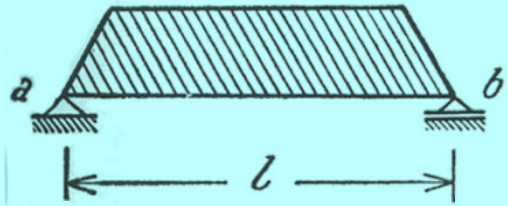
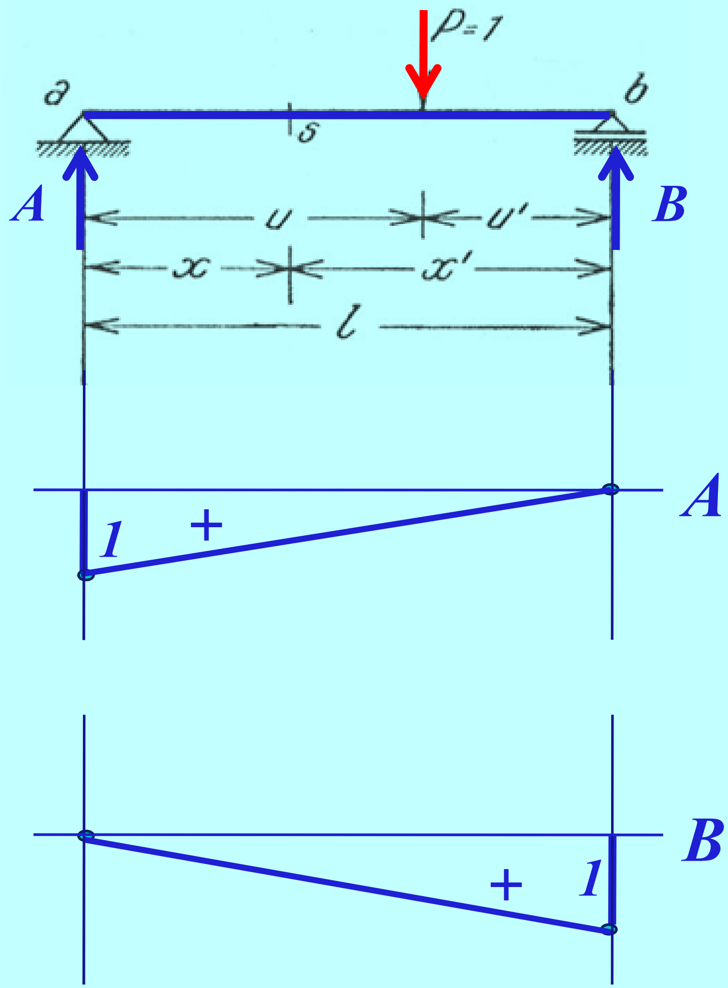
UTICAJNE LINIJE

Prosta greda



P=1



Reakcije oslonaca

$\sum Mb = 0$ $\quad A\times l - 1\times u' = 0 \;\Rightarrow\; A = \dfrac{u'}{l}$

$$za \quad u' = l \;\Rightarrow\; A = \frac{l}{l} = 1$$

$$za \quad u' = 0 \;\Rightarrow\; A = \frac{0}{l} = 0$$

$\sum Ma = 0$ $\quad B\times l - 1\times u = 0 \;\Rightarrow\; B = \dfrac{u}{l}$

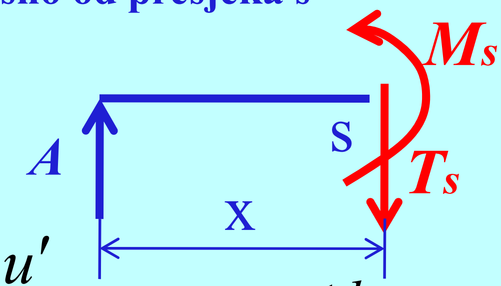
$$za \quad u = 0 \;\Rightarrow\; B = \frac{0}{l} = 0$$

