

STATIČKI ODREĐENI NOSAČI. REAKCIJE I SILE U PRESJECIMA

Metoda čvorova i metoda dekompozicije

Reakcije oslonaca i sile u presjecima statički određenih nosača mogu se odrediti primjenom:

- metode čvorova
- metode dekompozicije

U metodi čvorova nepoznate određujemo iz **ravnoteže čvorova**

Za posmatrani **nosač** koji sadrži, ***K*** čvorova možemo napisati isto toliko uslova ravnoteže $\Sigma X=0$ i isto toliko uslova $\Sigma Y=0$:

2K uslova ravnoteže

Za isti nosač koji sadrži ***m*** grupa kruto vezanih štapova može se napisati ***m*** uslova ravnoteže momenata $\Sigma M=0$:

m uslova ravnoteže momenata

Kada u navedenim uslovima sile na krajevima štapova izrazimo preko statički nezavisnih

veličina S_{ik} , M_{ik} i M_{ki} dobijamo sistem od $2K+m$ jednačina

sa isto toliko nepoznatih statičkih veličina:

- ***reakcija oslonaca***
- ***momenata uklještenja***
- ***sila S_{ik} i momenata M_{ik} i M_{ki}***

Unutrašnje sile dobijamo iz uslova ravnoteže štapova i njihovih djelova.

Metodom dekompozicije nepoznate se određuju **iz ravnoteže ploča** od koji je sastavljen posmatrani nosač.

Ploča *unutrašnje kinematički stabilan sistem štapova.*

$$z_s + z_k \geq 2K - 3 \text{ unutrašnje višestruko ili prosto stabilan sistem štapova}$$

Nosač čini sistem ploča koje su među sobom zglavkasto vezane, oslonjene ili ukljestene.

Uklanjanjem *oslonaca i uklještenja i rastavljanjem zglobova* dati nosač *rastavljamo na međusobno nezavisne ploče.*

Ploče su u ravnoteži pod uticajem zadatog opterećenja, reakcija oslonaca, reaktivnih momenata i sila veze u zglobovima (dvije komponente u svakom zglobu).

Za svaku ploču možemo napisati 3 uslova ravnoteže.

U statički određenim nosačima broj nepoznatih jednak je broju jednačina iz kojih se one određuju:

$$\text{Za sistem štapova} \quad z_o + z_u + z_s + z_k + m = 2K + m$$

$$\text{Za sistem ploča} \quad 2z_z + z_o + z_u = 3z_p$$

*Kada odredimo sile koje napadaju ploče onda se rastavljanjem ploča nosač rastavlja na **sistem štapova koji su među sobom vezani kruto.***

Grana je sistem kruto vezanih štapova.

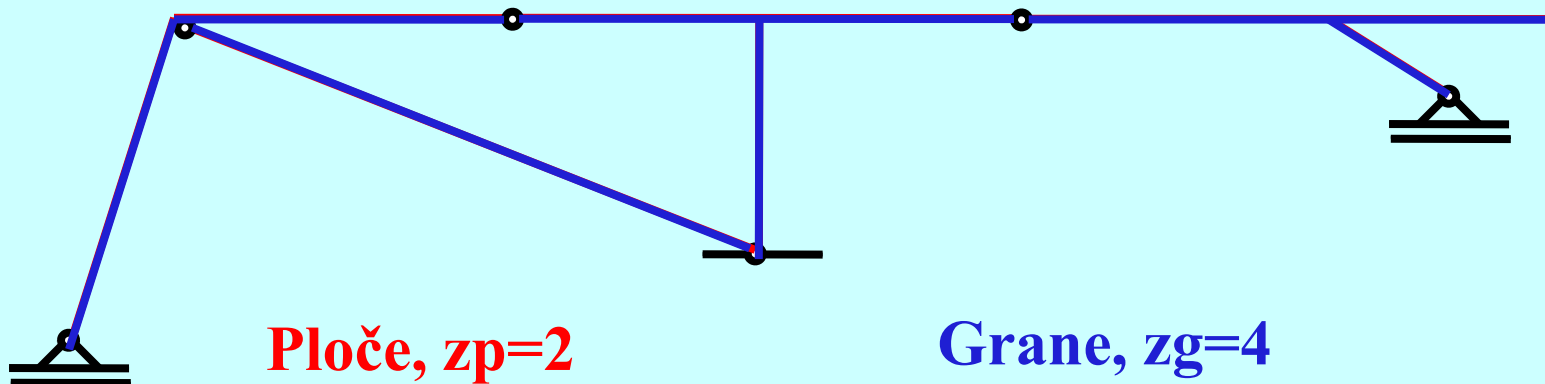
Za svaku granu ispisujemo 3 uslova ravnoteže.

U sistemu jednačina za sistem grana ulaze i *3 jednačine uslova ravnoteže ploče kao sistema grana*.

U uslove ravnoteže grana **reakcije i sile veze ploča ulaze kao poznate sile a nepoznate su sile veze u zglobovima između grana**.

Kada smo odredili sile veze grana onda se sile u presjeku određuju iz uslova ravnoteže jednog od djelova grana na koje taj presjek dijeli granu.

Ova metoda se naziva metoda rastavljanja ili metoda dekompozicije.



Metoda čvorova je jednostavnija jer se direktno dobijaju sile na krajevima štapova

Metoda dekompozicije u proračun uvode i sile veze između ploča odnosno grana pa je ukupan broj nepoznatih već nego u metodi čvorova

Prednost metode dekompozicije je što se umjesto jednog sistema simultanih jednačina dobija više sistema jednačina sa manje nepoznatih.

Koju metodu ćemo primijeniti ?

Zависи od strukture nosača

Ako se radi o sistemu sa manjim brojem ploča, odnosno, grana, metoda dekompozicije je pogodnija za primjenu.

Obrnuto, ako se radi o sistemu sa velikim brojem ploča pogodnija je metoda čvorova.

Pune nosače, uglavnom, je jednostavnije rješavati metodom dekompozicije.

Kod rešetkastih nosača koji se sastoje od niza prostih štapova, odnosno, grana, reakcije oslonaca i sile veze između ploča se određuju metodom dekompozicije a potom se sile u štapovima mogu računati iz uslova ravnoteže čvorova.

NOSAČI KOJI SE SASTOJE OD JEDNE KINEMATIČKI KRUTE PLOČE

Kada se nosač sastoji od jedne kinematički krute ploče, da bi takav nosač bio statički određen broj statički nepoznatih mora da bude $z_o + z_u = 3$

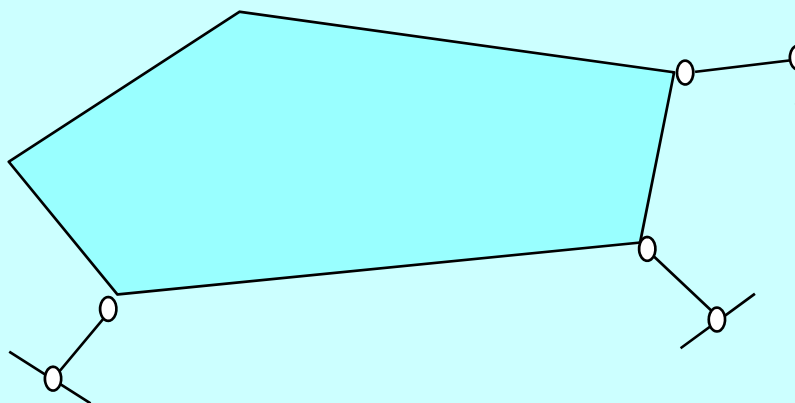
$$2z_z + z_o + z_u = 3z_p$$

$$z_p = 1 \quad z_z = 0$$

$$z_o + z_u = 3$$

Mogu se napisati sljedeće kombinacije: $z_o + z_u = 3 + 0$ $z_o + z_u = 2 + 1$

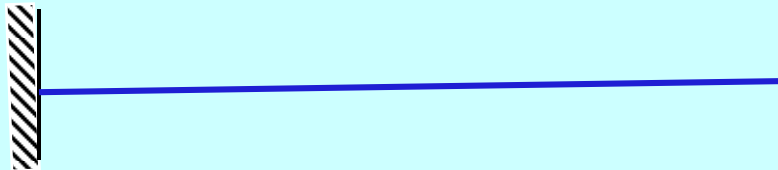
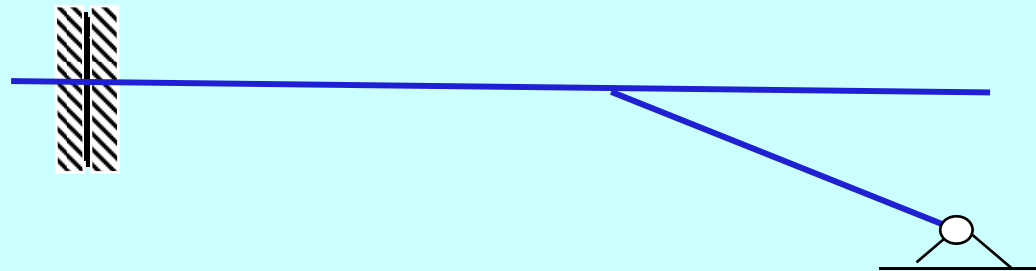
$$z_o + z_u = 3 + 0$$



$$z_o + z_u = 3 + 0$$



$$z_o + z_u = 2 + 1$$



Na slici je prikazana ploča koja je oslonjena u tačkama **a**, **b** i **c**. $z_o + z_u = 3 + 0$

Reakcije oslonaca **A**, **B** i **C** određujemo iz uslova da su algebarski **zbir** **momenata** svih spoljašnjih sila u odnosu na tačke:

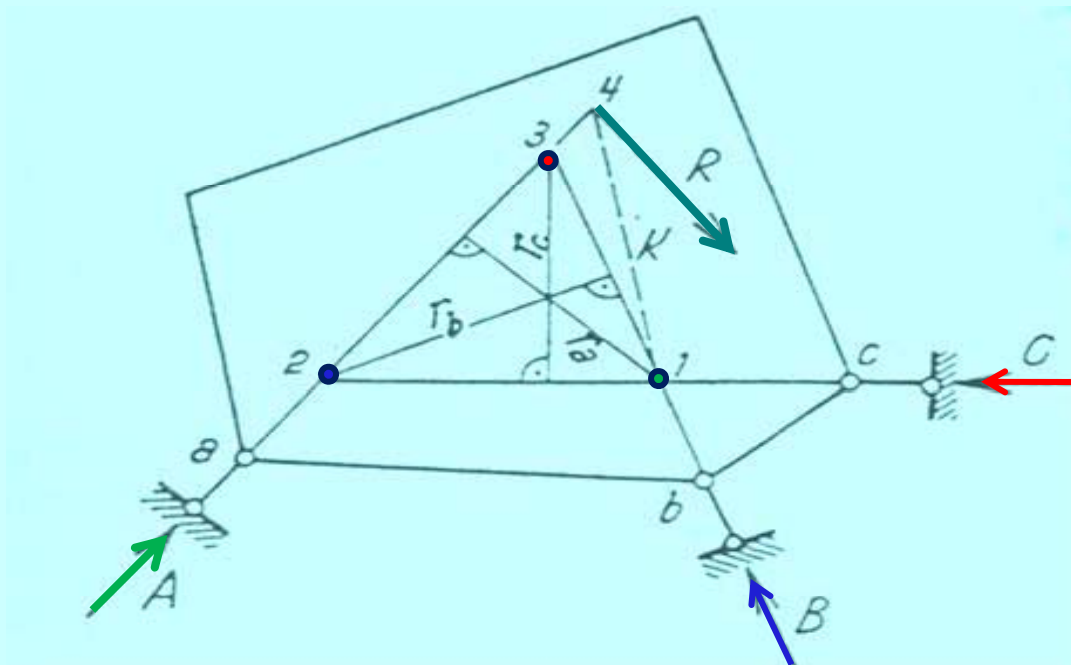
1 u kojoj se sjeku napadne linije sila **B** i **C**

2 u kojoj se sjeku napadne linije sila **A** i **C**

3 u kojoj se sjeku napadne linije sila **A** i **B**

jednaki nuli.

Momente rezultante opterećenja **R** u odnosu na tačke **1**, **2** i **3** označićemo sa M_1 , M_2 i M_3 , a sa r_a , r_b i r_c označavamo **normalna odstojanja** tih tačaka od napadnih linija sila **A**, **B** i **C**:



$$M_1 + Ar_a = 0$$

$$A = -\frac{M_1}{r_a}$$

$$M_2 - Br_b = 0$$

$$B = \frac{M_2}{r_b}$$

$$M_3 + Cr_c = 0$$

$$C = -\frac{M_3}{r_c}$$

kontrola $\Sigma Y \equiv 0$

Momenti M_1 , M_2 i M_3 su pozitivni u smjeru kazaljke na satu.

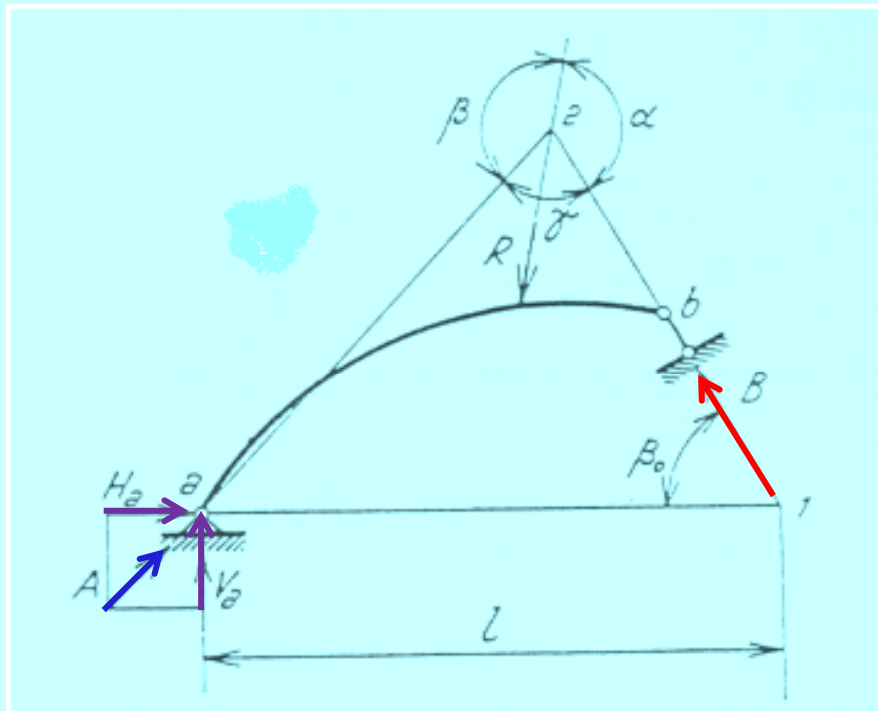
Reakcije oslonaca mogu se odrediti **grafički primjenom poznatog Culman –ovog postupka razlaganja jedne sile u tri data pravca.**

Da bi sistem bio **stabilan** napadne linije sila A , B i C ne smiju da se sijeku u jednoj tački.

Kada se tačke 1, 2 i 3 poklapaju sistem se nalazi u kritičnoj konfiguraciji.

Ravnoteža je tada moguća samo kada sila R prolazi kroz tu tačku, s tim što je proračun tih sila statički neodređen.

Često je nosač koji se sastoji od jedne kinematički krute ploče oslonjen na **jedno nepokretno i jedno pokretno ležište**



Reakcija oslonca za nosač dat na slici su:

Komponente reakcije A su V_a i H_a :

Reakciju B određujemo iz uslova da je algebarski zbir momenata u odnosu na tačku a jednak nuli

$$M_a - Bl \sin \beta_0 = 0 \quad B = \frac{M_a}{l \sin \beta_0}$$

Silu V_a određujemo uslova da je zbir momenata u odnosu na tačku 1 jednak nuli

$$M_1 + V_a l = 0 \quad V_a = -\frac{M_1}{l}$$

Gdje su M_a i M_1 momenti savijanja sile R u odnosu na tačke a i 1 (pozitivan smjer u smeru kazaljke na satu)

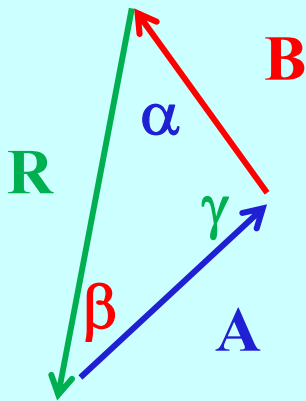
Kada je određena sila **B**, komponenta **H_a** može da se odredi iz uslova da je algebarski zbir horizontalnih komponenti spoljašnjih sila jednak nuli:

$$\mathbf{H}_a + \mathbf{H}_R - \mathbf{B} \cos \beta_o = 0 \quad \rightarrow \quad \mathbf{H}_a = \mathbf{B} \cos \beta_o - \mathbf{H}_R$$

H_R - horizontalna komponenta rezultante **R** koja je pozitivna u smjeru pozitivne sile **H_a**

Prikazan je **analitički postupak** određivanja reakcija oslonaca.

