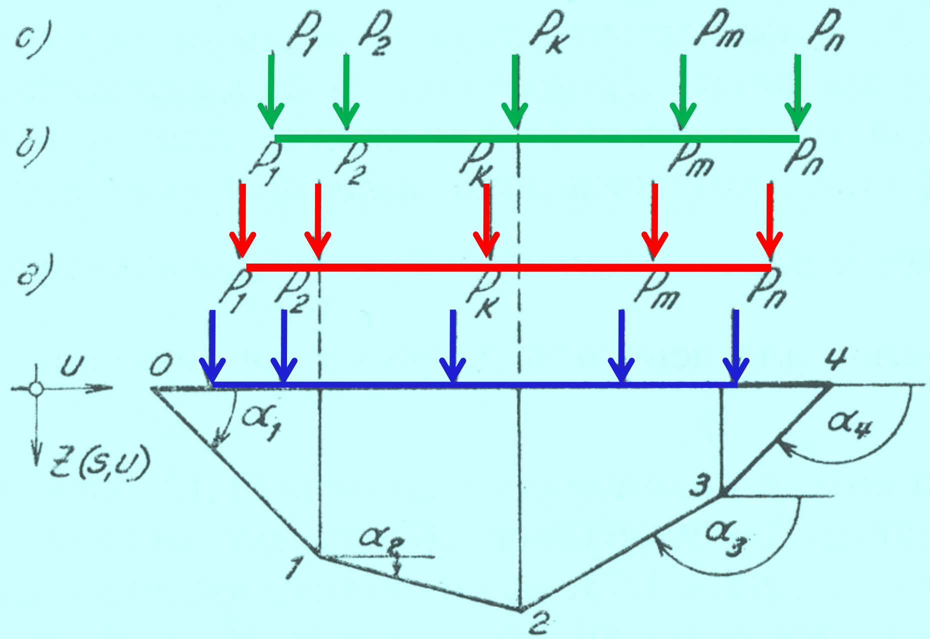
Ovaj kriterijum važi i kada je uticajna linija poligonalna linija.

Razlika je u tome što je izvod funkcije

$$\frac{\Delta Z}{\Delta u} = \sum_{m=1}^{n} P_m \operatorname{tg}\alpha_m$$

kada je uticajna linija kriva linija, neprekidna funkcija, a kada je uticajna linija poligonalnog oblika, izvod funkcije se mijenja u skokovima.

Ako je dat ***položaj a)*** *za dati* ***sistem pokretnih sila P_1,.., P_n*** *na poligonalnoj uticajnoj liniji*



zbir proizvoda je $\sum_{m=1}^{n} P_m \operatorname{tg}\alpha_m > 0$

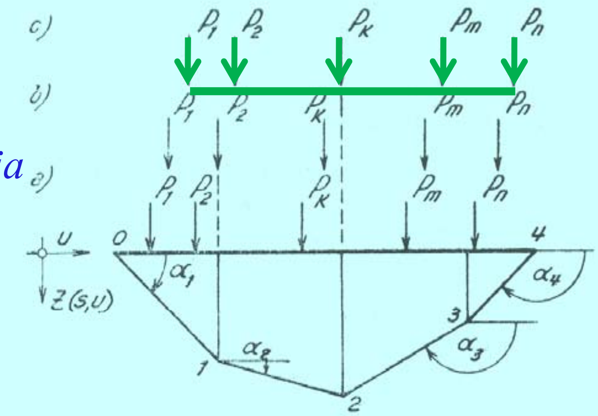
Pri ***pomjeranju sistema sila za Δu prirast funkcije ΔZ*** *je:*

$$\Delta Z = \Delta u \sum_{m=1}^{n} P_m \operatorname{tg}\alpha_m$$

*Kada se sistem sila pomjera u smjeru u kojem raste **u**, **s lijeva na desno**, **Δu>0** pa je i **ΔZ>0**, funkcija Z **raste**.*

*Kada se sistem sila pomjera u smjeru u kojem **u** opada, **s desna na lijevo**, **Δu<0** pa je i **ΔZ<0**, funkcija Z **opada**.*

*Zaključuje se da **sistem sila treba pomjerati na desno da bi dobili ekstremnu vijednost**.*



*Pri **ovom pomjeranju sistema sila** vrijednost zbira se ne mijenja sve dok*

- ***ili neka nova sila ne naiđe na uticajnu liniju***
- ***ili neka sila ne siđe sa uticajne linije***
- ***ili neka od sila koja se nalazi nad uticajnom linijom prelaskom preko tjemena poligonalne uticajne linije ne pređe na dio čiji je ugao nagiba drugi***

Nailaskom, odnosno, **silaskom sila** *sa uticajne linije* **vrijednost zbira se mijenja** ali ostaje pozitivna.

Prelaskom neke sile preko tjemena, **sa jednog dijela uticajne linije na drugi dio**, na primjer sile P_2 u položaj c), **vrijednost se mijenja skokovito**.