$$za \quad u = l \;\Rightarrow\; B = \frac{l}{l} = 1$$

Presječne sile

a) Sila P=1 desno od presjeka s

$\sum Y = 0$

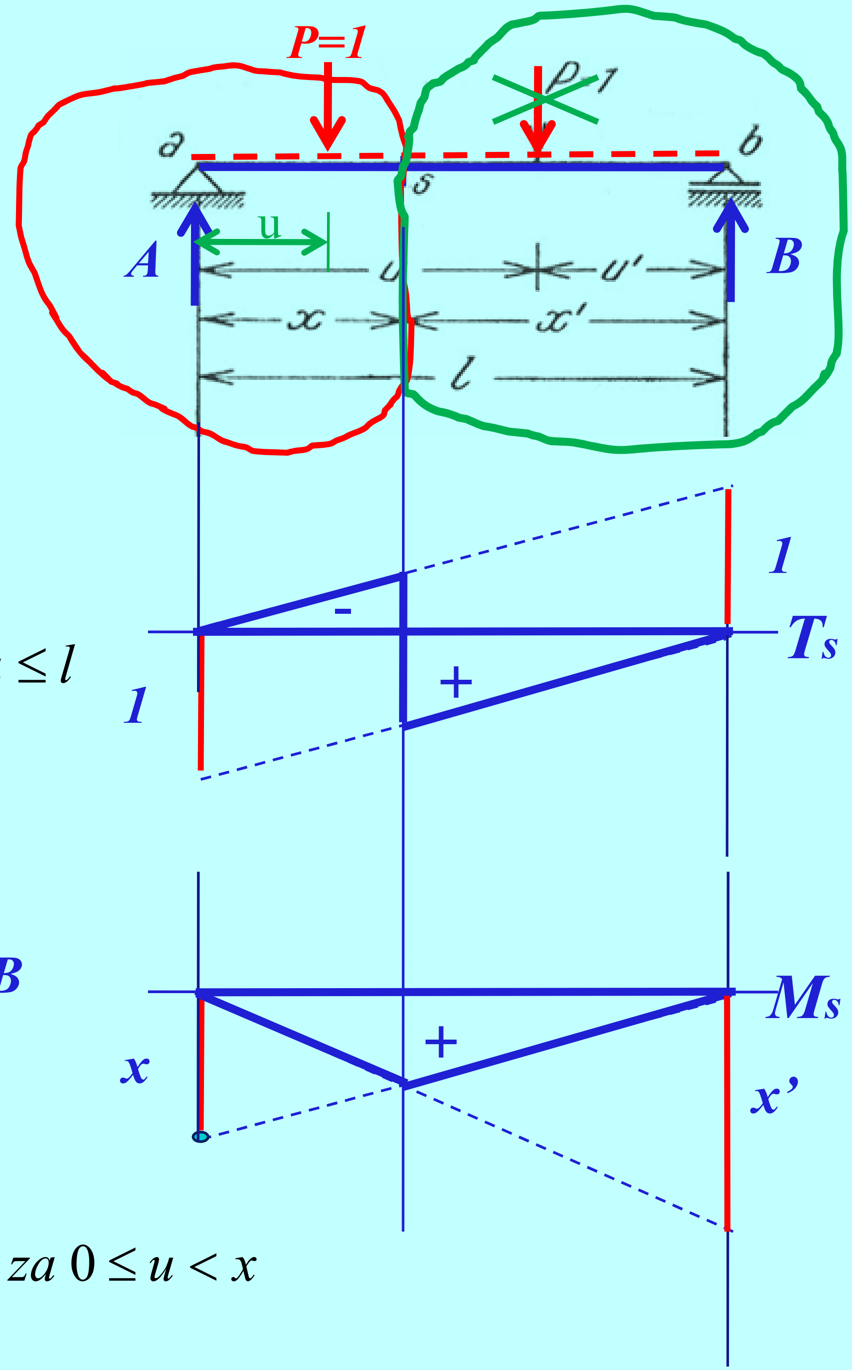


$$A - T_s = 0$$

$$\Rightarrow T_s = A = \frac{u'}{l} \quad za\ x < u \le l$$

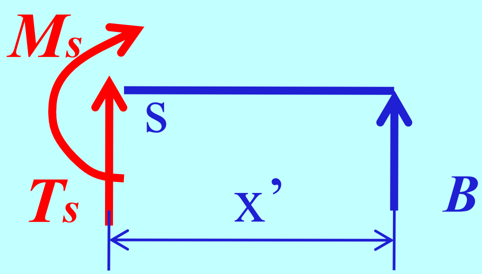
$\sum Ms = 0$ $\qquad A\,x - M_s = 0$

$$M_s = A\,x = \frac{u'x}{l} \quad za\ x < u \le l$$



b) Sila P=1 lijevo od presjeka s

$\sum Y = 0$

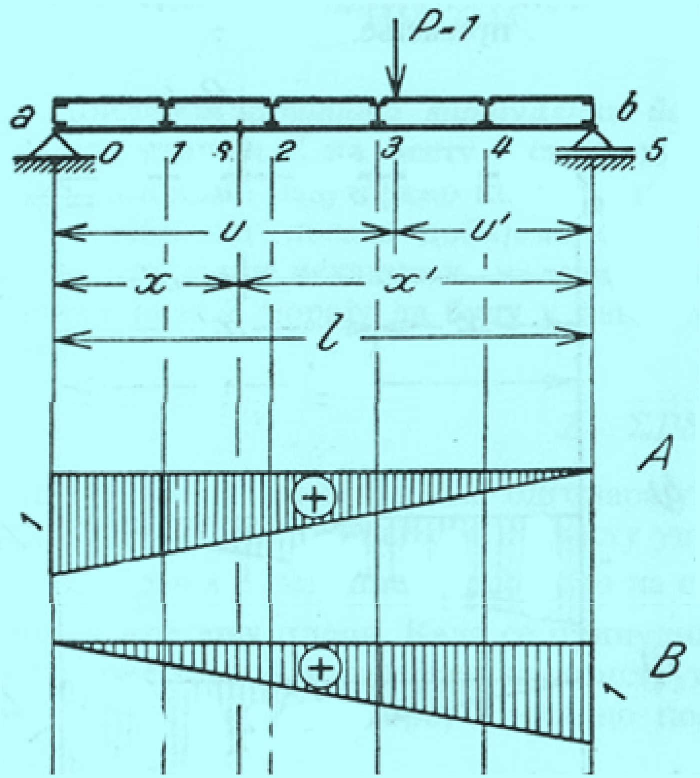


$$B + T_s = 0$$

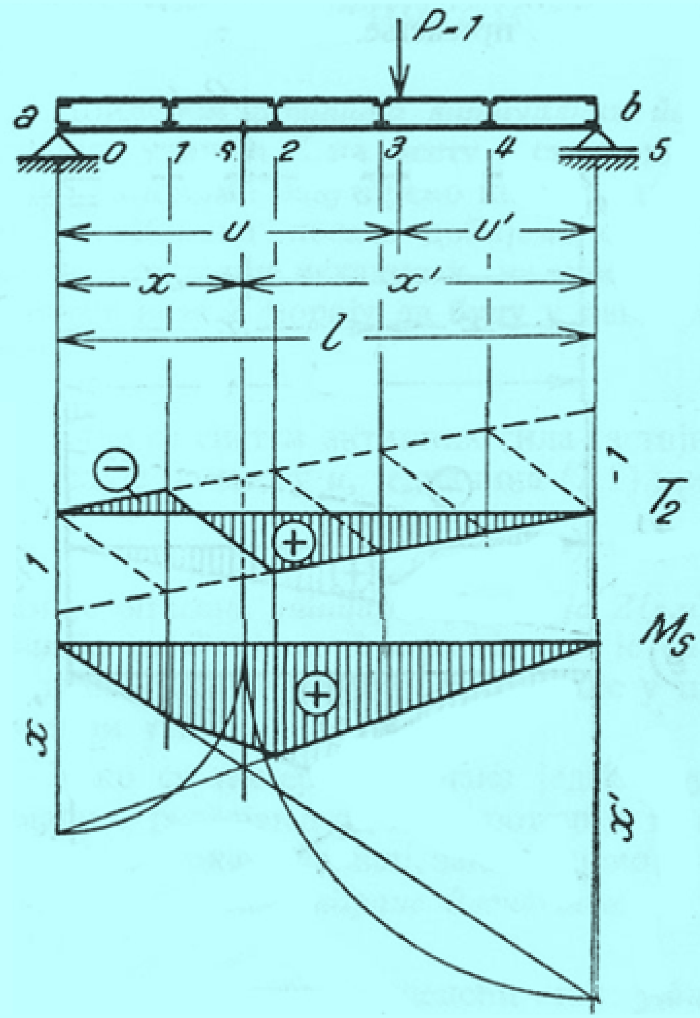
$$\Rightarrow T_s = -B = \frac{u}{l} \quad za\ 0 \le u < x$$