Reakcije oslonaca mogu biti određene i primjenom **grafičkog postupaka** iz trougla sila **A**, **B** i **R**:

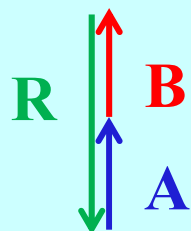
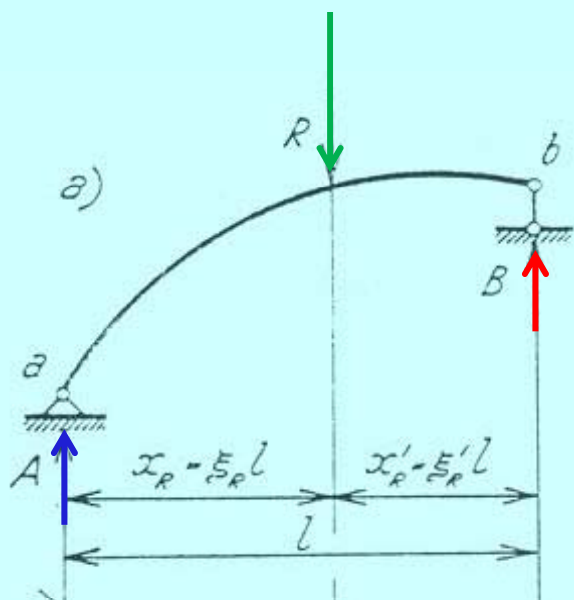


$$\frac{A}{\sin \alpha} = \frac{B}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \gamma}$$

$$\rightarrow A = R \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$$

$$\rightarrow B = R \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}$$

Kada je **silu R paralelnu sa reakcijom B** tada je i **reakcija A paralelna sa silom R** , odnosno B .



$$V_a = A$$

Izrazi za reakcije oslonaca dati su jednačinama:

$$M_b + A l = 0$$

$$M_b = -R \xi'_R l$$

$$A = R \xi'_R$$

$$M_a - B l = 0$$

$$M_a = R \xi_R l$$

$$B = R \xi_R$$

$$\text{kontrola } \Sigma Y \equiv 0$$

Na slici je prikazana ploča oslonjena u tačkama a i b i uklještena u tački c.

Reakcije **A** i **B** određujemo iz uslova da su **algebarski zbrovi horizontalnih i vertikalnih komponenti svih sila jednaki nuli**:

$$\sum X=0$$

$$\sum Y=0$$

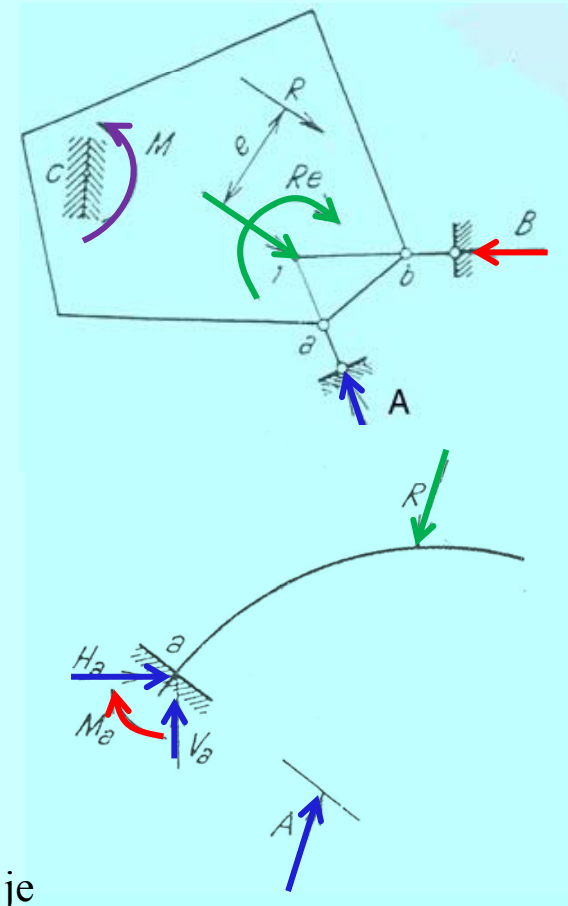
Reaktivni moment uklještenja dobijamo iz uslova da je *zbir momenata svih spoljašnjih sila u odnosu na tačku l, u kojoj se sijeku napadne linije sila A i B, jednak nuli*:

$$M = R e$$

Specijalan slučaj ovog načina oslanjanja je slučaj kada su oba oslonca u težištu uklještenog presjeka, tj ploča je nepokretno ukještena u tački a

Reakcija oslonca A mora da ima isti pravac i intenzitet a suprotan smjer u odnosu na silu **R**:

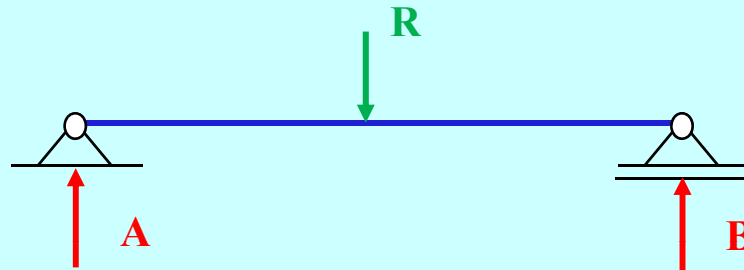
Reaktivni moment uklještenja dobijamo iz uslova da je *zbir momenata svih spoljašnjih sila u odnosu na tačku a jednak nuli*



$$M_a = -R r_a$$

Prosta greda

Prosta greda - nosač koji se sastoji od **jedne krute ploče** oslonjene na jedno nepokretno i jedno pokretno ležište čiji je pravac oslanjanja vertikalan



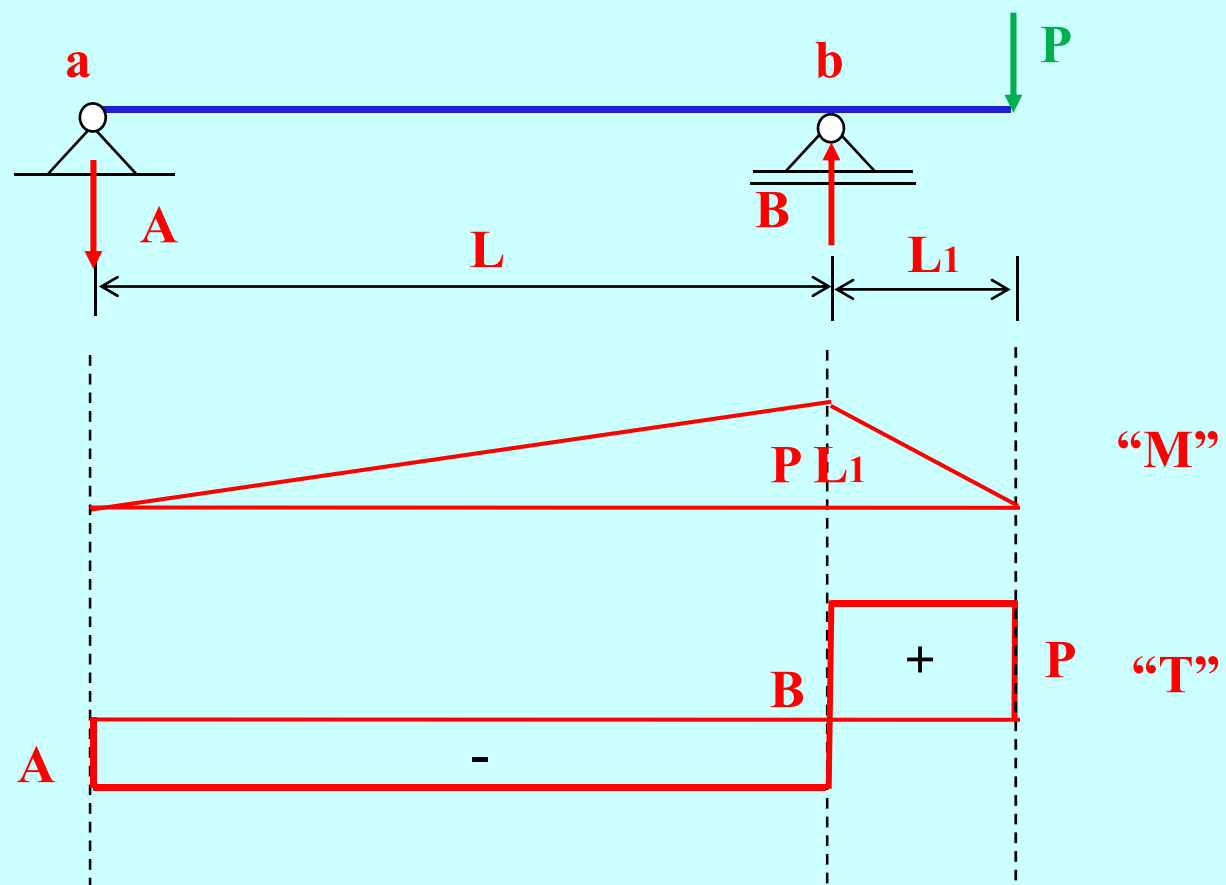
Osnovna karakteristika ovog nosača je da **pri vertikalnom opterećenju ima vertikalne reakcije** i da **se u presjecima javljaju transverzalne sile i momenti**

Analitički izrazi za reakcije dati su prethodno izvedenim izrazom:

$$A = -\frac{M_b}{l} \qquad B = \frac{M_a}{l} \qquad \text{kontrola } \Sigma Y \equiv 0$$

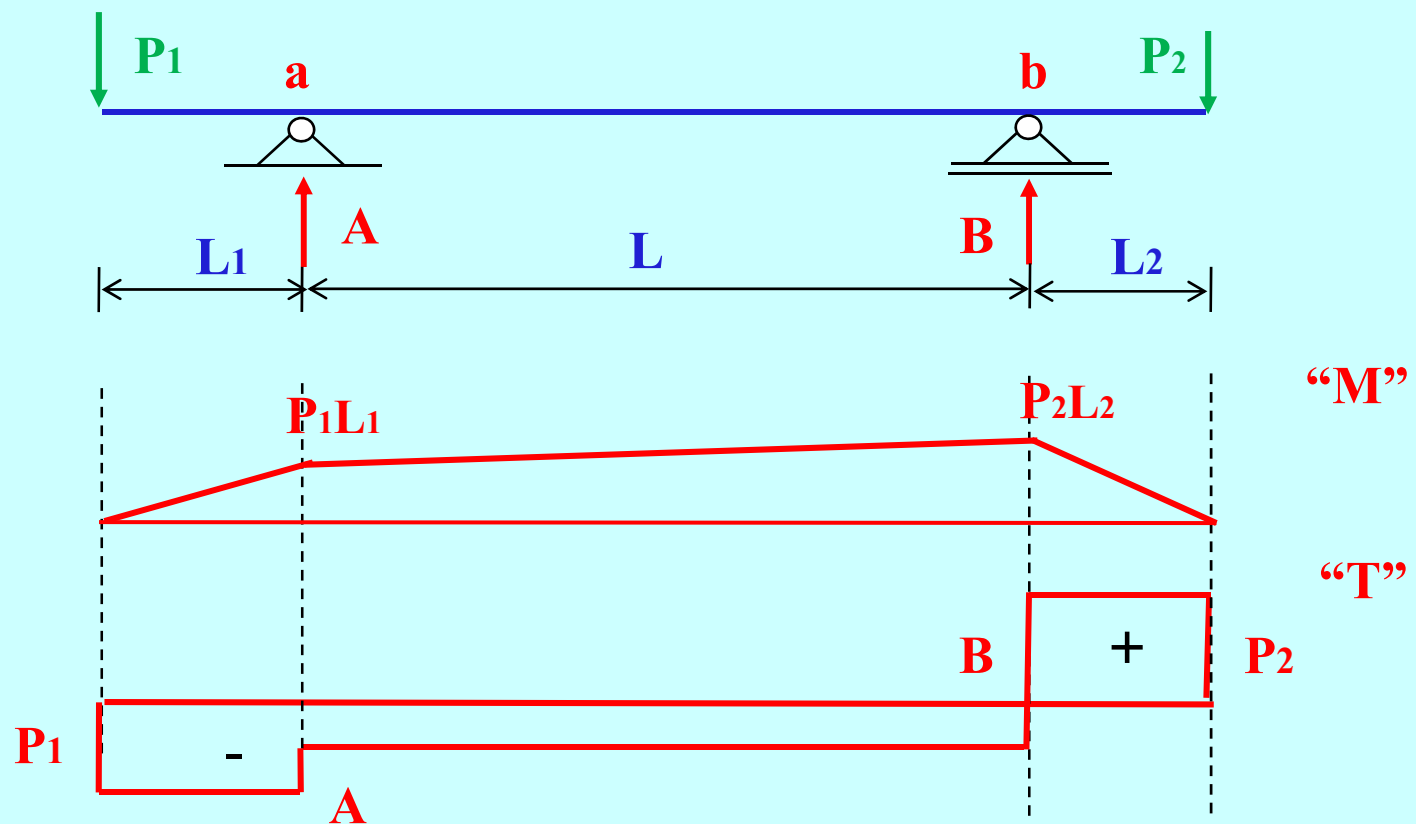
Sile u presjecima računaju prema algoritmima koji se daju na vježbama za stalno raspodijeljeno opterećenje, za koncentrisano opterećenje i proizvoljno raspodijeljeno opterećenje.

Greda sa jednim prepustom

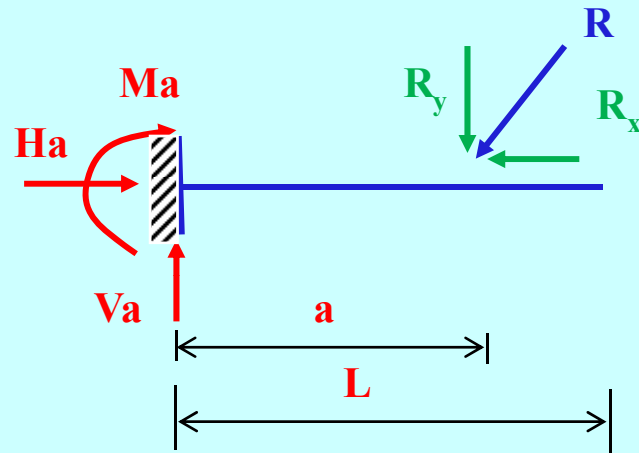


Greda sa dva prepusta

$$P_1 L_1 < P_2 L_2$$



Konzola



Uslovi ravnoteže:

$$\Sigma M=0 \Rightarrow M_a = -R_y a$$

$$\Sigma X=0 \Rightarrow H_a = R_x$$

$$\Sigma Y=0 \Rightarrow V_a = R_y$$

NOSAČ KOJI SE SASTOJI OD DVIJE KINEMATIČKI KRUTE PLOČE

Da bi nosači sa dvije kinematički krute ploče koje su zglobno vezane bili statički određeni moraju da zadovolje uslov da je:

$$2z_z + z_o + z_u = 3z_p$$

$$z_p=2 \quad z_z=1$$

$$z_o+z_u=4$$

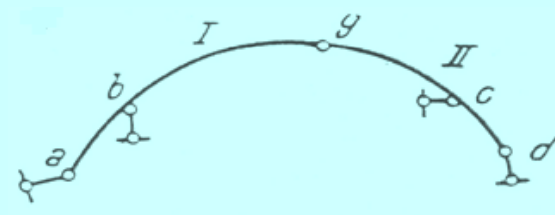
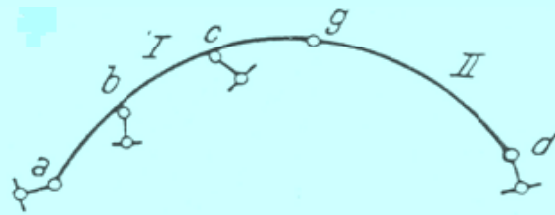
Mogu se napisati sljedeće kombinacije:

$$z_o+z_u=4+0$$

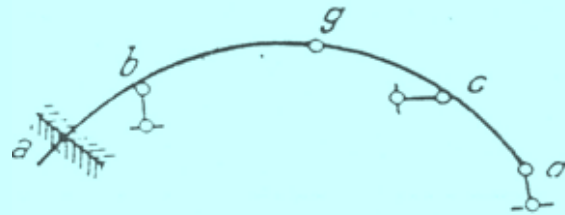
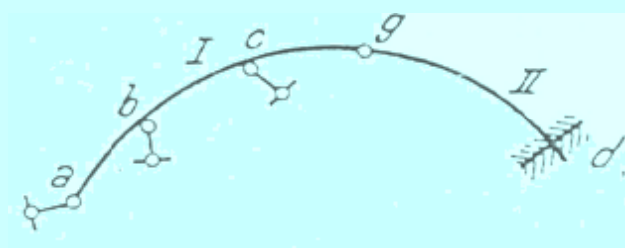
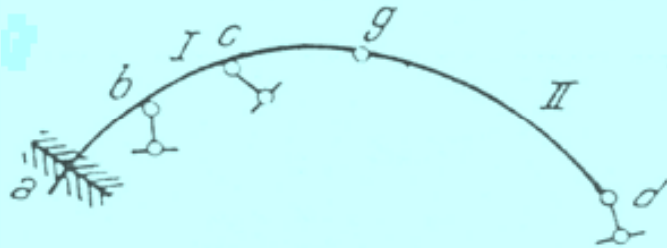
$$z_o+z_u=3+1$$