*Pri tome se **zbir smanjuje** jer sila prelazi sa dijela uticajne linije **sa algebarski većim tangensom ugla na dio sa manjim tangensom ugla**.*

*Ako je vrijednost **još uvijek pozitivna sistem sila treba i dalje pomjerati u desno dok još neka sila ne pređe prelo tjemena uticajne linije**.*

Ako je vrijednost još uvijek ***pozitivna, sistem sila treba i dalje pomjerati u desno*** *dok još neka sila ne pređe preko tjemena uticajne linije.*

Razumljivo da vrijednost ove sume koja se mijenja ***neće biti jednaka nuli osim u izuzetnim slučajevima****, međutim, sigurno je da će* ***pri prelasku neke sile preko nekog od tjemena uticajne linije vrijednost sume promijeniti znak, postati negativna****.*

Kada se ta ***sila nalazi nad tim tjemenom uticaj*** Z_s ***ima ekstremnu vrijednost*** *jer:*

$\rightarrow$ **Δu>0** $$\sum_{m=1}^{n} P_m tg\alpha_m < 0$$

$\leftarrow$ **Δu<0** $$\sum_{m=1}^{n} P_m tg\alpha_m > 0$$

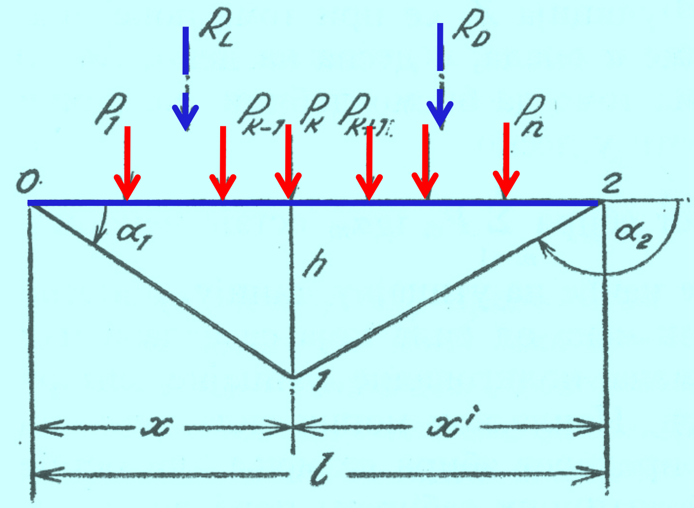
U oba slučaja prirast funkcije je **negativan**, što znači da u posmatranom položaju funkcija ima **ekstremnu vrijednost**.

Zaključuje se, da bi se ***pokretan sistem sila našao u opasnom položaju jedna od sila****, koju nazivamo* ***mjerodavna sila ili kritična sila****,* ***mora da se nalazi nad jednim od tjemena uticajne linije****, a vrijednost* $\sum_{m=1}^{n} P_m tg\alpha_m$ ***pri pomjeranju sistema sila lijevo ili desno od tog položaja mora imati različit znak.***

Opasnu ili mjerodavnu silu označićemo sa P_k.

Ovu silu razdvojićemo na dvije komponente P_k^l ***i*** P_k^d *koje djeluju beskonačno blisko pored tjemena i* ***imaju takve intenzitete da je uslov identički zadovoljen****.*

Kriterijum za opasan položaj sistema sila ***možemo primijeniti na trougaonoj uticajnoj liniji****.*



Sile $\boldsymbol{P_m}$ *složimo u rezultante* $\boldsymbol{R_L}$ *i* $\boldsymbol{R_D}$ *tada je uslov:*

$$\mathbf{R_L\ tg\alpha_1 + R_D\ tg\alpha_2 = 0}$$

Sa slike se vidi da je $\boldsymbol{tg\alpha_1 = h/x}$, *i* $\boldsymbol{tg\alpha_2 = -h/x'}$, *to je:*

$$R_L \frac{h}{x} - R_D \frac{h}{x'} = 0 \qquad\qquad R_L \frac{h}{x} = R_D \frac{h}{x'}$$

Prosječno opterećenje lijevog dijela jednako je prosječnom opterećenju desnog dijela uticajne linije

$$R_L \frac{h}{x} = R_D \frac{h}{x'} = \frac{R_L + R_D}{x + x'} = \frac{R}{l}$$

Da bi pokretan sisstem vezanih koncentrisanih sila ***na trougaonoj uticajnoj liniji bio u opasnom položaju*** *potrebno je da* ***prosječna opretećenja lijevog i desnog dijela uticajne linije budu međusobom jednaka i jednaka sa ukupnim prosječnim opterećenjem***.

$$\frac{R}{l} > \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{x}\displaystyle\sum_{m=1}^{k-1} P_m \\ \dfrac{1}{x'}\displaystyle\sum_{m=k+1}^{n} P_m \end{Bmatrix} \qquad \mathrm{R} = \sum_{\mathrm{m}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{P}_{\mathrm{m}}$$

4.5. Konstrukcija uticajnih linija za reakcije i sile u presjecima primjenom statičke metode

Uticajna linija za ***reakciju oslonca ili reaktivni moment uklještenja je linearna funkcija položaja sile P=1*** *duž svake krute ploče po kojoj se sila kreće*.

Uticajna linija za statičke uticaje statički određenog nosača *su* ***prave linije*** *duž svake krute ploče po kojoj se kreće jedinična sila.*