$\sum Ms = 0$

$$B\,x' - M_s = 0 \qquad M_s = B\,x' = \frac{ux'}{l} \qquad za\ 0 \le u < x$$

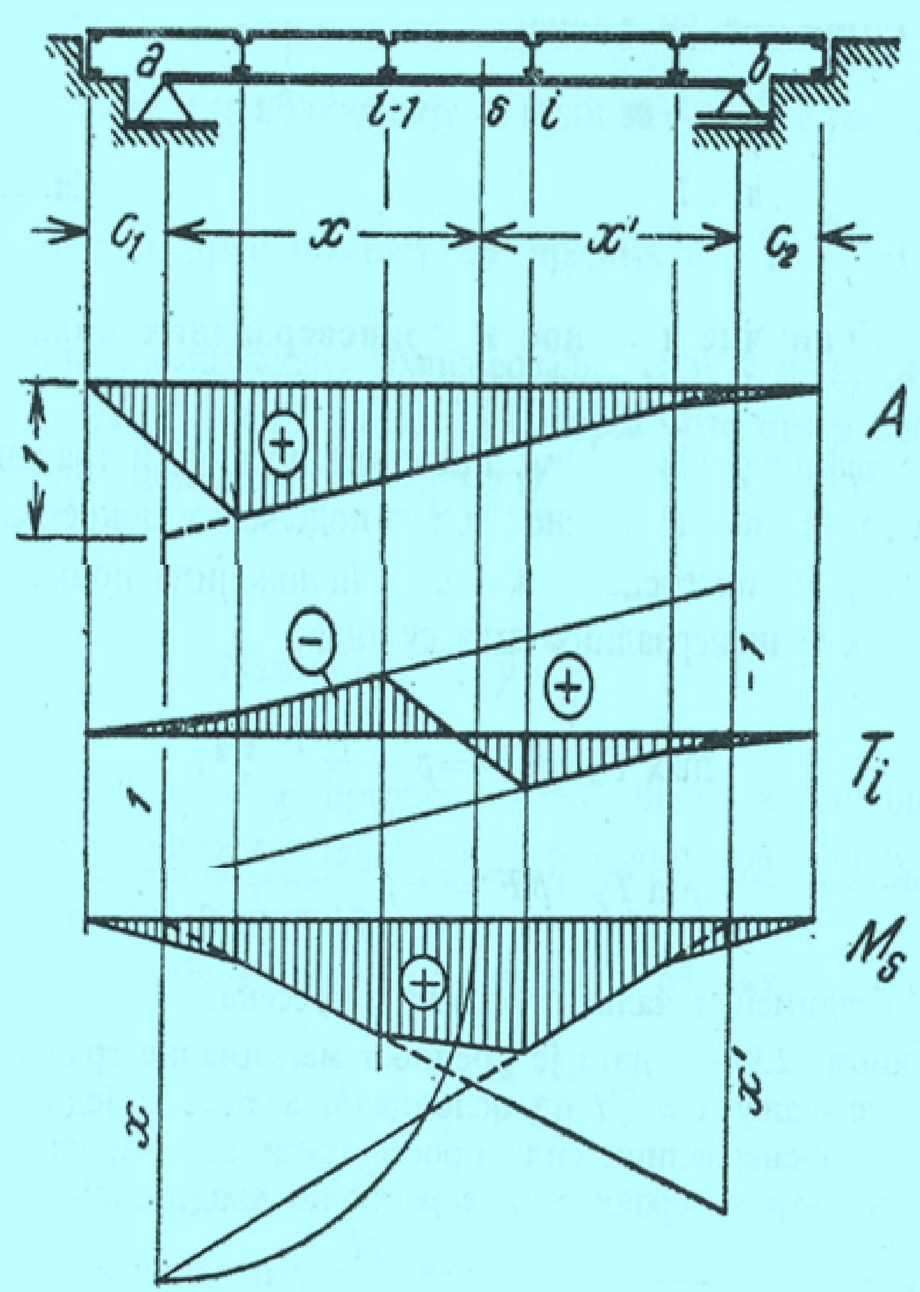


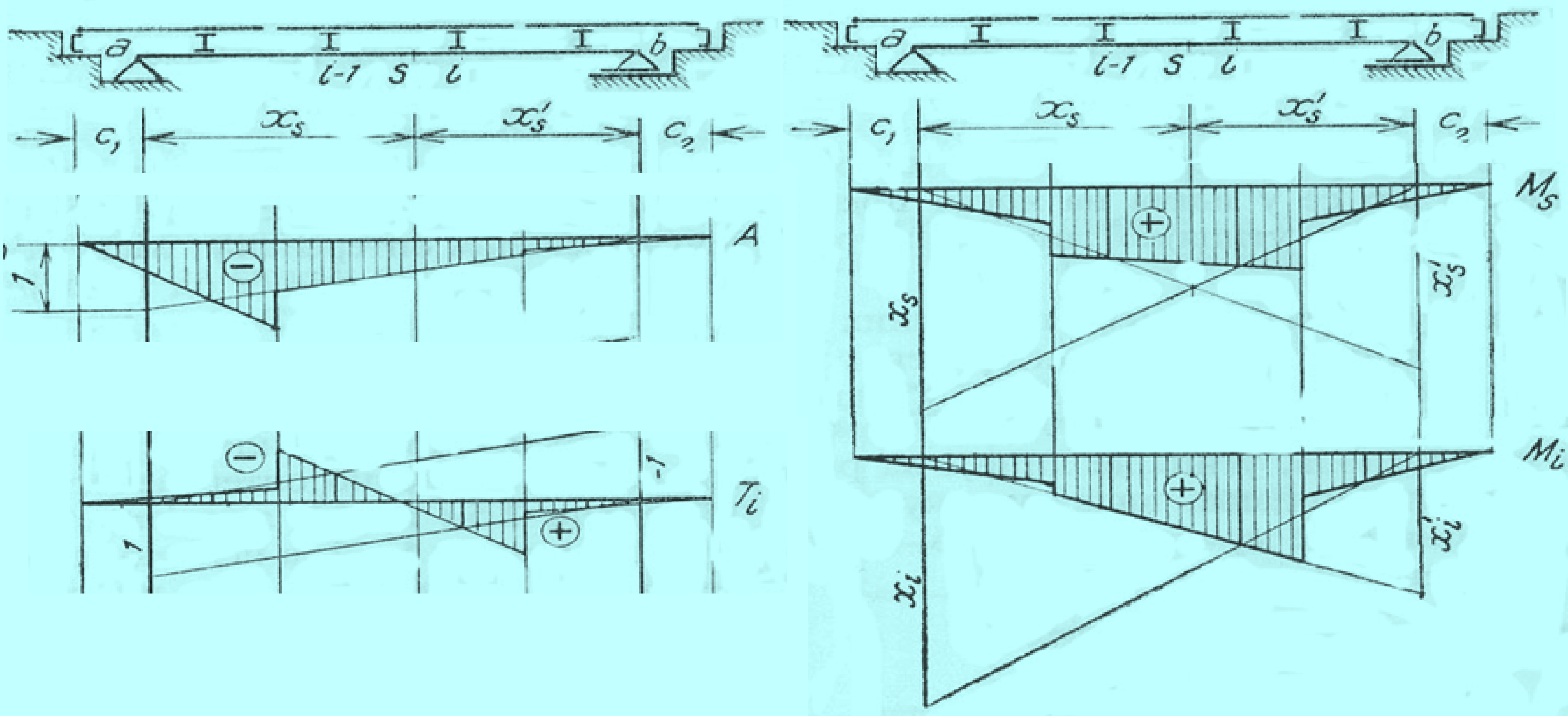
P=1
a
b
0
1
s
2
3
4
5
u
u'
x
x'
l
A
B
1



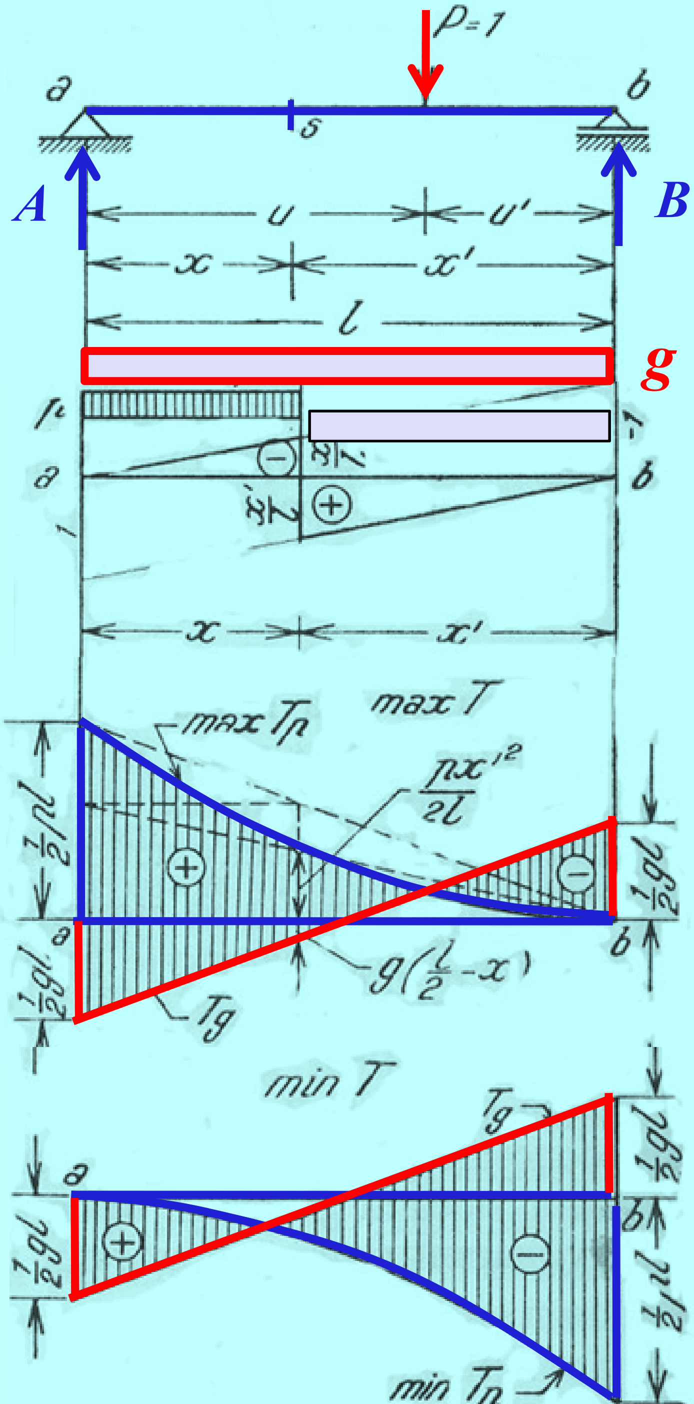
P=1
a
b
0
1
s
2
3
4
5
u
u'
x
x'
l
T_2
M_s
1