$$z_o+z_u=2+2$$

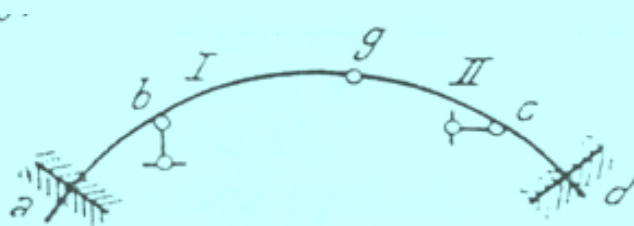
$$z_o + z_u = 4 + 0$$



$$z_o + z_u = 3 + 1$$

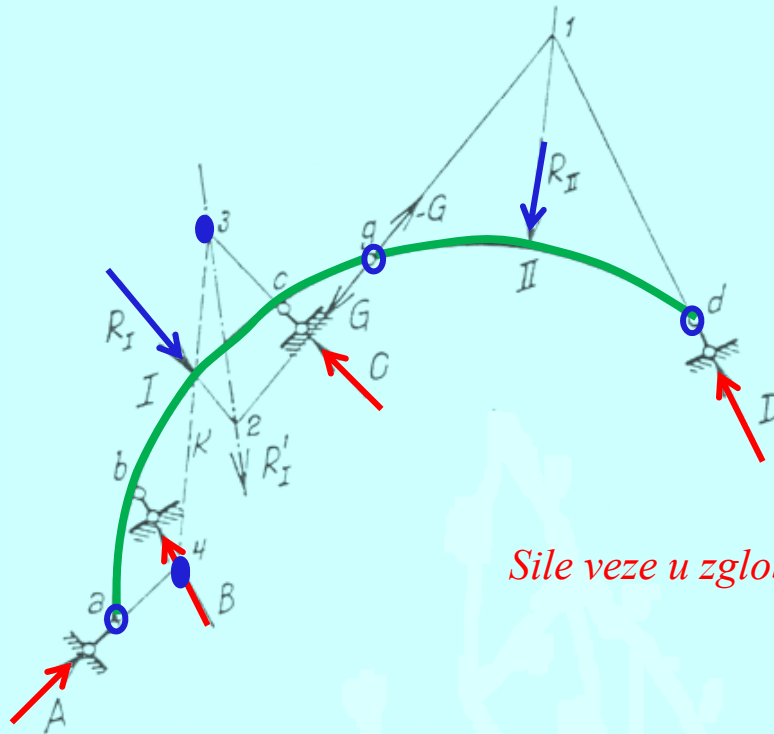


$$z_o + z_u = 2 + 2$$



Proračun reakcija oslonaca, momenata uklještenja i sile u zglobu g zavise uglavnom od rasporeda spoljašnjih elemenata po pločama.

Kada na jednoj ploči imamo 3 spoljašnja elementa a na drugoj samo jedan onda se reakcije analitički sračunavaju iz sljedećih uslova:



$$\Sigma M_g^{II} = 0 \Rightarrow D$$

$$\Sigma M_4 = 0 \Rightarrow C$$

$$\Sigma M_a = 0 \Rightarrow B$$

$$\Sigma M_g^I = 0 \Rightarrow A$$

$$\text{kontrola } \Sigma M_d \equiv 0$$

$$\text{ili } \Sigma X \equiv 0 \text{ ili } \Sigma Y \equiv 0$$

$$\Sigma Y_{II} = 0 \quad \Sigma X_{II} = 0$$

$$\Rightarrow H_g, V_g$$

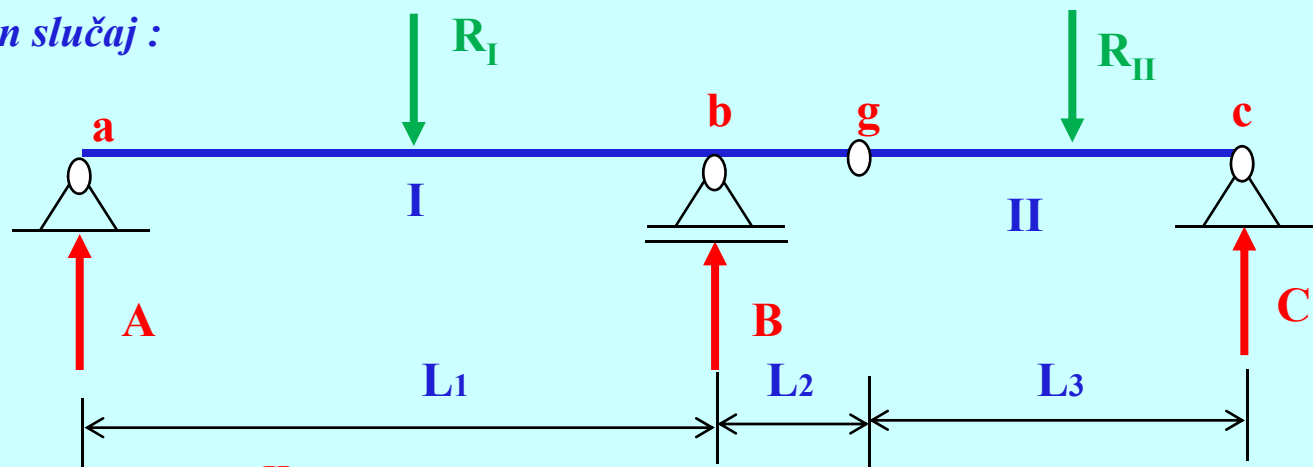
$$R_{II}, D \Rightarrow G \quad -G, R_I \Rightarrow R_I' \quad R_I' \text{ i } C \Rightarrow 3$$

$$A \text{ i } B \Rightarrow 4 \quad 3-4 \text{ kulmanov pravac}$$

Grafičko određivanje reakcija

Treba uočiti da kada je aktivno opterećenje na ploči I tada to opterećenje izaziva samo reakcije oslonaca A, B i C, a ne izaziva reakciju oslonca D ni silu u zglobu g. Reakcije svih oslonaca i silu u zglobu g izaziva samo ono opterećenje koje djeluje na ploču II.

Specijalan slučaj :

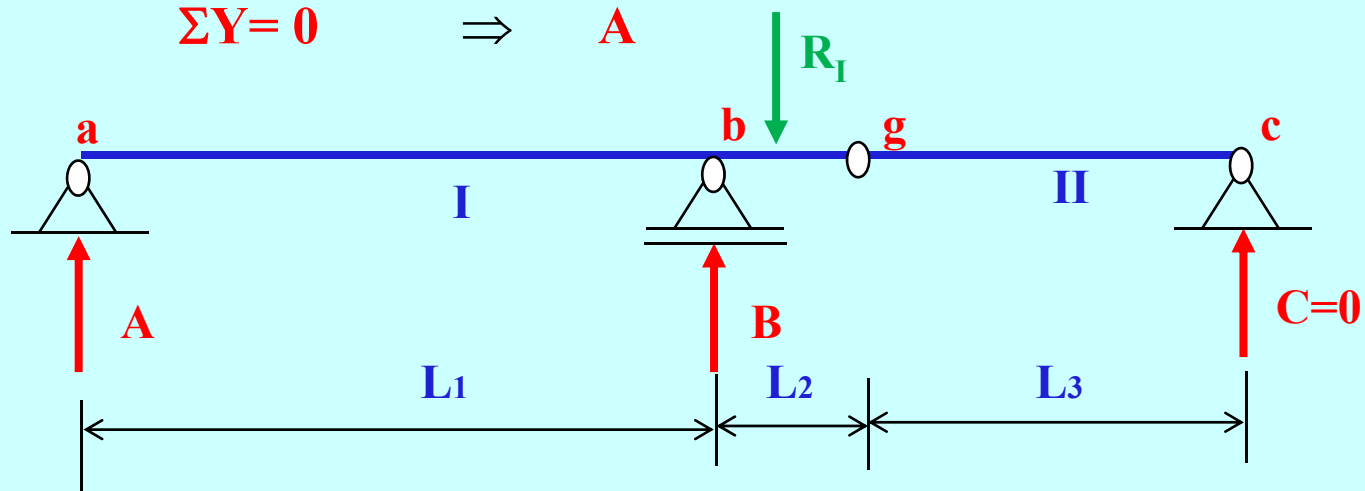


$$\Sigma M_g^{II} = 0 \Rightarrow C$$

$$\text{kontrola } \Sigma M_g^I \equiv 0$$

$$\Sigma M_a = 0 \Rightarrow B$$

$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow A$$



$$\Sigma M_g^{II} = 0 \Rightarrow C=0$$

$$\Sigma M_a = 0 \Rightarrow B$$

$$\Sigma Y = 0 \Rightarrow A$$

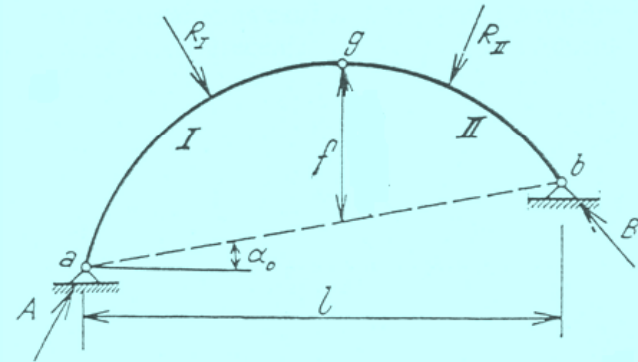
$$\text{kontrola } \Sigma M_c \equiv 0$$

NOSAČ SA TRI ZGLOBA

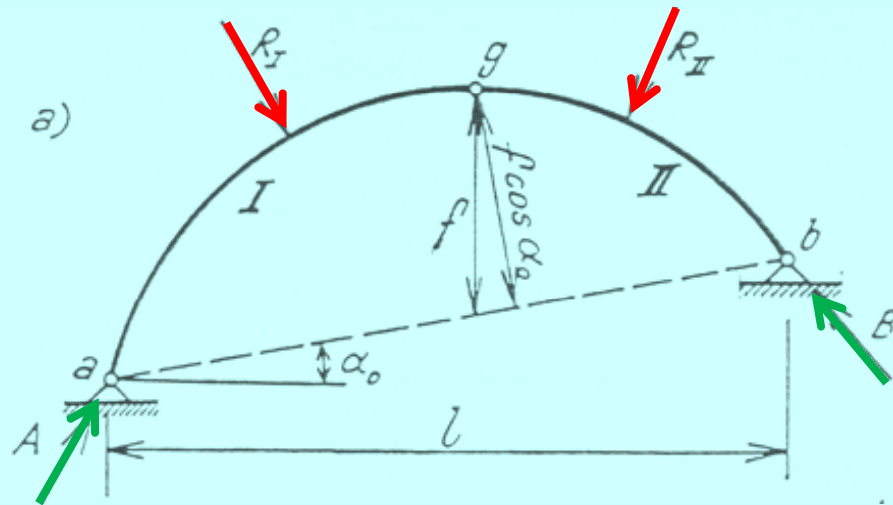
- Nosač sastoji od dvije ploče sa po dva spoljašnja elementa na svakoj ploči

$$z_o + z_u = 4 + 0$$

- **LUK NA TRI ZGLOBA - NOSAČ SA TRI ZGLOBA** je nosač koji se sastoji od dvije ploče zglavkasto vezane, kod kojeg je svaka od ploča oslonjena na dva nepoketna ležišta prikazan

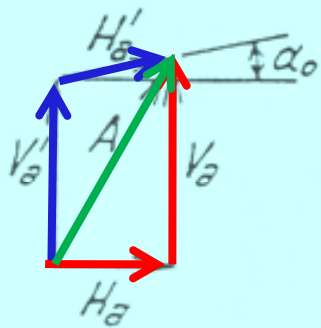


- *Prikazani postupak određivanja reakcija ne može se primijeniti*
- *U uslovima ravnoteže svake ploče osim reakcija dva spoljašnja elementa ulaze i dvije komponente sile veze zgloba g, ukupno šest nepoznatih $2+2+2=6$*
- Sistem jednačina sa nepoznatim silama se rješava **sukcesivnim rješavanjem jednačina - uslova ravnoteže prvo jedne pa druge ploče**
- *Pogodnim izborom nepoznatih i ispunjavanjem uslova ravnoteže u određenom obliku i poretku, nepoznate i u ovom slučaju mogu da se odrede bez određivanja komponenti sila u zglobu*



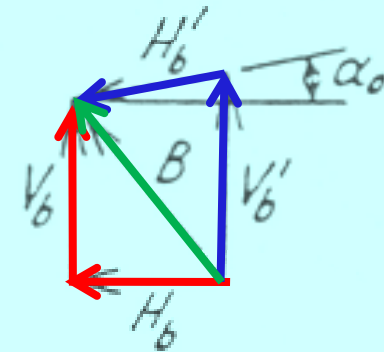
- Rezultante spoljašnjeg opterećenja su za ploču I R_I , a za ploču II R_{II}
- A i B su reakcije oslonaca u tačkama a i b obelježavamo sa
- Komponente reakcija pri razlaganju na horizontalan i vertikalni pravac su V_a, H_a i V_b, H_b
- Komponente reakcija pri razlaganju na vertikalni pravac i pravac a-b su V'_a, H'_a i V'_b, H'_b
- Pravac oslonačkih zglobova a-b sa horizontalom zaklapa ugao α_0
- Odstojanje tačke g od prave a-b u vertikalnom pravcu označavamo sa f

Usvajanjem komponenti reakcija kao na slici, **reakcije se mogu sračunati bez računanja sile u zglobu g:**



$$H_a = H'_a \cos \alpha_0$$

$$V_a = V'_a + H'_a \sin \alpha_0 = V'_a + H_a \tan \alpha_0$$

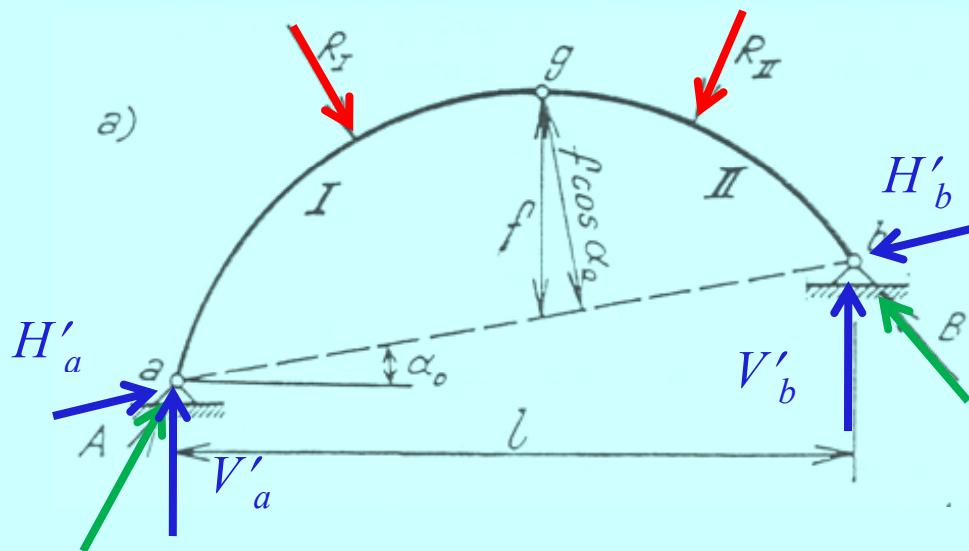


$$H_b = H'_b \cos \alpha_0$$

$$V_b = V'_b - H'_b \sin \alpha_0 = V'_b - H_b \tan \alpha_0$$

Sile V'_a i V'_b određujemo iz uslova o nultoj vrijednosti algebarskih zbirova momenata svih sila koje djeluju na ploče I i II u odnosu na tačke a i b.

Usvojena je pozitivna orijentacija momenata u smjeru kazaljke na satu



$$V'_a = -\frac{Mb}{L}$$

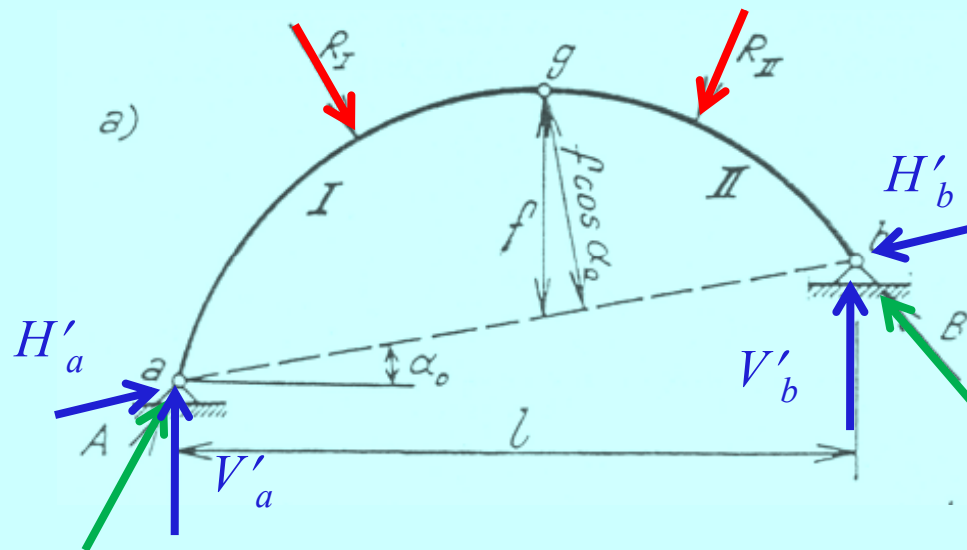
$$V'_b = \frac{Ma}{L}$$

Sile H'_a i H_a određujemo iz uslova o nultoj vrijednosti algebarskog zbira momenata svih sila ploče I u odnosu na zglob g

Sile H'_b i silu H_b određujemo iz uslova o nultoj vrijednosti algebarskog zbira momenata svih sila ploče II u odnosu na zglob g

M_{gII} - moment sila V'_a i R_{II} u odnosu na zglob g, pozitivan kada obrće u smjeru suprotnom smjeru kazaljke na satu

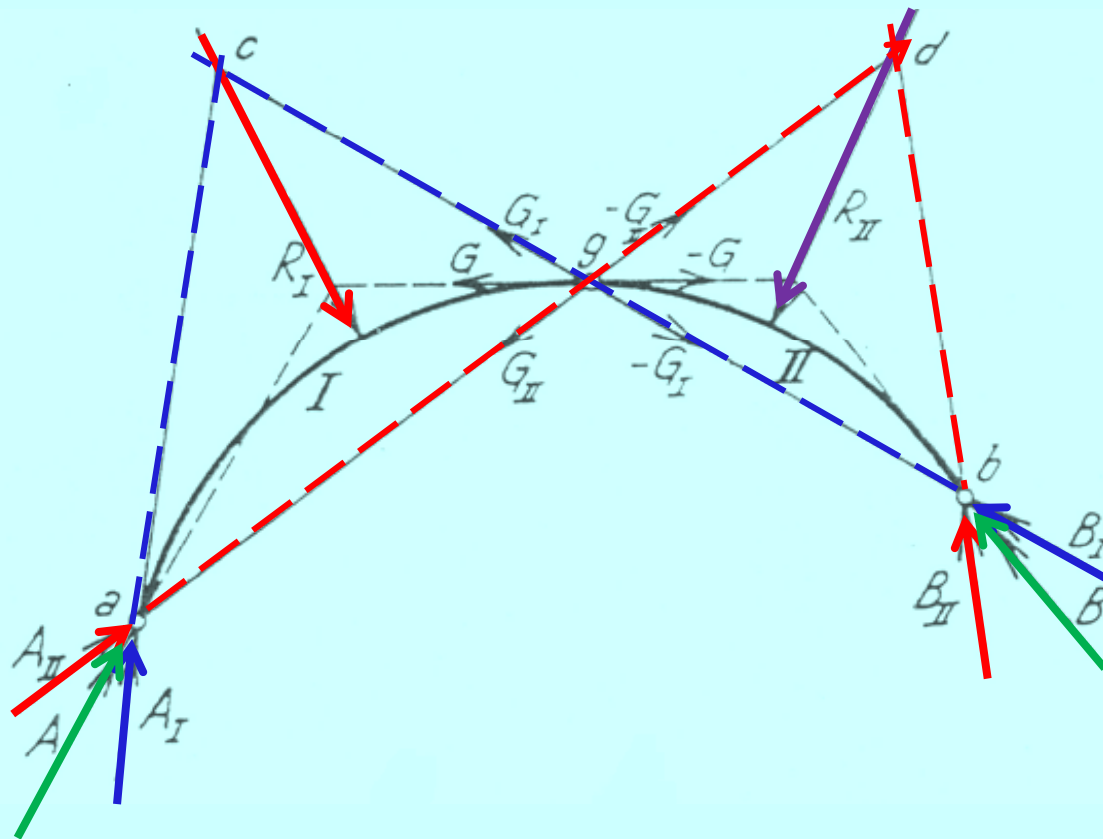
M_{gI} - obelježimo moment sila V'_a i R_I u odnosu na zglob g, pozitivan kada obrće u smjeru kazaljke na satu



$$H'_a \cos \alpha_o = H_a = \frac{M_{gI}}{f} \qquad H'_b \cos \alpha_o = H_b = \frac{M_{gII}}{f}$$

Kada se odrede **komponente reakcija oslonaca sile veze u zglobu g** se računaju iz **uslova o nultoj vrijednosti algebarskih zbiru vertikalnih i horizontalnih komponenti svih sila ploče I ili ploče II.**

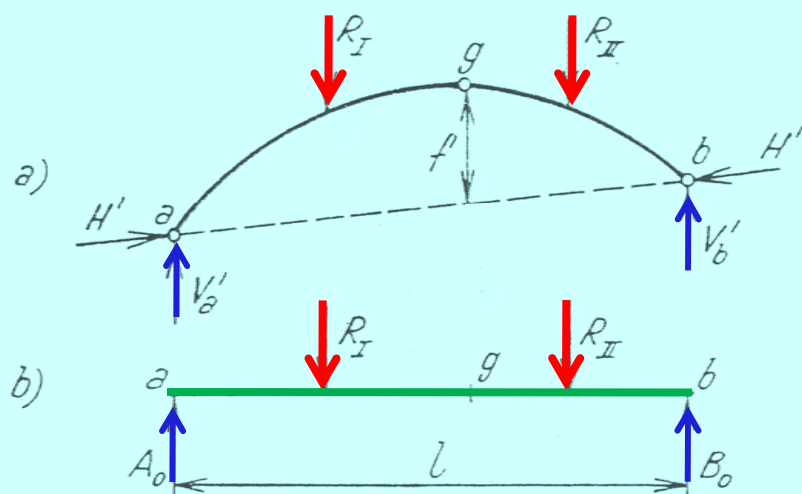
Zadatak može da se riješi **grafičkom konstrukcijom** prikazanom na slici nepoznate reakcije određujemo na osnovu **principa superpozicije sabiranjem sila usled opterećenja R_I i sila usljed opterećenja R_{II}**



Vektorskim sabiranjem A_I i A_{II} dobijamo reakciju A , a vektorskim sabiranjem B_I i B_{II} dobijamo reakciju B .

Sila G kojom ploča II djeluje na ploču I jednaka je rezultanti sila B i R_{II} , a sila $-G$, kojom ploča I djeluje na ploču II, jednaka je rezultanti sila A i R_I .

Kada je opterećenje vertikalno sile V'_a i V'_b jednake su reakcijama ekvivalentne proste grede, pa se određuju preko izraza:



$$V'_a = -\frac{M_b}{L} = A_o$$

$$V'_b = \frac{M_a}{L} = B_o$$

Sile H'_a i H'_b međusobom su jednake

$$H'_a = H'_b = H' , \quad H_a = H_b = H$$

$$H' = \frac{M_{go}}{f'}$$

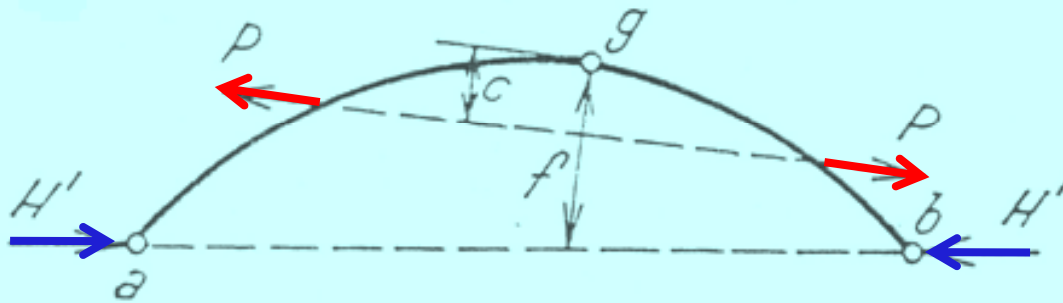
$$H' = \frac{M_{go}}{f \cos \alpha}$$

$$H' \cos \alpha = \frac{M_{go}}{f}$$

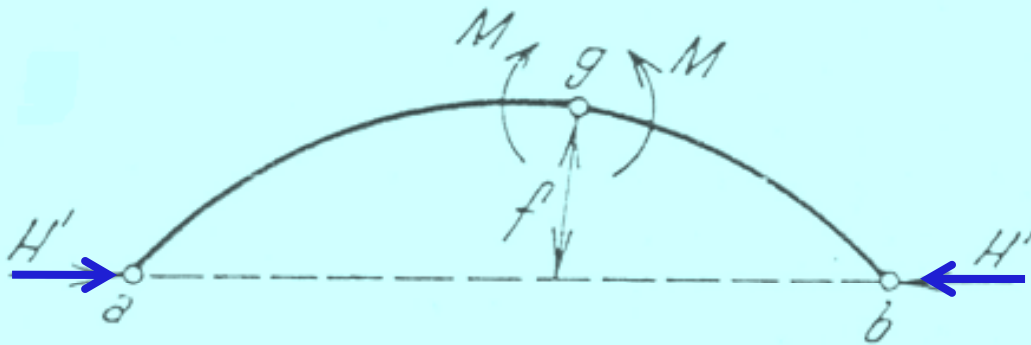
$$H = \frac{M_{go}}{f}$$

M_{go} moment savijanja ekvivalentne proste grede u cvoru g

Kada je nosač opterećen ravnotežnim opterećenjem kao na slici, sile V'_a i V'_b jednake su nuli, a sile $H'_a = H'_b = H'$ određujemo iz uslova o nultoj vrijednosti zbira momenata sila jedne od ploča u odnosu na zglob g :



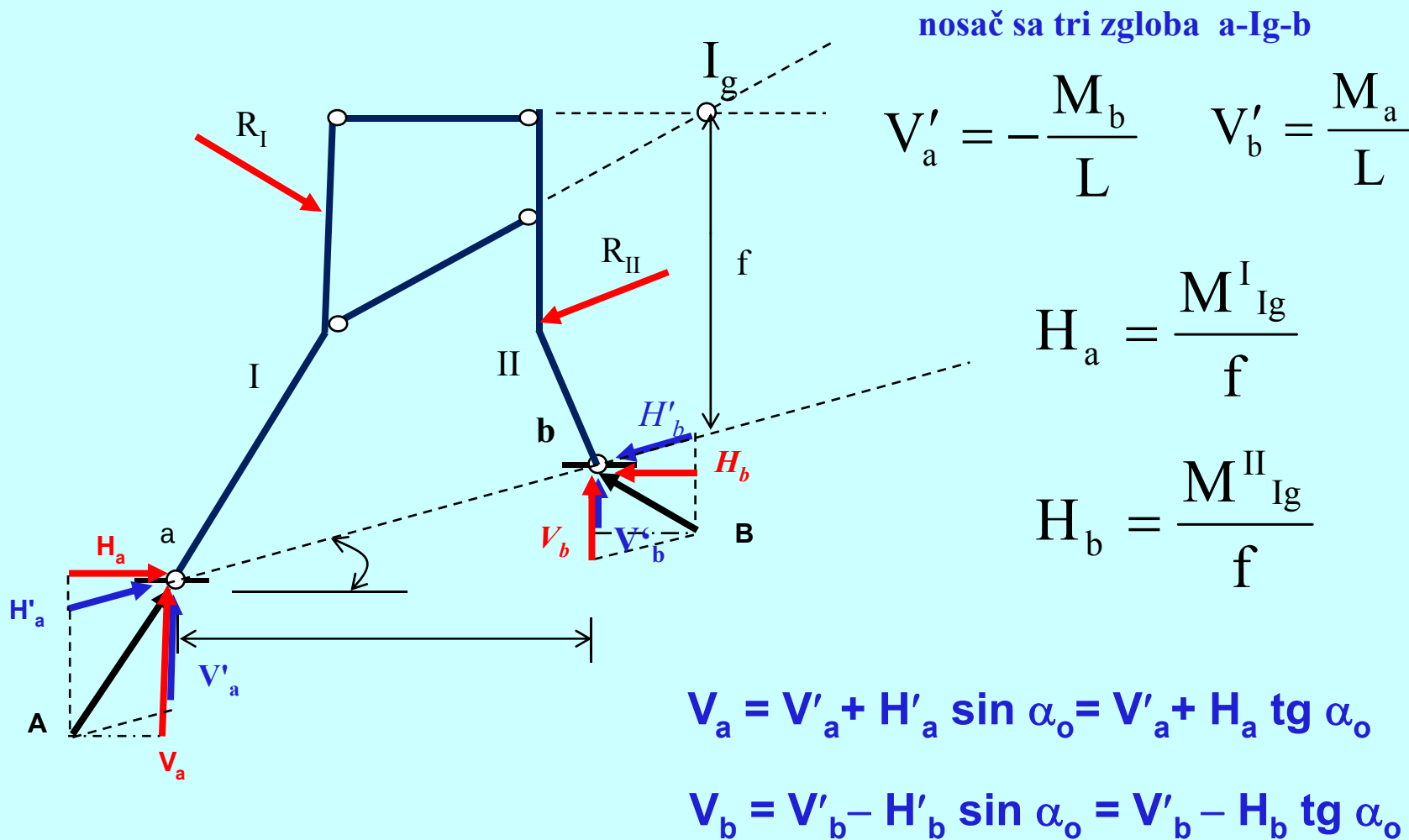
$$H' \cos \alpha_o = H = P \frac{c}{f}$$



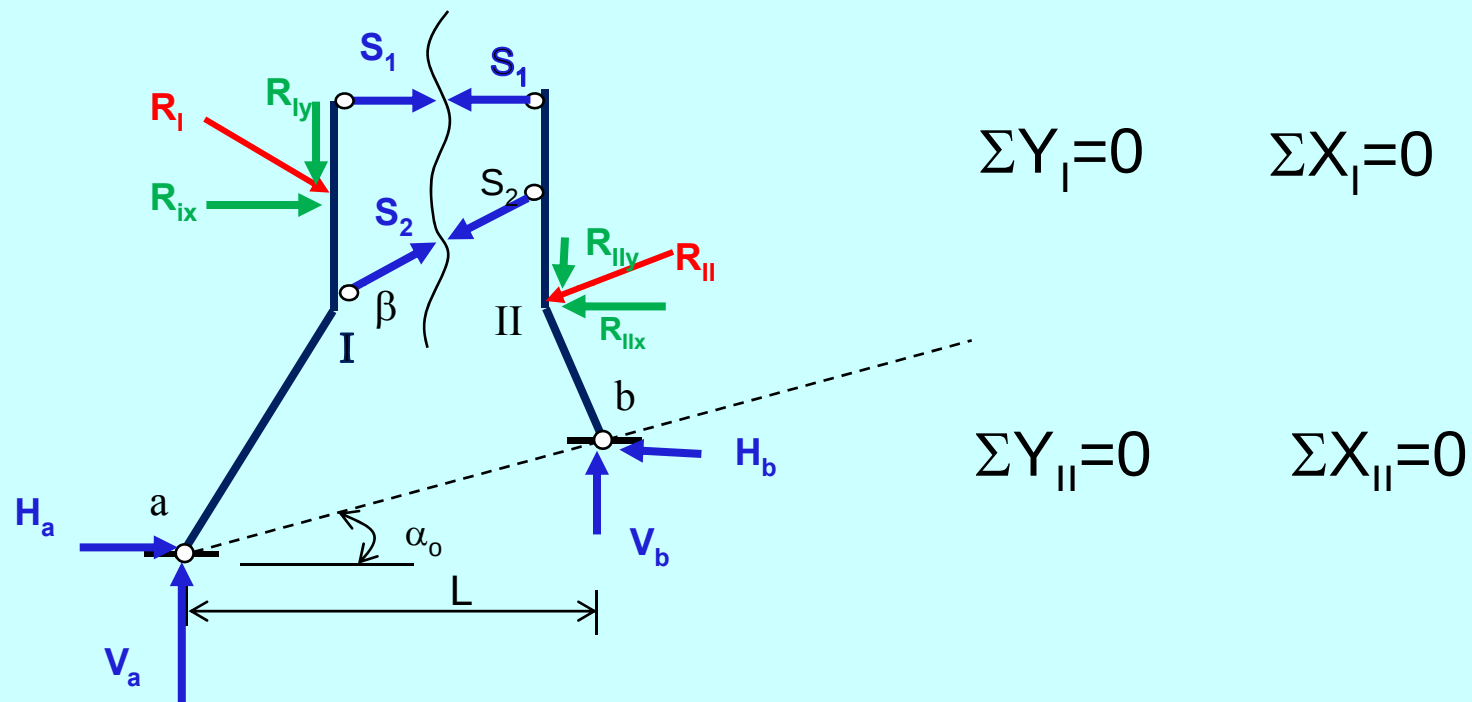
$$H' \cos \alpha_o = H = \frac{M}{f}$$

Nosač sa tri zgloba od kojih je jedan imaginaran

Kada su dvije ploče oslonjene **na dva nepokretna ležišta i vezane sa dva prosta štapa** tada se prikazani postupak određivanja reakcija oslonaca može primijeniti na sljedeći način:



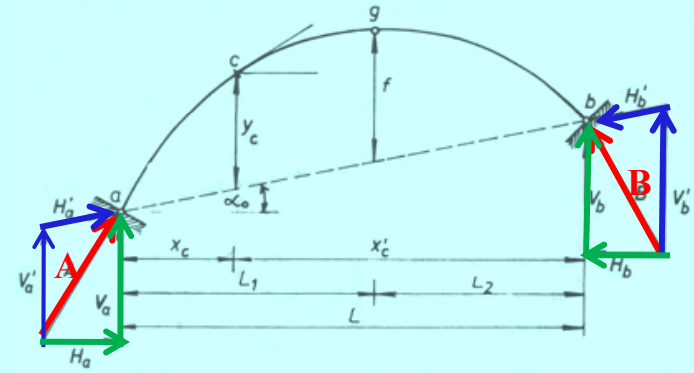
Sile u prostim štapovima određujemo iz ravnoteže ploča I ili II, uz prethodno poznate komponente reakcija oslonaca:



Reakcije i sile u presjecima nosača sa tri zgloba usljed stalnog opterećenja

Nosač koji se sastoji od **dvije međusobno zglavkasto vezane ploče** koje su oslonjene na **dva nepokretna ležišta** naziva se **luk na tri zgloba**

- **Pravac oslonačkih zglobova a-b** nazivamo **pravac lučne sile**, koji sa horizontalom zaklapa ugao α_0
- Raspon luka je L , a horizontalna rastojanja od zgloba g do oslonaca a i od g do oslonca b su L_1 i L_2



- Oblik ose nosača na tri zgloba je obično **lučni** i određen je ordinatama y koja predstavljaju vertikalna odstojanja tačaka ose luka od pravca oslonačkih zglobova
- Ugao nagiba tangente na osu luka u proizvoljnoj tački ose obelježen je sa α_c

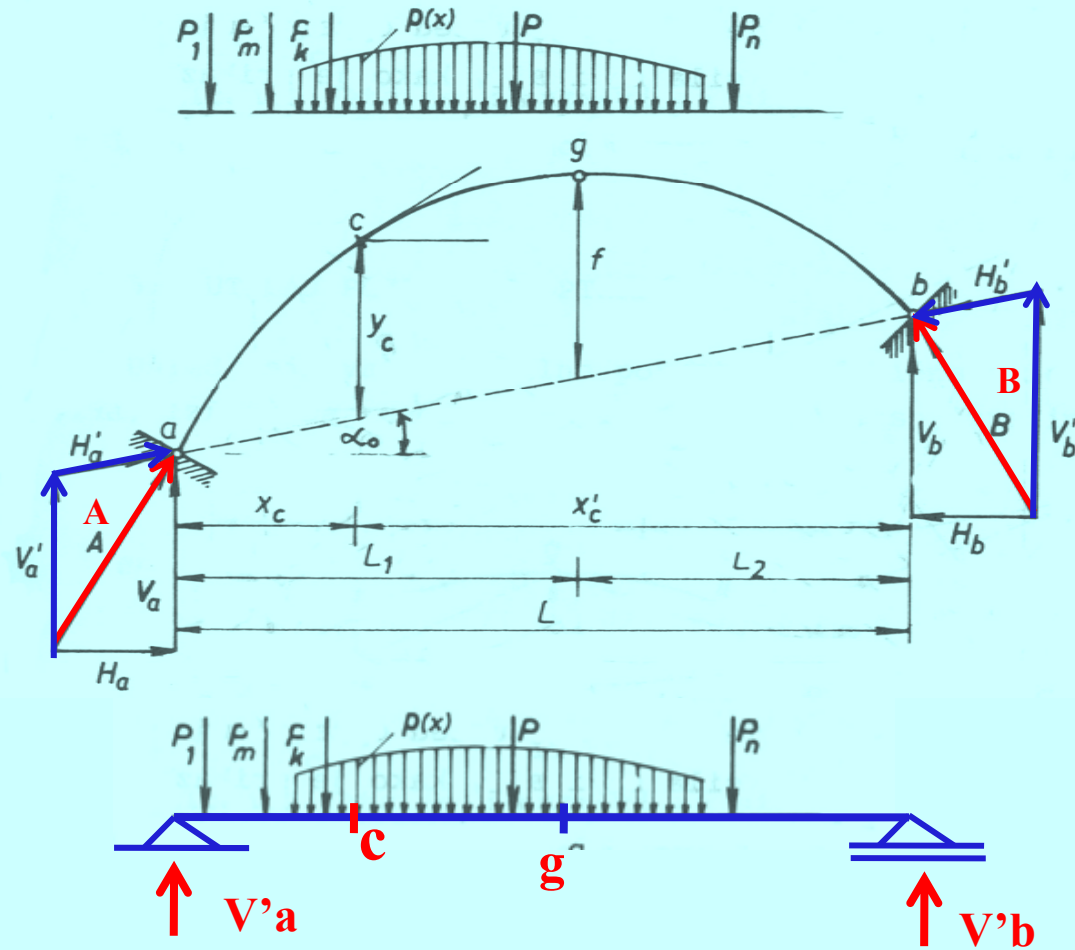
Reakcije A i B razlažemo na pravce vertikala i pravac lučne sile:

V'_a, V'_b – ako je opterećenje vertikalno ove sile predstavljaju sile ekvivalentne proste grede

H'_a, H'_b – lučne sile

V_a, V_b – vertikalne komponente reakcija A i B

H_a, H_b – horizontalne komponente reakcija A i B (horizontalni potisci luka)



$$V'_a = \frac{1}{L} \left[\sum_{m=1}^n P_m x'_m + \int_0^L p(x) x' dx \right] \quad V'_b = \frac{1}{L} \left[\sum_{m=1}^n P_m x_m + \int_0^L p(x) x dx \right]$$

Horizontalni potisci računaju se primjenom obrazaca:

$$H_a = \frac{M_{gI}}{f} \quad H_b = \frac{M_{gII}}{f}$$

Ako je luk opterećen kao na slici tada je: $H_a = H_b = H = M_{go} / f \quad H'_a = H'_b = H'$

T_{co} - tranverzalna sila ekvivalentne proste grede je **suma vertikalnih sila lijevo ili desno od posmatranog presjeka** (V'_a i opterećenje lijevo od posmatranog presjeka, odnosno, V'_b i opterećenje desno od posmatranog presjeka)

M_{co} – *moment savijanja u presjeku c ekvivalentne proste grede* (suma momenata sila V'_a i opterećenje lijevo od posmatranog presjeka u odnosu na težište posmatranog presjeka, odnosno, sila V'_b i opterećenje desno od posmatranog presjeka u odnosu na težište posmatranog presjeka)

Izrazi za sile u presjeku c mogu da se napišu u sljedećem obliku:

$$T_c = T_{co} \cos \alpha_c - H' \sin(\alpha_c - \alpha_o) = T_{co} \cos \alpha_c - H \frac{\sin(\alpha_c - \alpha_o)}{\cos \alpha_o}$$

$$N_c = -T_{co} \sin \alpha_c - H' \cos(\alpha_c - \alpha_o) = -T_{co} \sin \alpha_c - H \frac{\cos(\alpha_c - \alpha_o)}{\cos \alpha_o}$$

$$M_c = M_{co} - H'y_c \cos \alpha_o = M_{co} - Hy_c$$

$$M_c = M_{co} - Hy_c$$

Oblik ose lučnih nosača

Zadatak: za zadati raspon L , strijelu luka f i eksploataciono opterećenje potrebno je da odredimo oblik (geometriju) ose luka na tri zgloba-

racionalni oblik ose luka tako da bude obezbeđena jednakost ekstremnih vrijednosti napona u gornjim i donjim ivicama poprečnog presjeka.

Kada je zadato stalno podijeljeno opterećenje, rezultatni poligon sila prelazi u krivu koja se naziva potporna linija.

Kada je osa luka potporna linija u svim tačkama luka pojavljuje se samo normalna sila pa su naponi u svim tačkama isti

Oblik potporne linije određuje se:

- grafički
- analitički

Iz uslova da su momenti u odnosu na težišta poprečnih presjeka usljed zadatog opterećenja jednaki nuli:

$$M_o - Hy = 0 \qquad y = \frac{M_o}{H}$$

ovim izrazom određujemo ordinate ose luka

S obzirom da je moment u g jednak nuli slijedi:

$$M_g = M_{go} - Hf = 0$$

$$H = \frac{M_{go}}{f}$$

Kada se ova relacija uvrsti u prethodnu dobija se:

$$y = f \frac{M_o}{M_{go}}$$

Zaključujemo da: ***racionalni oblik ose* luka na tri zgloba je sličan obliku dijagrama savijanja ekvivalentne proste grede opterećene datim opterećenjem.**

Oblik ose luka *ne* zavisi od intenziteta opterećenja

Oblik ose luka *zavisi* od zakona po kojem se to opterećenje mijenja duž nosača

Kada je opterećenje **jednako podijeljeno** momente savijanja proste grede određujemo:

$$M_o = q \frac{L^2}{2} \omega_r \quad \omega_r = \xi - \xi^2$$

Ako je zglobov g na sredini raspona tada je:

$$M_{go} = q \frac{L^2}{8}$$

*Racionalni oblik ose luka je **kvadratna parabola**:*

$$y = 4f\omega_R$$

Nosači koji se sastoje od lanca ploča

Određivanje reakcija

Za sistem ploča koje su vezane zglobovima tako da se uklanjanjem bilo kog zgloba sistem raspada na dva nezavisna dijela, kažemo da su vezane u lanac, odnosno predstavljaju lanac ploča.

Ako u sistemu ploča, lanac ploča sadrži z_p ploča tada je broj zglobova z_z za jedan manji od broja ploča:

$$z_z = z_p - 1$$

U svakom zglobu postoje 2 komponente reakcije zglobne veze pa je broj nepoznatih

$$z_o + z_u + 2(z_p - 1)$$

Za jednu ploču u ravni mogu se napisati 3 uslova ravnoteže što znači da u sistemu ploča možemo napisati $3z_p$ uslova ravnoteže.

Ukoliko je lanac ploča statički određen tada važi da je:

$$z_o + z_u + 2(z_p - 1) = 3 z_p$$

Slijedi broj oslonaca i uklještenja za statički određen lanac ploča:

$$z_o + z_u = z_p + 2$$

Uslovi ravnoteže: ▪ **3 uslova ravnoteže** nosača kao cjeline kao cjeline

▪ **$z_z = z_p - 1$** uslova o nultim vrijednostima zbira momenata spoljašnjih sila koje djeluju sa jedne ili druge strane zgloba a u odnosu na taj zglob

Reakcije se mogu odrediti i tako što se u isto vrijeme određuju i **sile veze u zglobovima lanca.**

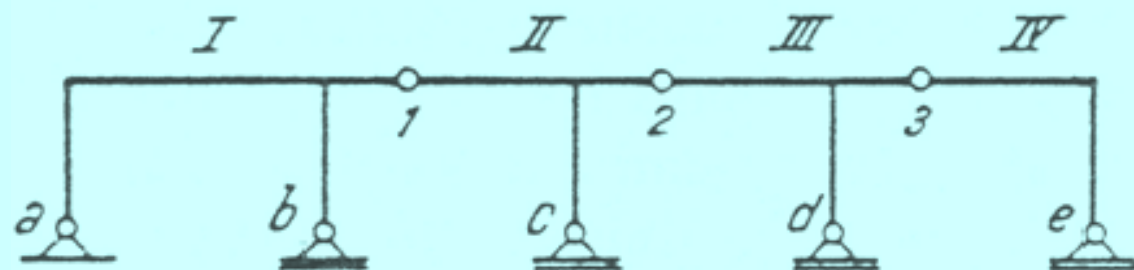
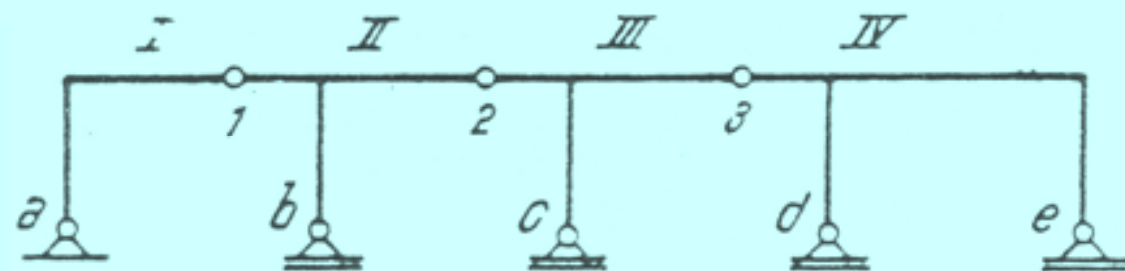
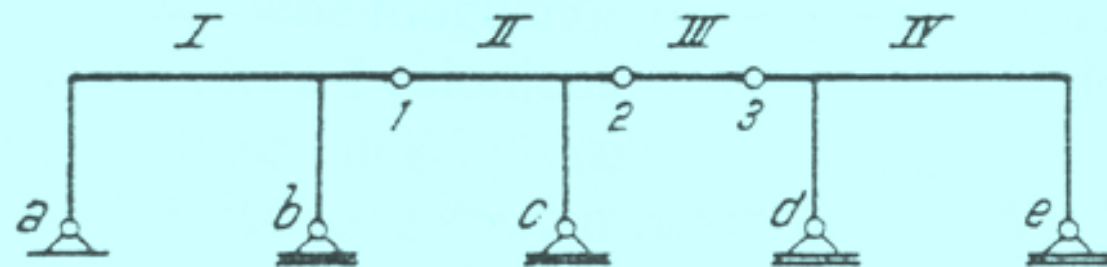
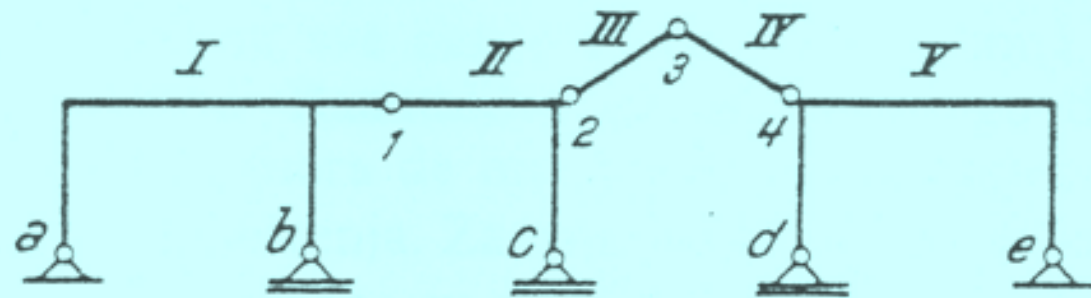
Izbor načina određivanja reakcija **zavisi od rasporeda:**

- **oslonaca**
- **uklještenja**
- **zglobova nosača**

Kako je broj oslonaca veći od broja ploča za 2 tada **postoje dvije mogućnosti rasporeda oslonaca:**

- ❑ **Ili je jedna ploča oslonjena na tri oslonca, a sve ostale ploče na po jedan oslonac**
- ❑ **ili dvije ploče sadrže po dva oslonca, a sve ostale ploče imaju po jedan oslonac**

Oslonci mogu biti zamijenjeni uklještenjima ali tada **na jednoj ploči mora biti najmanje 2 oslonca, a da na jednoj ploči ne budu dva uklještenja.**



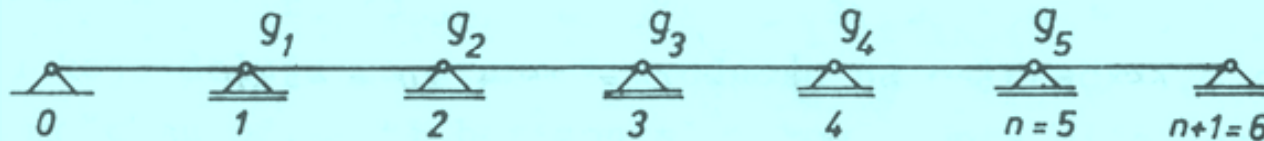
Uticaj stalnog opterećenja na gredu sa zglobovima

Greda oslonjena na tri oslonca je statički određena

Kada je greda oslonjena na $n+2$ oslonca onda je ona n puta statički neodređena.

Kada se ovakvoj gredi doda n zglobova ona je statički određena.