(3)




a
b
i-1
s
i
c_1
x_s
x_s'
c_2
A
1
T_i
-1
M_s
M_i
x_i

Granične vrijednosti tansverzalnih sila



$$\max T_p = pF^+ = p\frac{x'^2}{2l} = \frac{pl}{2}\xi'^2$$

$$\min T_p = pF^- = -p\frac{x^2}{2l} = -\frac{pl}{2}\xi^2$$

$$T_g = \frac{gl}{2}(1-2\xi) = \frac{gl}{2}\tau_R$$

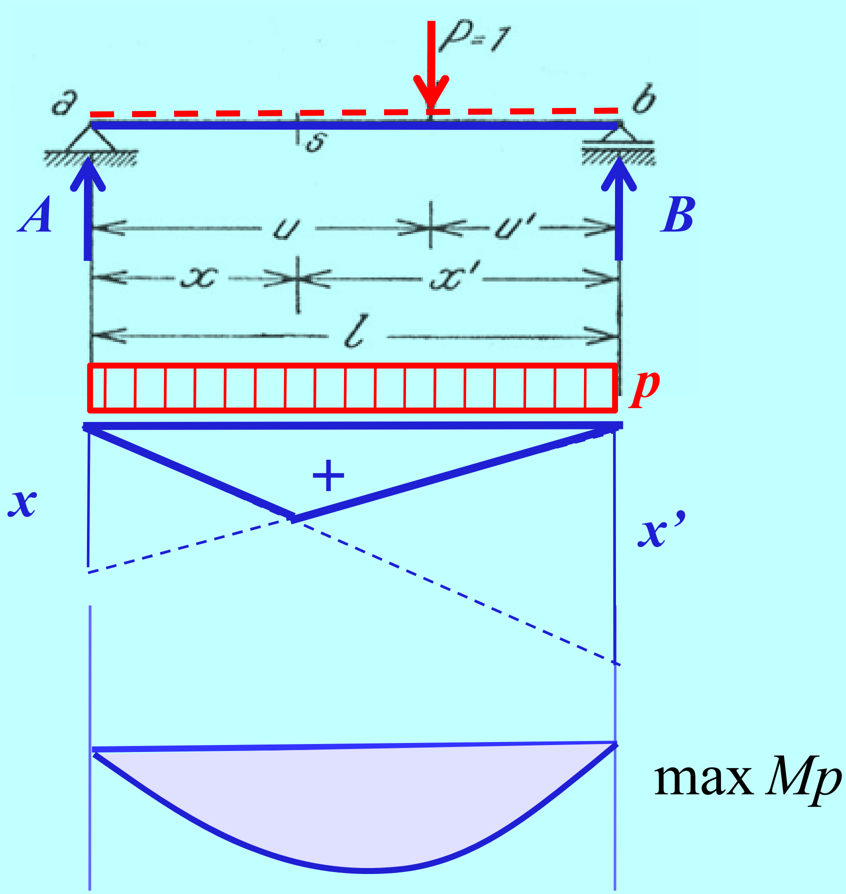
$$\max T = T_g + \max T_p = \frac{1}{2}\left(g\tau_R + p\xi'^2\right)$$

$$\min T = T_g + \min T_p = \frac{1}{2}\left(g\tau_R - p\xi^2\right)$$

Granične vrijednosti momenata savijanja

$$\max Mp = \frac{p}{2} x(l - x) = \frac{pl^2}{2} \omega_R$$

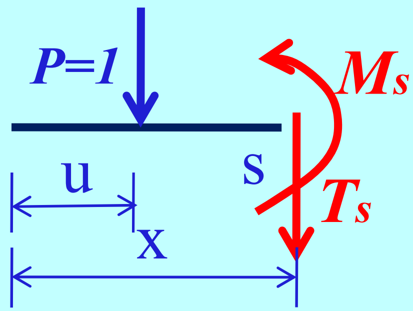
gdje je ω_R bezdimenziona fukcija položaja presjeka.



Konzola

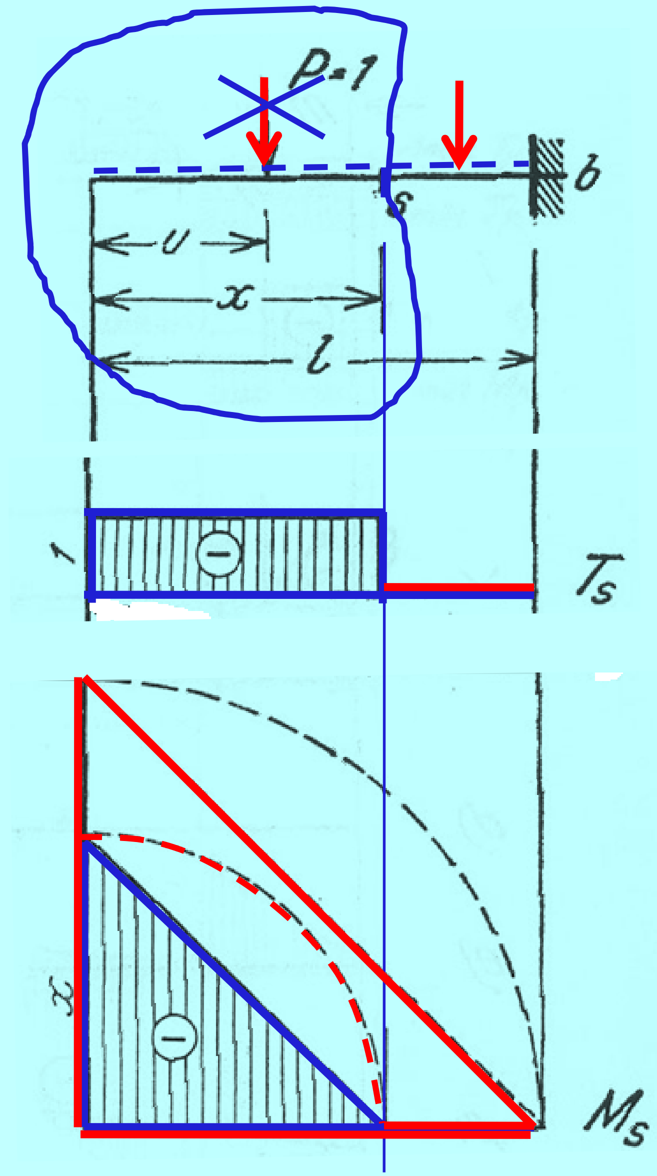
Kada se sila P=1 nalazi lijevo od presjeka s sile u presjeku su definisane sa:

$$0 \leq u \leq x$$



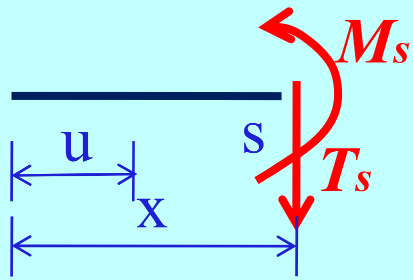
$$T_s = -1$$

$$M_s = -(x-u)$$



Kada se sila P=1 nalazi desno od presjeka s sile u presjeku su definisane sa:

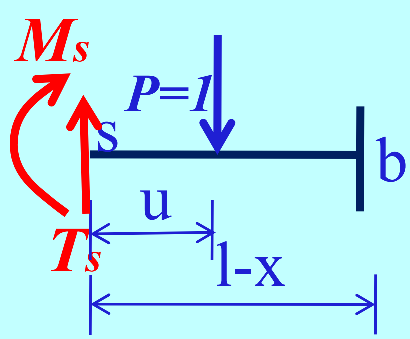
$$x \leq u \leq l$$



$$T_s = 0$$

$$M_s = 0$$

uticaji u presjeku s su jednaki nuli



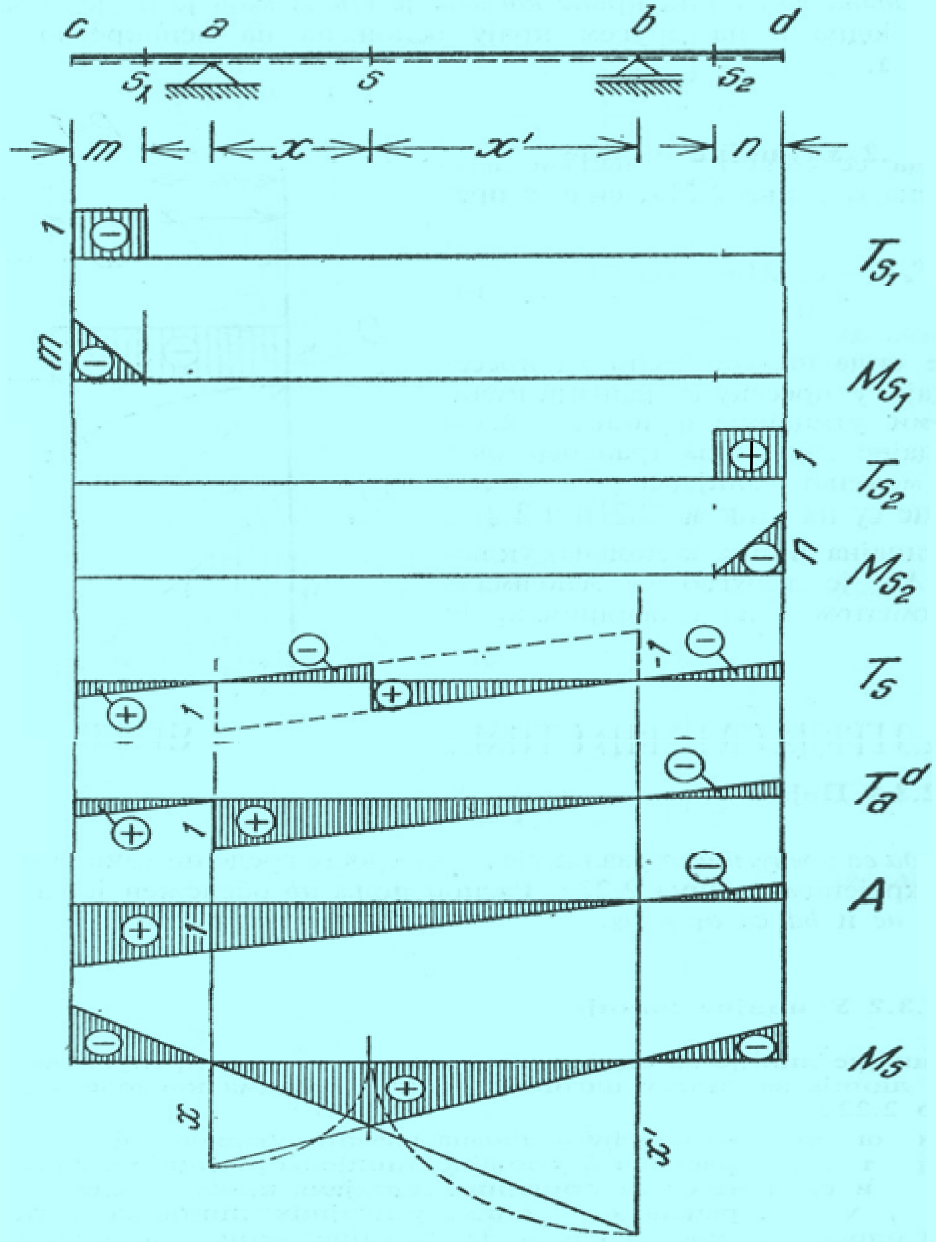
Uticajna linija za momenat savijanja M_b je trougao sa maksimalnom ordinatom l na slobodnom kraju nosača.

Greda sa prepustima

Greda sa prepustima razlikuje se od proste grede po tome što joj oslonci nijesu na krajevima.

Raspon polja ab obilježen je sa l, a dužine prepusta ac i bd sa a_1 i a_2.

Uticajne linije za sile u presjecima s_1 i s_2 na prepustima iste su kao uticajne linije za sile u odgovarajućim presjecima konzole ac i bd.

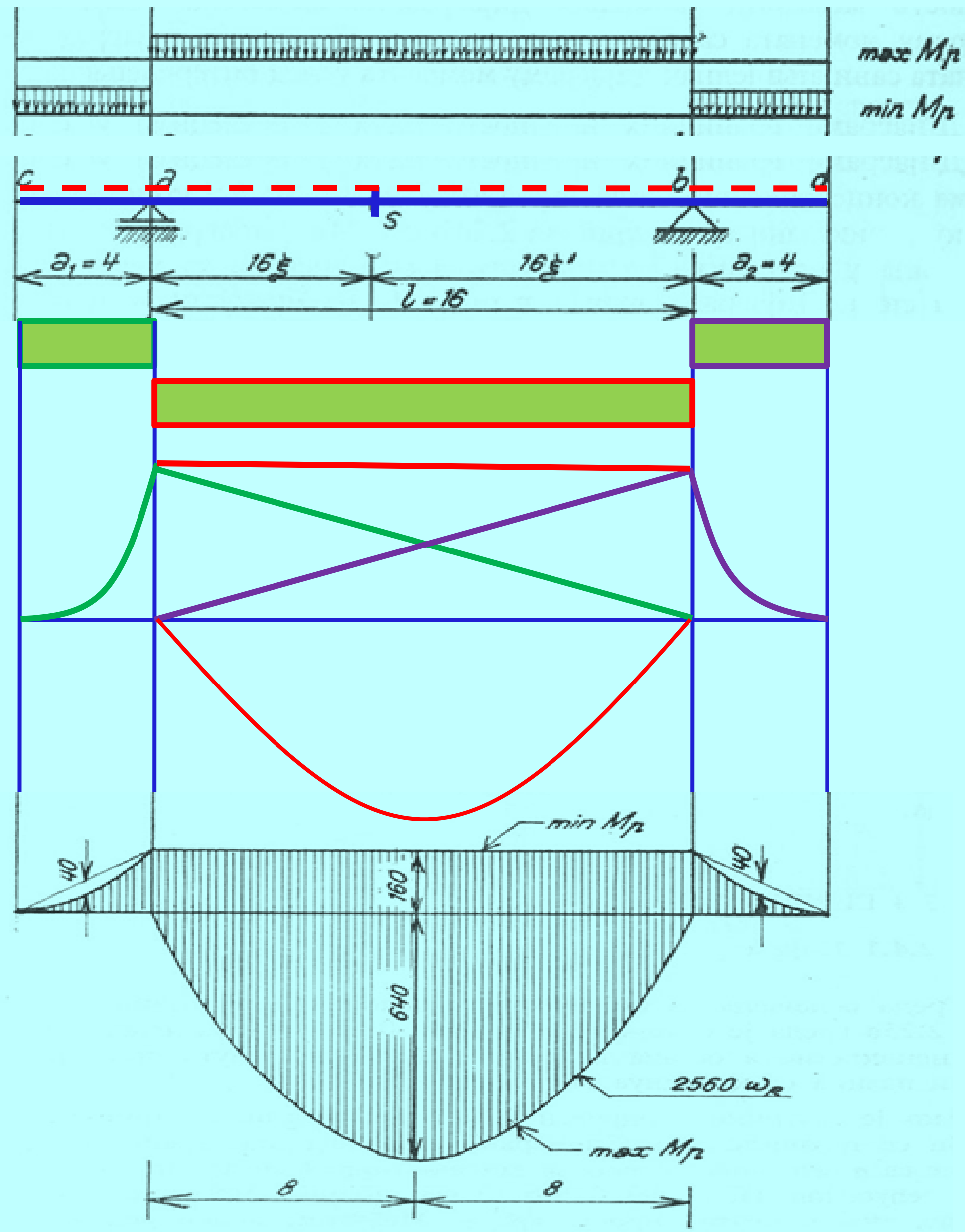


Konstrukcija dijagrama ekstremnih vrijednosti sila u presjecima grede sa prepustima