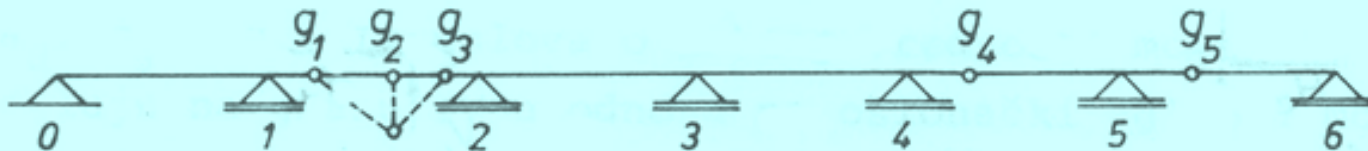
Ako postavimo zglobove iznad oslonaca dobijamo $n+1$ prostu gredu:



*Ekonomičnije rješenje se dobija kada se **zglobovi postave između oslonaca**, jer se na taj način dobija sistem prostih greda i greda sa prepustima*

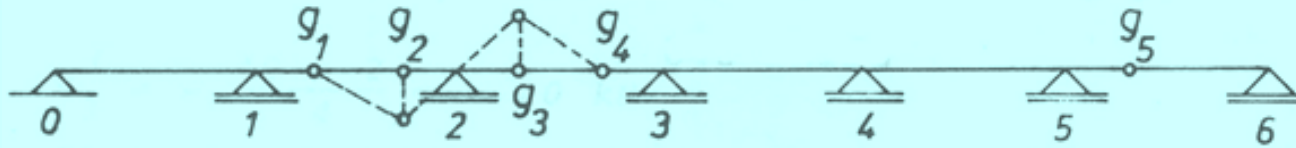
Pri raspoređivanju zglobova mora se voditi računa o stabilnosti sistema.

□ u jednom polju ne smiju biti tri zgloba



u kritičnoj konfiguraciji od g_1 do g_3 , dok je dio sistema od 2 do 4 statički neodređen

□ u dva susjedna polja ne smiju biti po dva zgloba

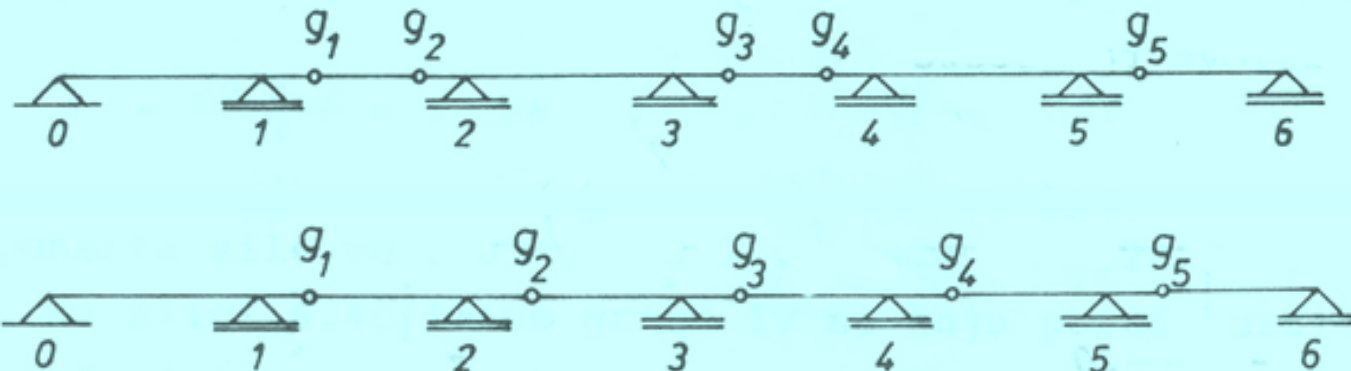


Sistem dat na slici je na dijelu od g_1 do g_4 labilan, dok je sistem od 3 do 5 statički neodređen.

DEKOMPOZICIJA - Rastavljanjem grede sa n zglobova i $n+1$ polja na djelove dobijamo $n+1$ ploča

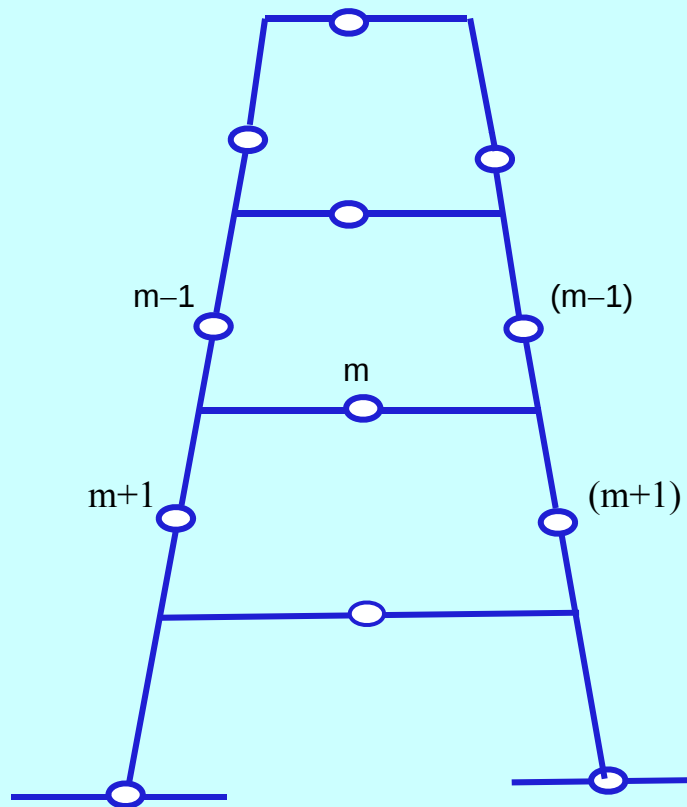
USLOVI RAVNOTEŽE: za ovaj sistem ploča možemo napisati $3(n+1)$ uslova ravnoteže

STATIČKE NEPOZNATE: $n+3$ nepoznatih reakcija kao i $2n$ komponenti sila veze u zglobovima, što ukupno čini $n+3+2n=3n+3$ nepoznatih



Statički određeni okvirni nosači

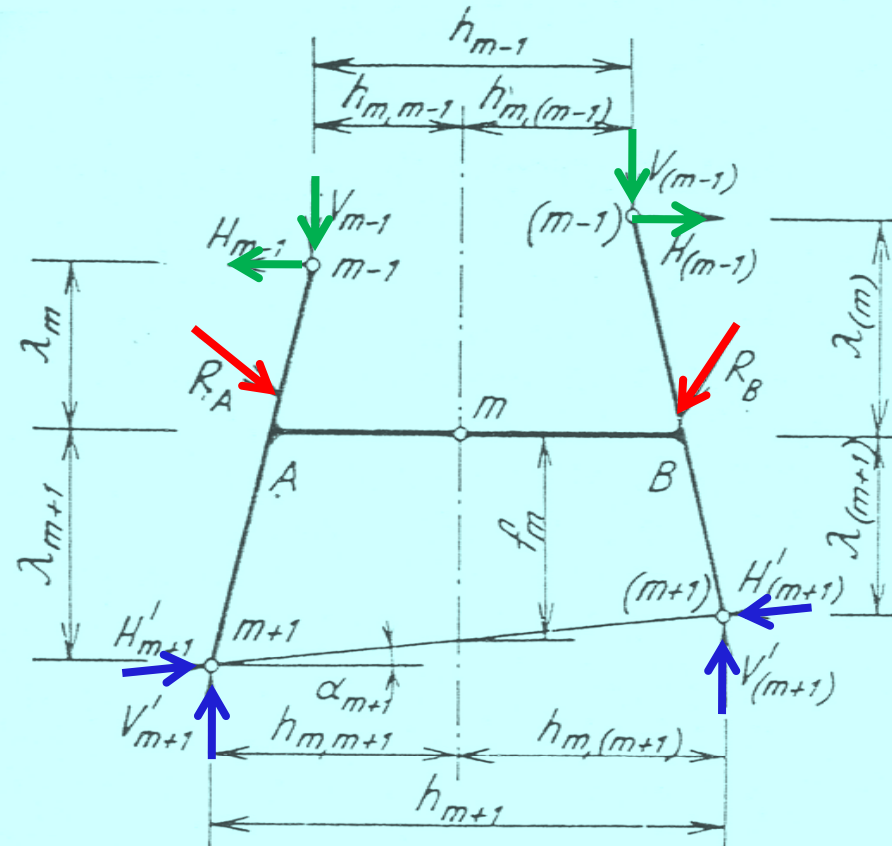
Razmatraćemo **višespratne okvirne nosače** koji se dobijaju **sukcesivnim dodavanjem para zglavkasto vezanih ploča**.



Ploče A i B predstavljaju jedan par ploča izdvojen iz takvog lanca.

Sile V_{m-1} , $V_{(m-1)}$, H_{m-1} , $H_{(m-1)}$ su poznate sile kojim prethodno uklonjen par ploča djeluje na ploče A i B.

Na ploče A i B djeluje i aktivno opterećenje čije su rezultante R_A i R_B .



Iz uslova sume momenata sile koje napadaju ove dvije ploče a u odnosu na tačke (m+1) i m+1 dobijamo nepoznate sile veze V'_{m+1} , $V'_{(m+1)}$ u zglobovima m+1 i (m+1):

$$V'_{m+1} = -\frac{M_{(m+1)}}{h_{m+1}}$$

$$V'_{(m+1)} = \frac{M_{m+1}}{h_{m+1}}$$

Veze sila H'_{m+1} i $H'_{(m+1)}$ i horizontalnih komponenti:

$$H_{m+1} = H'_{m+1} \cos \alpha_{m+1} \quad H_{(m+1)} = H'_{(m+1)} \cos \alpha_{m+1}$$

Iz uslova da su **momenti u odnosu na zglob m** svih sila koje djeluju na ploči A, odnosno, ploči B jednaki nuli, dobija se:

$$H_{m+1} = \frac{1}{f_m} (M_{mA} + V'_{m+1} h_{m,m+1} - V_{m-1} h_{m,m-1} - H_{m-1} \lambda_m)$$

$$H_{(m+1)} = \frac{1}{f_m} (M_{mB} + V'_{(m+1)} h_{m,(m+1)} - V_{(m-1)} h_{m,(m-1)} - H_{(m-1)} \lambda_{(m)})$$

M_{mA} je moment savijanja sile R_A u odnosu na zglob, pozitivan u smjeru kazaljke na satu.

M_{mB} je moment savijanja sile R_B u odnosu na zglob m, pozitivan u smjeru suprotno smjeru kazaljke na satu.

$$V_{m+1} = V'_{m+1} + H_{m+1} \operatorname{tg} \alpha_{m+1}$$

Sljedeći korak u algoritmu određivanja reakcija je:

$$V_{(m+1)} = V'_{(m+1)} - H_{(m+1)} \operatorname{tg} \alpha_{m+1}$$

NOSAČI KOJI SE SASTOJE OD LANCA PLOČA I NIZA PROSTIH ŠTAPOVA

Ako se nosač sastoji od :

z_p ploča

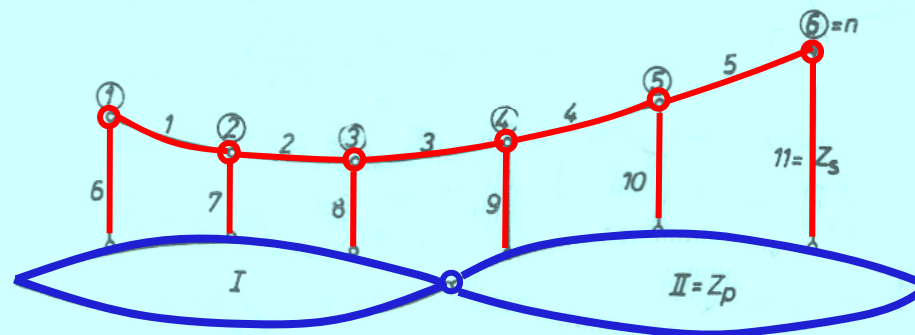
$z_p + 2$ stepeni slobode pomjeranja
(vezani sa $z_p - 1$ zglobova, prethodno predavanje)

z_s prostih štapova

povezani u n čvorova tada je broj stepeni slobode pomjeranja $2n$ umanjen za broj štapova

da bi takav nosač bio kinematički prosto stabilan broj oslonaca i uklještenja treba da bude:

$$z_o + z_u + z_s = z_p + 2 + 2n$$



Za određivanje reakcija oslonaca i sila u štapovima na raspolaganju nam stoje (uslovi ravnoteže):

$z_p + 2$ uslova ravnoteže lanca ploča

$2n$ uslova ravnoteže čvorova

Nepoznate u uslovima ravnoteže čvorova:

z_s sila u štapovima

z''_o nepoznatih reakcija u oslonačkim tačkama koje ne pripadaju lancu ploča

Zbir ovih nepoznatih je redovno **veći od $2n$** to se sve statičke veličine mogu izraziti u funkciji $(z_s + z''_o) - 2n$ *pogodno izabranih statičkih veličina*.

Nepoznate u uslovima ravnoteže lanca ploča:

z'_o nepoznatih reakcija u oslonačkim tačkama koje pripadaju lancu ploča

z_u momenata uklještenja lanca ploča

Za statički određen nosač važi da je:

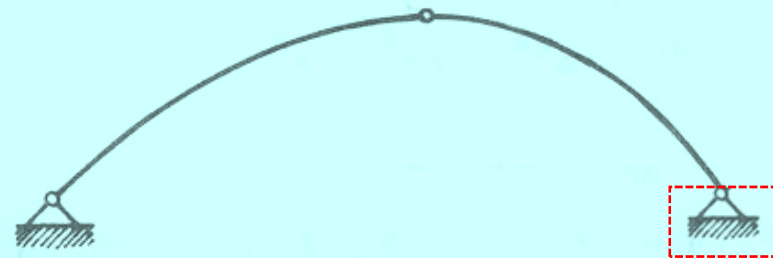
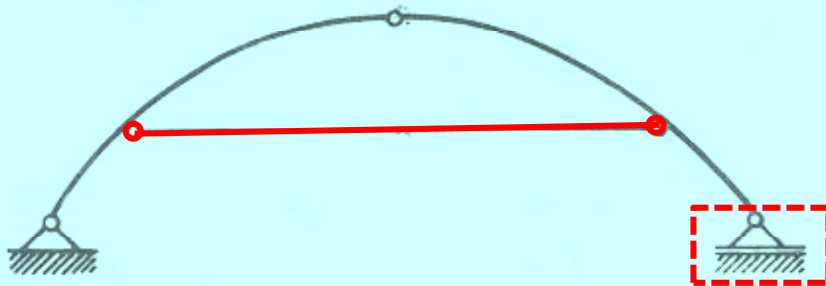
$$z_s + z''_o + z'_o + z_u = z_p + 2 + 2n$$

Nosač sa tri zgloba sa zategom

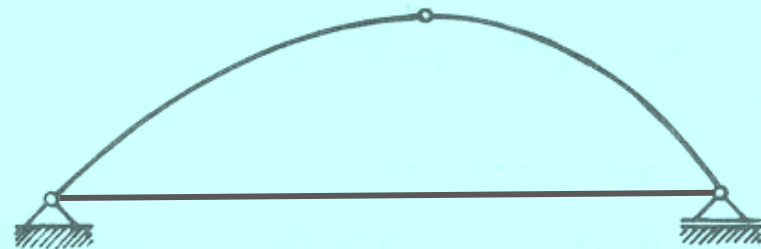
Kada se kod luka na tri zgloba

- u jednom od oslonačkih zglobova ukloni horizontalan oslonac
- doda zatega da bi se obezbijedila kinematička stabilnost

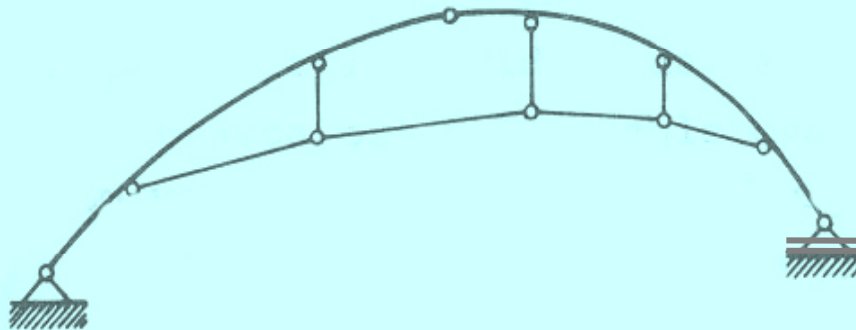
dobija se nosač sa tri zgloba sa zategom



Zatega može da spaja oslonačke zglobove



Zatega može da spaja oslonačke zglobove ali se iz konstruktivnih razloga može izdići i oblikovati kao poligonalan niz prostih štapova prihvaćen vertikalnim prostim štapovima koje se nazivaju vertikale.