Posmatraćemo nosač raspona $l=16m$ sa prepustima $a_1=a_2=4{,}0m$ koji je direktno opterećen jednako podijeljenim pokretnim opterećenjem intenziteta $p=20kN/m$.

$$maxZ=p\,F_+$$

$$minZ=p\,F_-$$

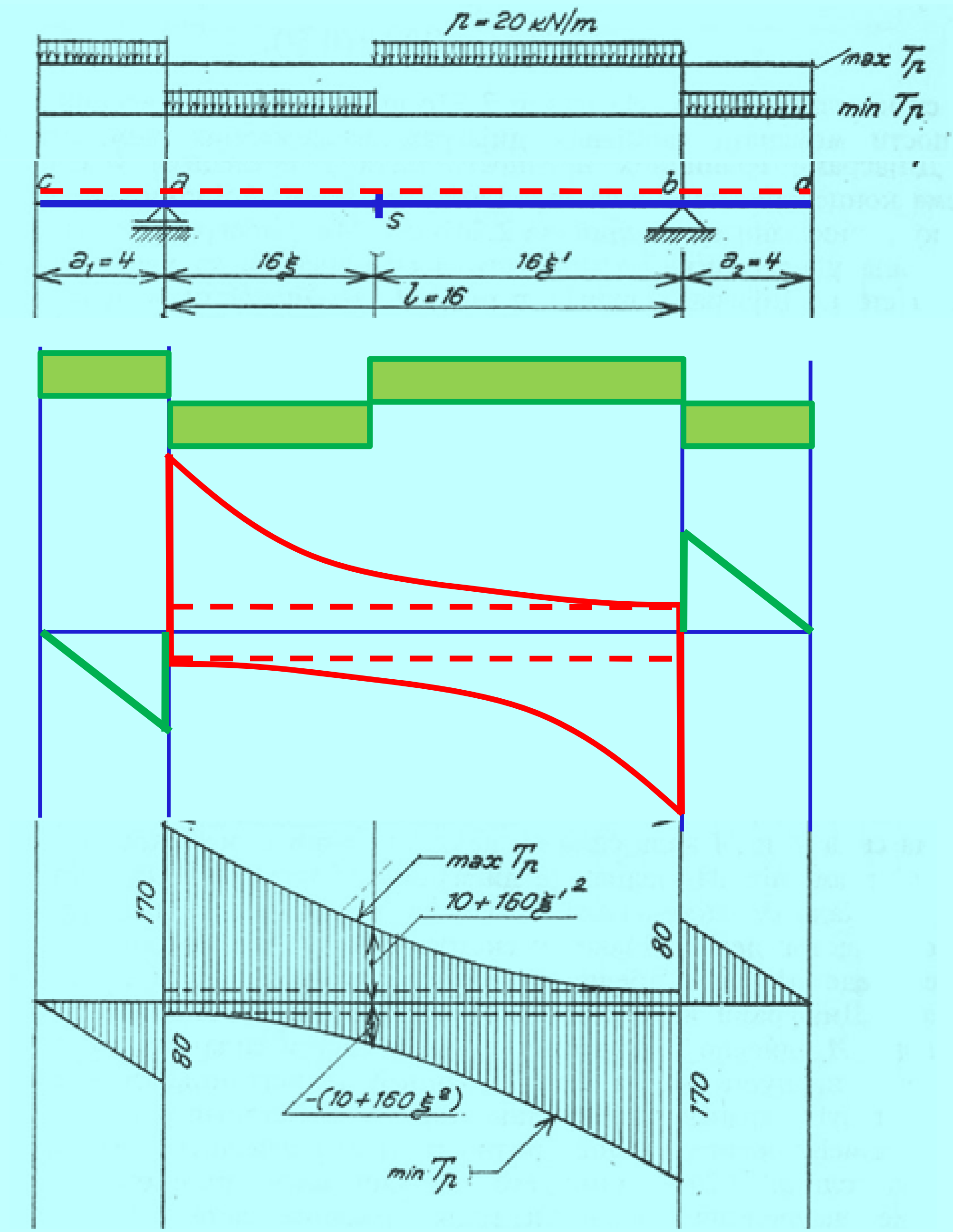


Na slici su prikazani položaji jednako podijeljenog pokretnog opterećenja p pri kojima se javljaju ekstremne vrijednosti sila u presjecima

Dijagrami ekstremnih vrijednosti transverzalnih sila, na prepustima jednak je dijagramu transverzalnih sila, a dijagram ekstremnih vrijednosti transverzalnih sila na dijelu ab opisan je izrazima:

$$\max Tp = 10 + 160\xi'^2$$

$$\min T_p = -\left(10 + 160\xi^2\right)$$



Gerberov nosač

Greda oslonjena na više od tri oslonaca je statički neodređena.

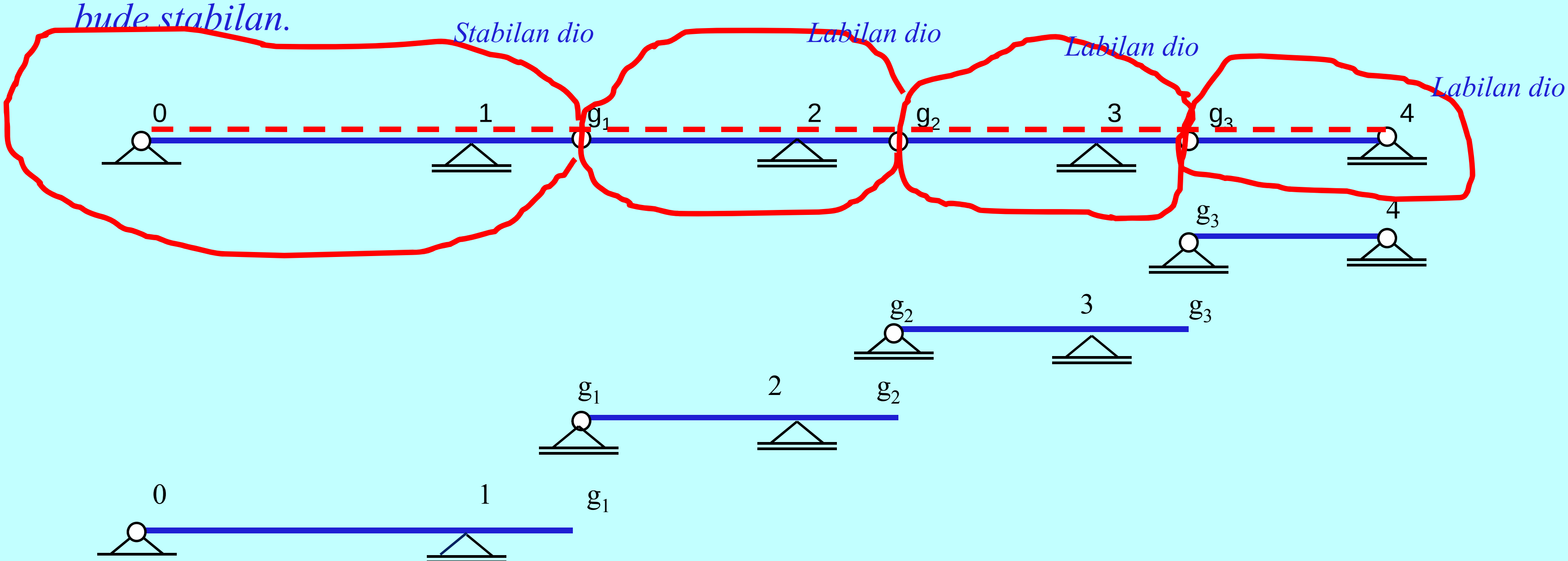
Ako je greda oslonjena u tačkama od 0 do n+1 na ležišta od kojih je jedno nepokretno, a ostala pokretna tada je takav nosač n puta statički neodređen i naziva se kontinualan nosač.