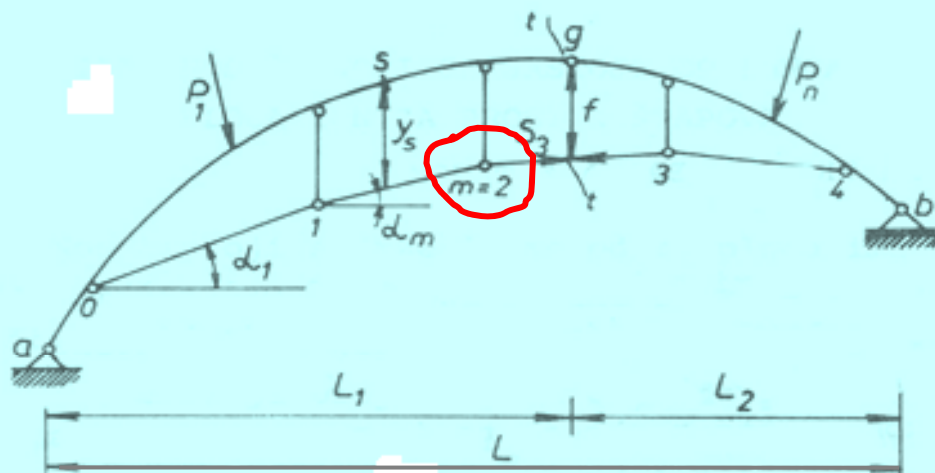


Nosači sa zategom spadaju u grupu *unutrašnje kinematičkih prosto stabilnih nosača*.

Za razliku od luka na tri zgloba:

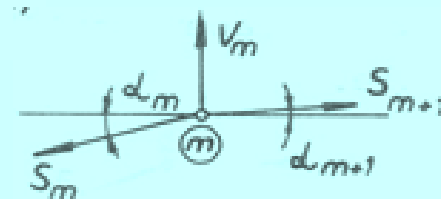
reakcije oslonaca V_a , H_a , B mogu se odrediti iz uslova ravnoteže sila koje napadaju jednu krutu ploču.

Kada na nosač sa zategom djeluju vertikalne sile tada su reakcije oslonaca ekvivalentne reakcijama proste grede istog raspona.



S_m - sile u štapovima

α_m - uglovi nagiba štapova
prema horizontali

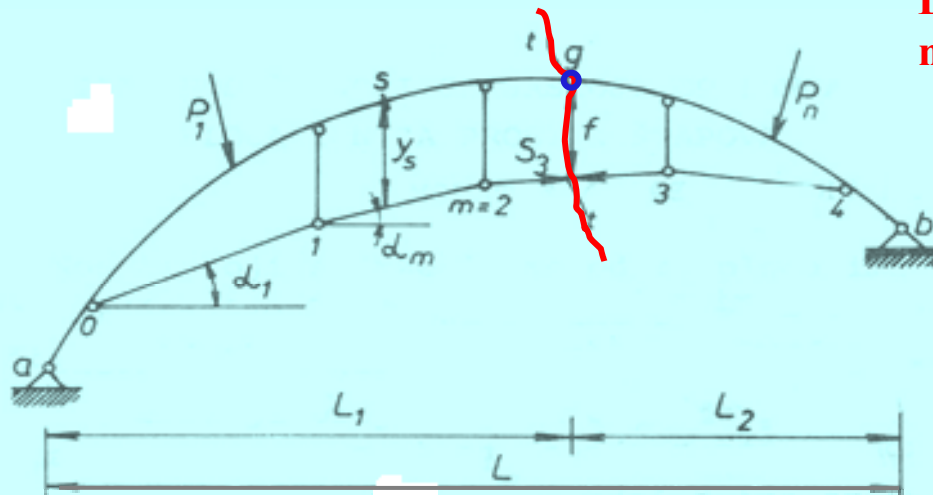


$$S_m \cos \alpha_m = S_{m+1} \cos \alpha_{m+1} = H$$

H - horizontalna komponenta sile S_m tada je

$$S_m = \frac{H}{\cos \alpha_m}$$

$$V_m = S_m \sin \alpha_m - S_{m+1} \sin \alpha_{m+1} = H(\operatorname{tg} \alpha_m - \operatorname{tg} \alpha_{m+1})$$



Da bi odredili silu H potrebno je napraviti presjek kroz zglob g

f – vertikalno odstojanje štapa 2-3 od zgloba g

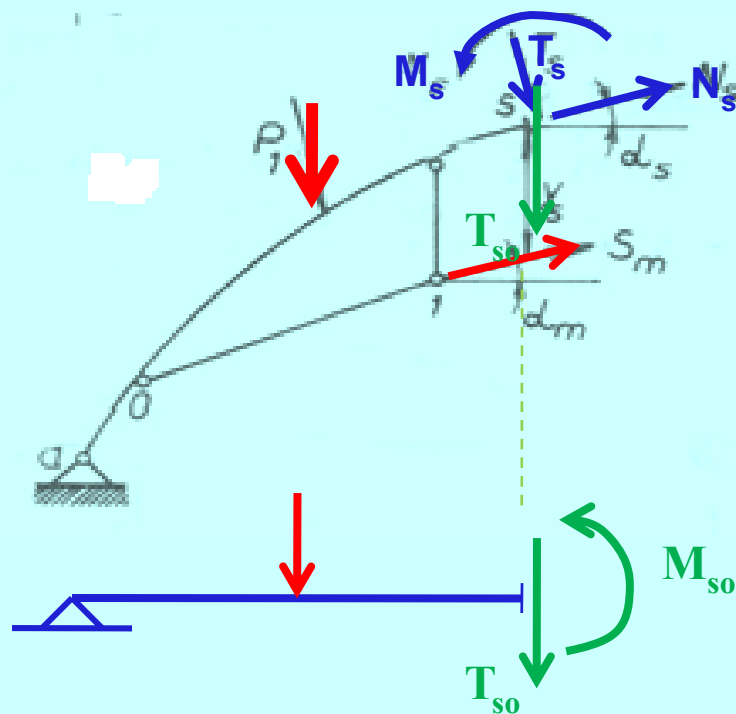
M_{go} –moment spoljašnjih sila i reakcije oslonca a u odnosu na g

Zbir momenata svih sila koje djeluju lijevo ili desno od presjeka $t-t$ a u odnosu na zglob g mora biti jednak nuli:

$$M_{go} - S_3 f \cos \alpha_3 = 0$$

$$S_3 \cos \alpha_3 = \frac{M_{go}}{f} = H$$

$$H = \frac{M_{go}}{f}$$



T_{so} i M_{so} transverzalna sila i momenta savijanja u presjeku s proste grede raspona L:

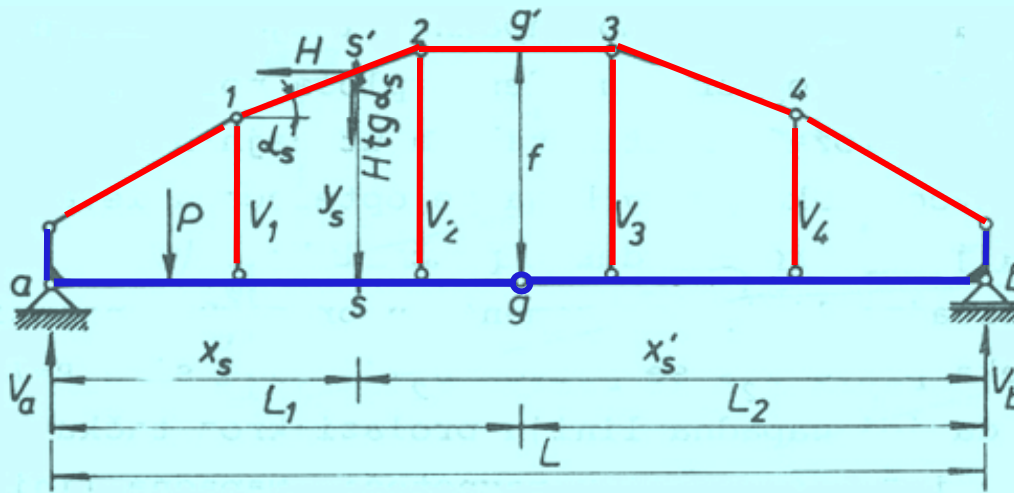
$$N_s = -T_{so} \sin \alpha_s + S_m \cos(\alpha_s - \alpha_m) = -T_{so} \sin \alpha_s + H \frac{\cos(\alpha_s - \alpha_m)}{\cos \alpha_m}$$

$$T_s = T_{so} \cos \alpha_s - S_m \sin(\alpha_s - \alpha_m) = T_{so} \cos \alpha_s - H \frac{\sin(\alpha_s - \alpha_m)}{\cos \alpha_m}$$

$$M_s = M_{so} - Hy_s$$

Vitak poligonalni luk sa gredom za ukrućenje ispod luka

Na slici je prikazan luk sa vješaljka o koje su obješene dvije zglavkasto vezane ploče

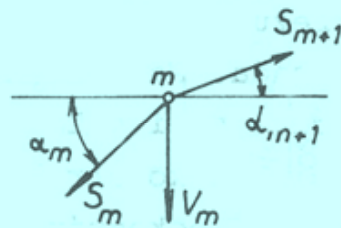


Langerova greda

- Opterećenje djeluje na Langerovu gredu
- Štapovi luka i vertikale primaju samo aksijalne sile

Iz ravnoteže **m –tog čvora luka** sa nepoznatim silama u štapovima luka S_m i S_{m+1} i silom u vertikali V_m

$$\Sigma X=0$$

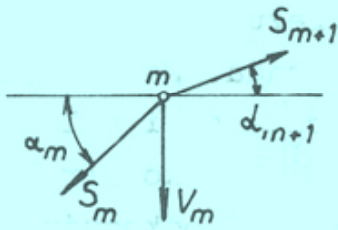


$$S_{m+1} \cos \alpha_{m+1} - S_m \cos \alpha_m = 0$$

$$S_{m+1} \cos \alpha_{m+1} = S_m \cos \alpha_m = H$$

$$S_m = \frac{H}{\cos \alpha_m} \quad S_{m+1} = \frac{H}{\cos \alpha_{m+1}}$$

Horizontalne komponente sila u štapovima poligonalnog luka su jednake



$$\Sigma Y = 0$$

$$V_m - S_{m+1} \sin \alpha_{m+1} + S_m \sin \alpha_m = 0$$

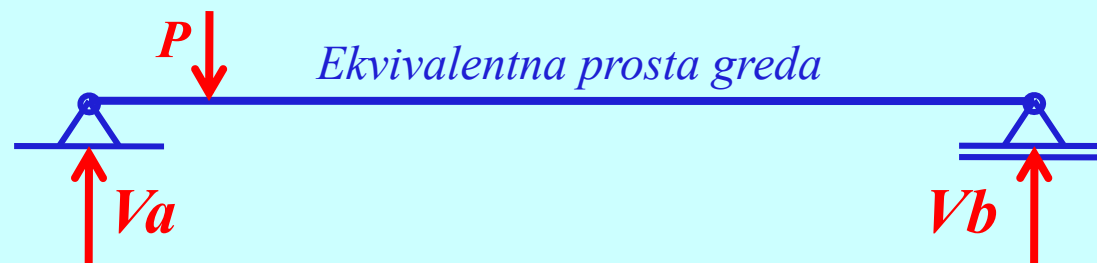
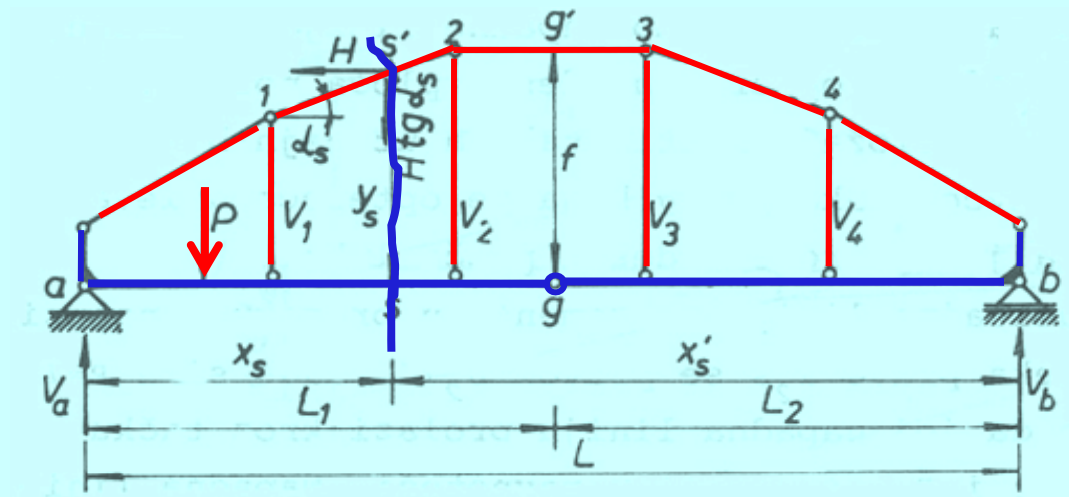
$$V_m = H(\operatorname{tg} \alpha_{m+1} - \operatorname{tg} \alpha_m)$$

Prethodnim relacijama date su sile u prostim štapovima u funkciji od sile H.

*Vertikalne komponente reakcija **Va i Vb** određujemo iz uslova $\Sigma M_a = 0$ i $\Sigma M_b = 0$, odnosno, prema izrazima za odgovarajuće reakcije proste grede istog raspona i istog opterećenja.*

Da bi odredili sile u presjeku s potrebno je napraviti presjek koji prolazi kroz tu tačku s i siječe štap luka u tački s' tada:

Silu u tom štapu razlažemo horizontalnu komponentu H i vertikalnu komponentu $V_s = H \operatorname{tg} \alpha_s$



$$\Sigma M_b = 0 \rightarrow V_a$$

$$\Sigma M_a = 0 \rightarrow V_b$$

moment u presjeku s grede ag je tada:

$$M_s = M_{so} - H y_s$$

M_{so} - moment savijanja ekvivalentne proste grede (od sila V_a i zadatog opterećenja lijevo od s)

y_s - vertikalno rastojanje presjeka s i s'

Ako napišemo izraz za moment savijanja u presjeku g primjenom ove relacije:

$$M_g = M_{go} - H f \quad \Rightarrow \quad H = \frac{M_{go}}{f}$$

isti izrazima za moment u presjeku s i silu potiska H luka $a-g'-b$.

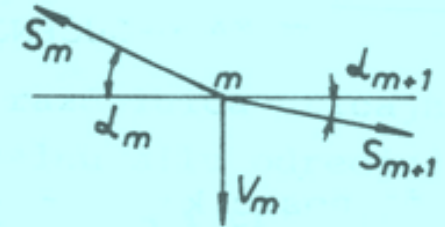
Na sličan način može da se napiše izraz za transverzalnu silu:

$$T_s = T_{so} - H \operatorname{tg} \alpha_s \quad \Rightarrow \quad T_s = \frac{T_{so} \cos \alpha_s - H \sin \alpha_s}{\cos \alpha_s} = \frac{T_{sl}}{\cos \alpha_s}$$