Zglobne veze mogu biti iznad oslonaca čime se dobija neekonomično rješenje.

Ekonomičnije rješenje se dobija ubacivanjem zglobova između oslonaca.

Kada se zglobovi nalaze između oslonaca sistem se sastoji od prostih greda i greda sa prepustima

Ovakvi nosači se nazivaju Gerberovi nosači. Raspored zglobova mora biti takav da sistem bude stabilan.



Reakcije oslonaca i sile u presjecima zavise od rasporeda zglobova i položaja opterećenja.

Tako na primjer, reakcije oslonaca grede sa prepustom 0-g_1 postoje za bilo koji položaj opterećenja po nosaču, dok će reakcija oslonca na dijelu g_1-g_2 postojati samo kada je opterećenje na dijelu g_1-4.

Prema tome uticajne linije za reakciju oslonca 0 postojaće na čitavom nosaču, dok će uticajna linija za reakciju oslonca 2 postojati samo u dijelu od g_1 do 4.

Na primjeru je prikazan Gerberov nosač koji se sastoji od dvije grede sa prepustima a-g_1 i g_1-g_2 i proste grede g_2-d.

Kada je opterećenje na stabilnom dijelu tj. od a-g_1 tada uticaji na labilnom dijelu tj. dijelu g_1-d imaju vrijednost nula.

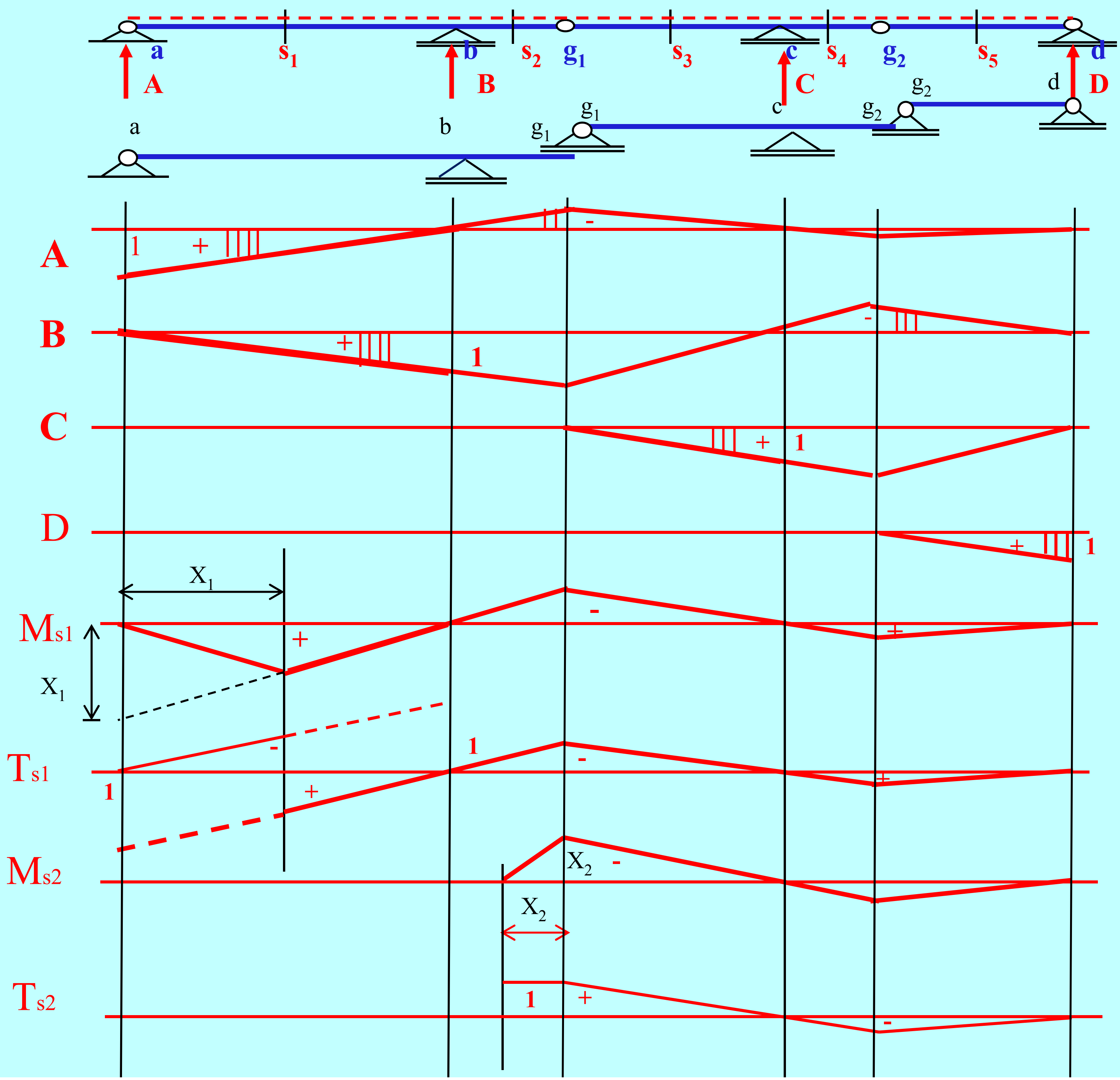
Kada je opterećenje na labilnom dijelu od g_1-d tada postoje uticaji na stabilnom dijelu a kada je opterećenje na dijelu g_1-g_2 tada uticaji u dijelu g_2-d imaju vrijednost nula .

Uticajne linije za reakcije oslonaca A i B i sile u presjecima s_1 i s_2 identične su sa uticajnim linijama za iste grede sa jednim prepustom a-g_1, slike 11a,b,e,f,g,h.