Sile u štapovima lanca i vješaljki mogu da se odrede iz ravnoteže čvora m

$$\Sigma X=0 \quad S_{m+1} \cos \alpha_{m+1} - S_m \cos \alpha_m = 0$$

$$\Rightarrow S_{m+1} \cos \alpha_{m+1} = S_m \cos \alpha_m = H$$



Zaključak: horizontalne komponente sila u štapovima lanca međusobno jednake

$$S_m = \frac{H}{\cos \alpha_m} \quad S_{m+1} = \frac{H}{\cos \alpha_{m+1}}$$

$$\Sigma Y=0 \quad V_m - S_m \sin \alpha_m + S_{m+1} \sin \alpha_{m+1} = 0$$

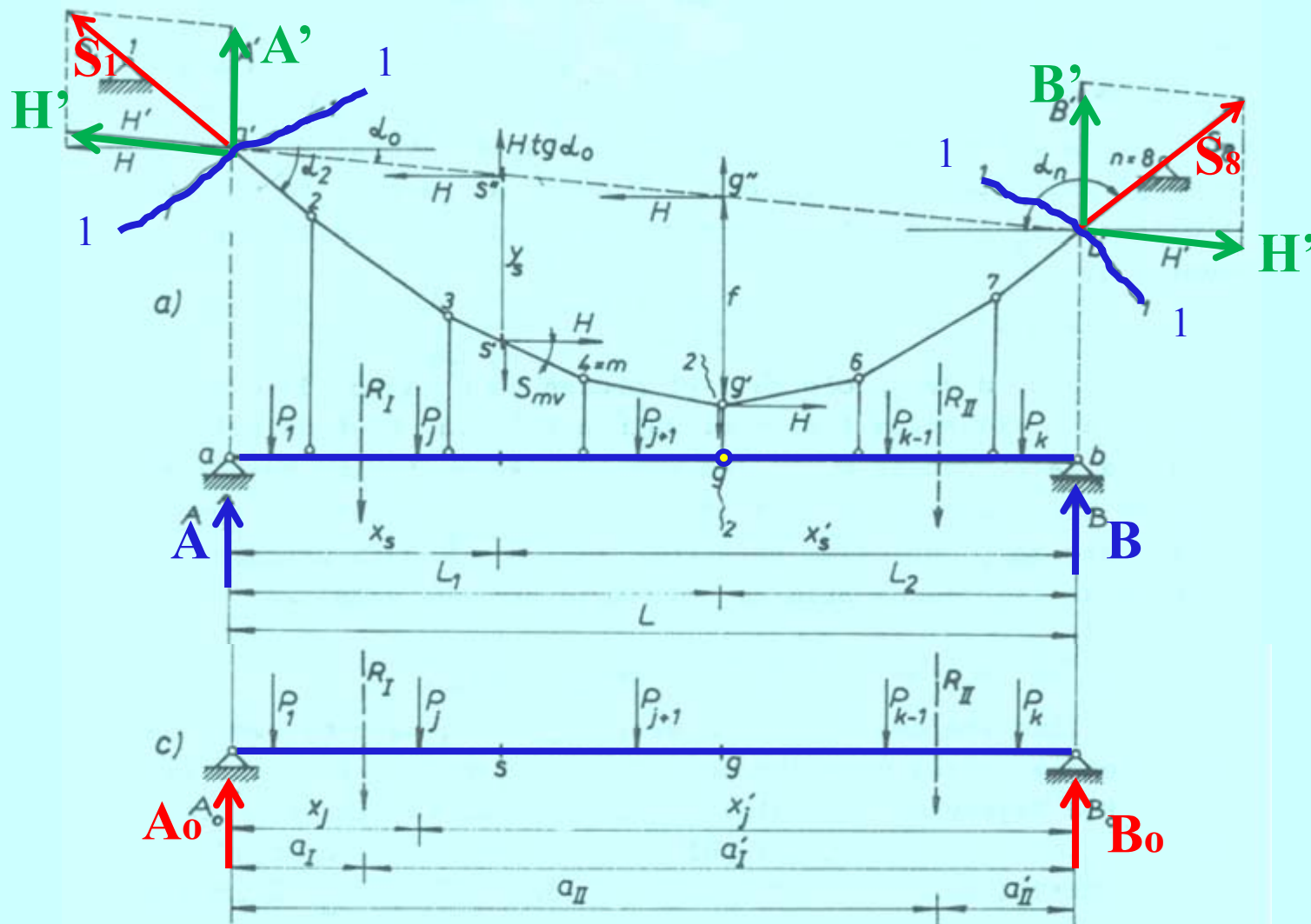
$$\Rightarrow V_m = H(tg \alpha_{m+1} - tg \alpha_m)$$

$$\mathbf{B} + \mathbf{B}' = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^k \mathbf{P}_j \mathbf{x}_j$$

Ako ove izraze uporedimo sa izrazima za reakcije ekvivalentne proste grede A_0 i B_0 zaključuje se da (desna strana prethodnih izraza):

$$A + A' = A_0$$

$$B + B' = B_0$$



*Silu **H** određujemo iz uslova jednakosti sa nulom momenata savijanja svih sila lijevo ili desno od presjeka g-g' u odnosu na zglob g:*

$$M_g = M_{go} - H f \quad H = \frac{M_{go}}{f}$$

kao kod ekvivalentnog luka na tri zgloba a'-g'-b'

*Sada se mogu sile **A** i **B** odrediti na sljedeći način:*

$$A = A_o - H(\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_o) \quad B = B_o - H(\operatorname{tg} \alpha_o - \operatorname{tg} \alpha_n)$$

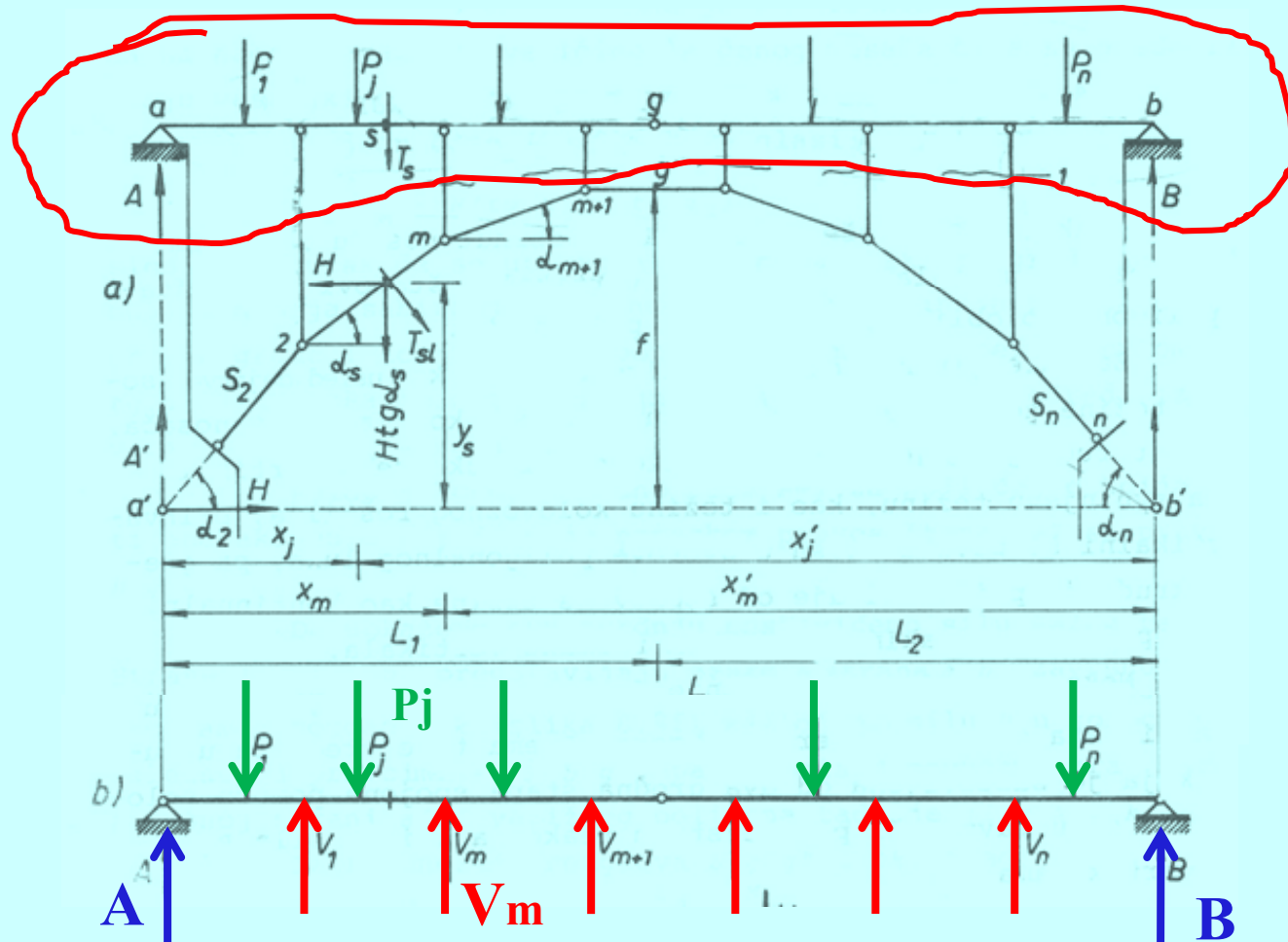
Presječne sile:

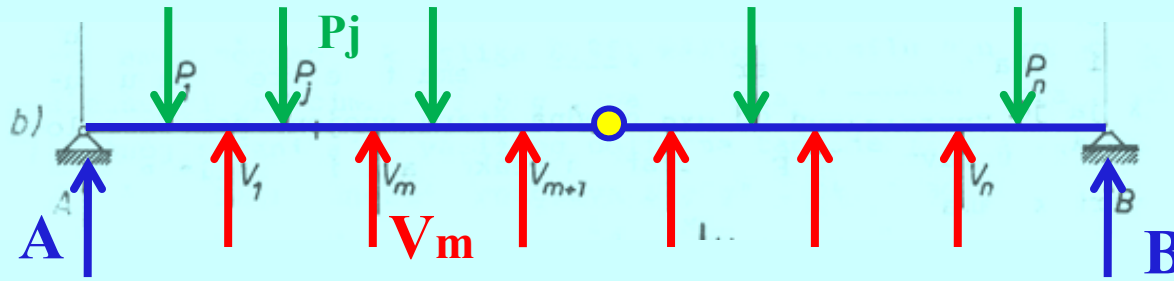
$$M_s = M_{so} - H y_s$$

$$T_s = T_{so} + H(\operatorname{tg} \alpha_o - \operatorname{tg} \alpha_s)$$

Poligonalni luk sa gredom za ukrućenje iznad luka

Za razliku od prethodnog nosača štapovi ovog nosača su pritisnuti.



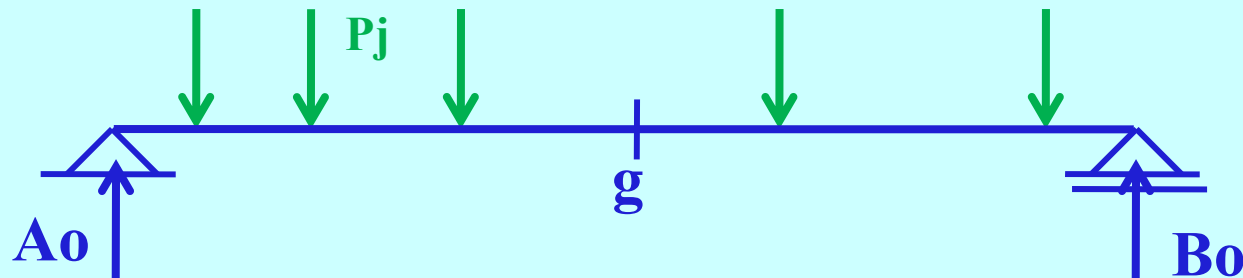


Iz uslova $\sum M_a = 0$ i $\sum M_b = 0$
izdvojene grede prikazane na
slici:

$$AL - \sum P_j x'_j + \sum V_m x'_m = 0$$

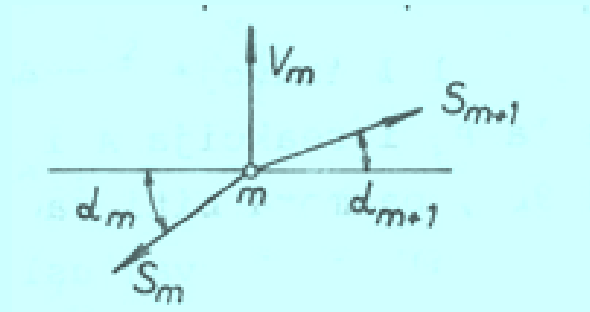
$$A = \frac{1}{L} \sum P_j x'_j - \frac{1}{L} \sum V_m x'_m = A_o - A'$$

$$B = \frac{1}{L} \sum P_j x_j - \frac{1}{L} \sum V_m x_m = B_o - B'$$



A_o i B_o - reakcije proste grede raspona L pod dejstvom sila P_j

A' i B' – vertikalne reakcije poligonalnog luka $a'-g'-b'$ izazvane silama u vertikalama



$$S_{m+1} \cos \alpha_{m+1} = S_m \cos \alpha_m = H$$

$$V_m = H(\operatorname{tg} \alpha_m - \operatorname{tg} \alpha_{m+1})$$

Iz prve jednačine zaključujemo da su **horizontalne komponente sila u štapovima lanca međusobno jednake**:

Sile u presječenim štapovima S_2 i S_n razložićemo na vertikalni pravac u reakcije A' i B' i pravac $a'-b'$ (komponenta H'):

$$A' = H(\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_o)$$

$$B' = H(\operatorname{tg} \alpha_o - \operatorname{tg} \alpha_n)$$

Silu H određujemo iz uslova jednakosti sa nulom momenata savijanja svih sila lijevo ili desno od presjeka g-g' u odnosu na zglob g:

$$\mathbf{M_g} = \mathbf{M_{go}} - \mathbf{H f} \qquad H = \frac{M_{go}}{f}$$

Sada se mogu sile A i B odrediti na sljedeći način:

$$A = A_o - H(\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_o)$$

$$B = B_o - H(\operatorname{tg} \alpha_o - \operatorname{tg} \alpha_n)$$

Presječne sile:

$$\mathbf{M_s} = \mathbf{M_{so}} - \mathbf{H y_s}$$

$$\mathbf{T_s} = \mathbf{T_{so}} + \mathbf{H(\operatorname{tg} \alpha_o - \operatorname{tg} \alpha_s)}$$

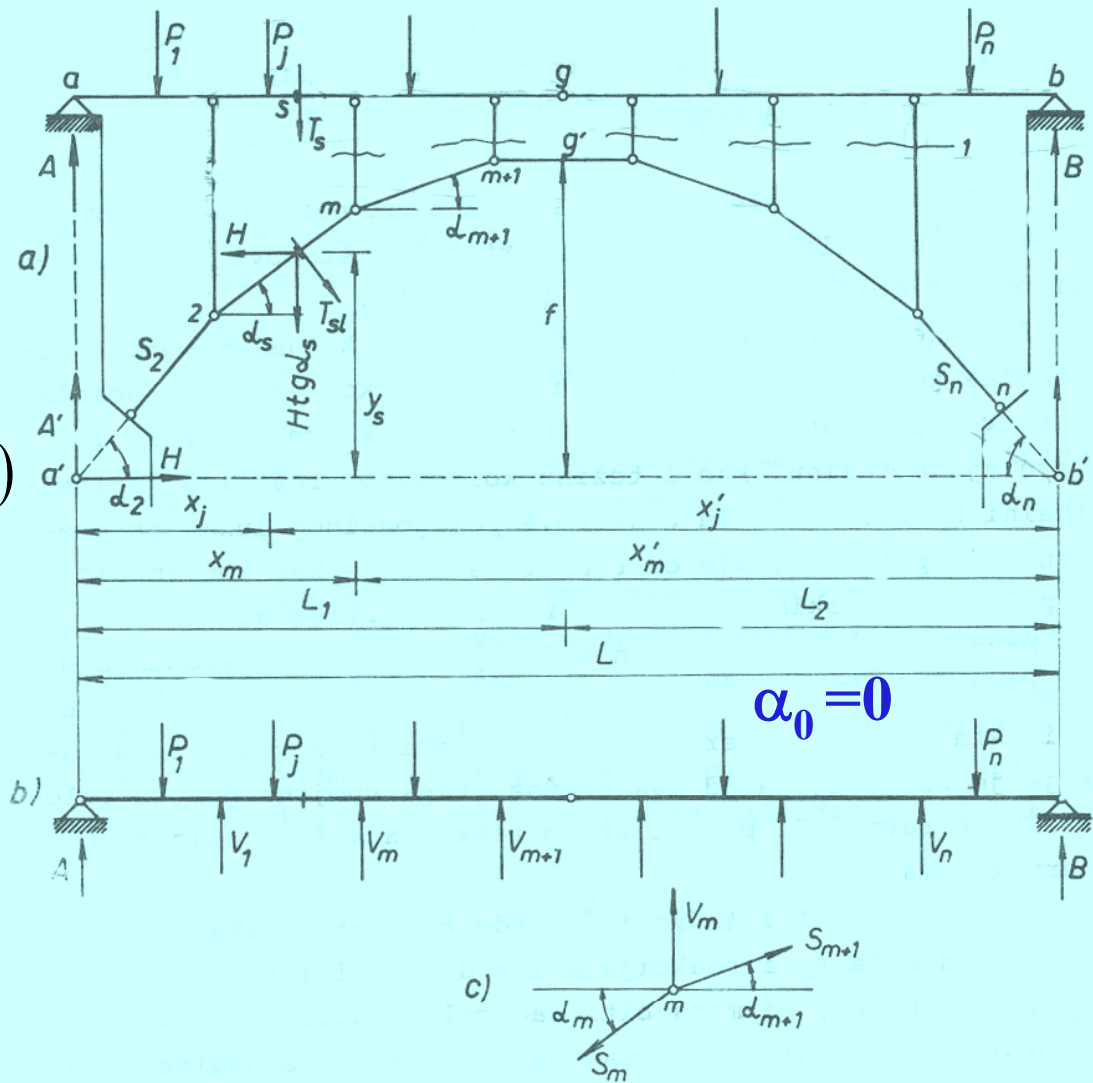
$$S_m = \frac{H}{\cos \alpha_m}$$

U oslonačkim čvorovima a' i b' komponenta u vertikalnom pravcu:

$$B' = H \operatorname{tg} \alpha_n$$

$$A = A_0 - H \tan \alpha_2$$

$$B = B_0 - H \tan \alpha_n$$



Presječne sile kao kod ekvivalentnog luka na tri zgloba a'-g'-b'

$$M_s = M_{so} - H y_s$$

$$M_g = M_{go} - H f$$

$$H = \frac{M_{go}}{f}$$

$$T_s = -\Sigma P + A_o - H \operatorname{tg} \alpha_s$$

$$T_s = \frac{T_{so} \cos \alpha_s - H \sin \alpha_s}{\cos \alpha_s} = \frac{T_{sl}}{\cos \alpha_s}$$