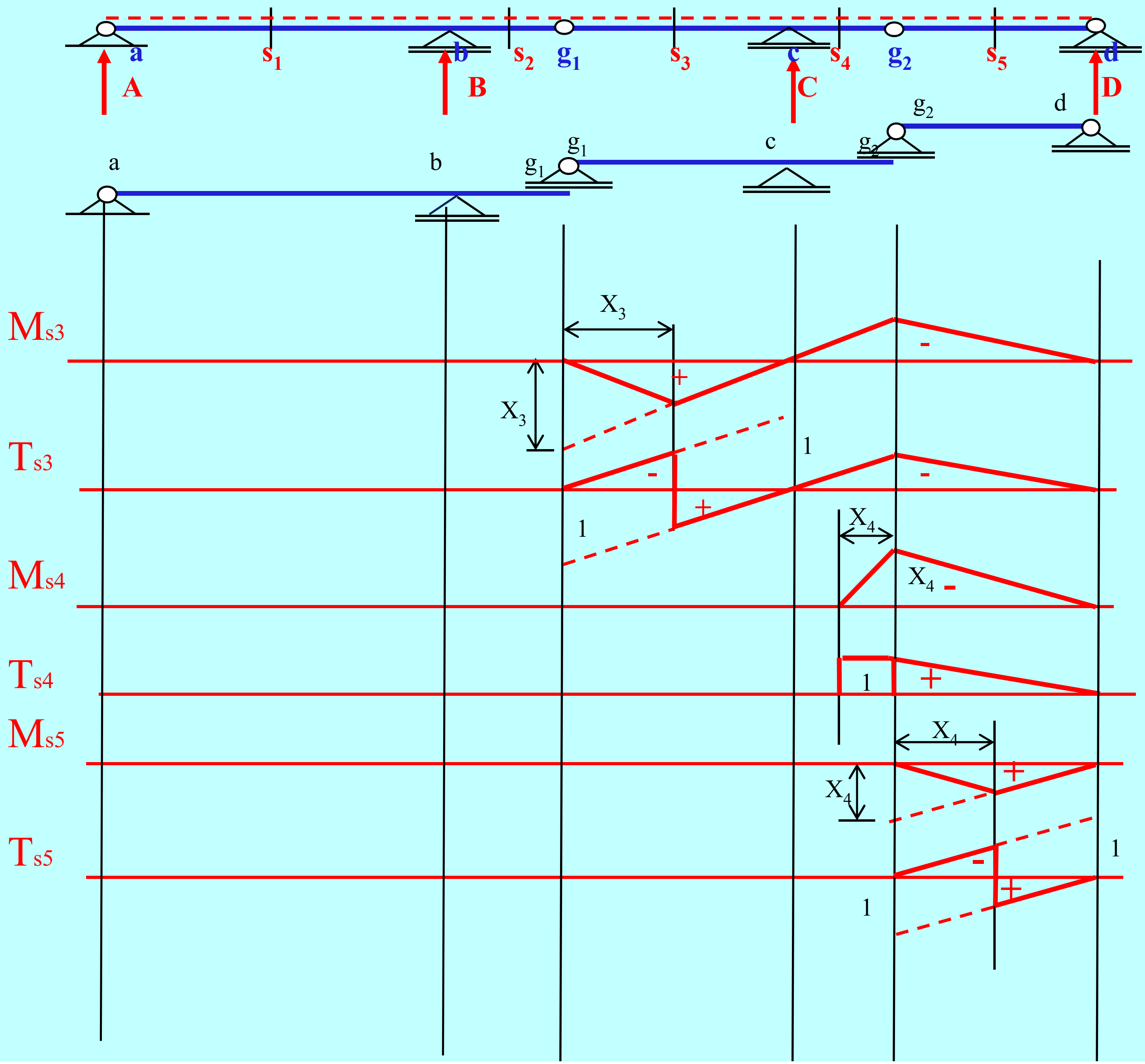
Uticajne linije za reakcije A i B imaju jediničnu vrijednost ordinate za položaj sile P iznad oslonca a, odnosno, oslonca b, i nulte vrijednosti ordinata za položaj sile P iznad oslonaca, b, c i d za reakciju A, odnosno, a,c id za reakciju B.

Duž svake krute ploče uticajna linija je prava.

Uticajna linija za reakciju C ima jediničnu vrijednost ordinate ispod oslonca c i nulte vrijednosti ispod oslonca d, dok uticajna linija za reakciju D ima jediničnu vrijednost ispod oslonca d .



a
s1
b
s2
g1
s3
c
s4
g2
s5
d
A
B
C
D
a
b
g1
g1
c
g2
g2
d
A
1
+
-
B
+
1
-
C
+
1
D
+
1
X1
Ms1
+
-
+
X1
Ts1
1
-
1
+
-
+
Ms2
X2
-
X2
Ts2
1
+
-

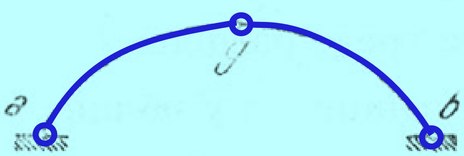


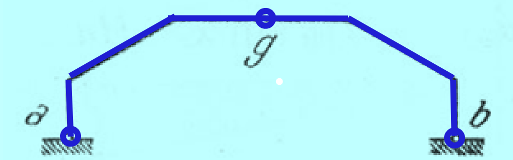
a
s_1
b
s_2
g_1
s_3
c
s_4
g_2
s_5
d
A
B
C
D
M_{s3}
T_{s3}
M_{s4}
T_{s4}
M_{s5}
T_{s5}
X_3
X_4
1
+
-

Nosači sa tri zgloba

Nosač sa tri zgloba sastoji se od dvije kinematički krute ploče koje su oslonjene na nepokretna ležišta a međusobno zglavkasto vezane

Ovakvi nosači mogu imati različite oblike lučne i okvirne nosače.





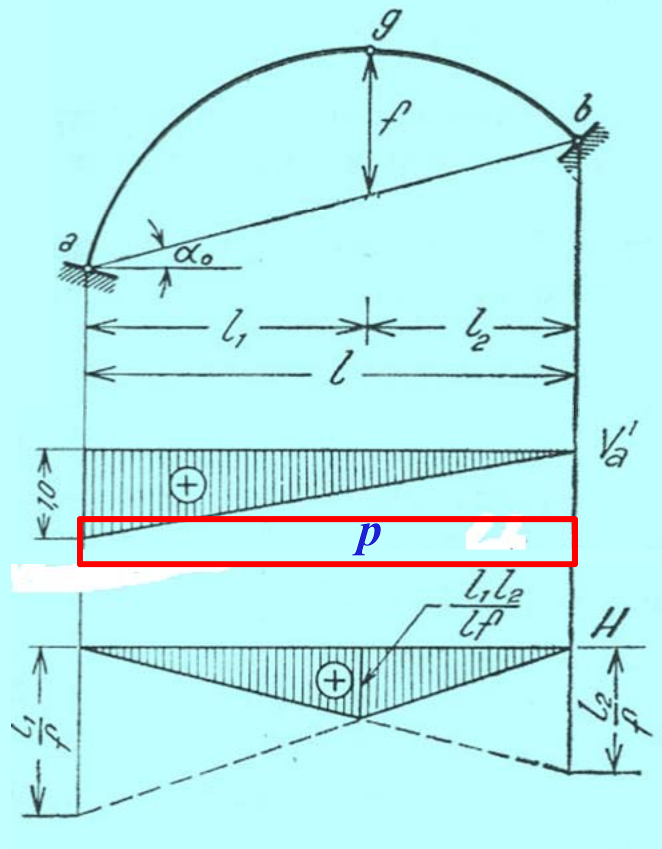
Nosači sa tri zgloba bitno se razlikuju od grednih nosača:

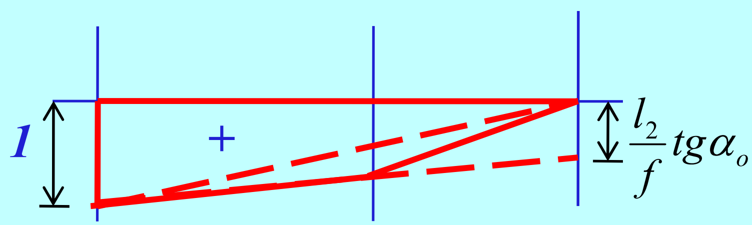
- ***reakcije oslonaca ovih nosača su kose pri bilo kom opterećenju, pa i pri vertikalnom opterećenju***
- ***Normalne sile u njima postoje uvijek i imaju bitan uticaj na dimenzije, za razliku od grednih nosača kod kojih su mjerodavni uticaji redovno samo momenti i transverzalne sile.***

To je naročito izraženo kod lučnih nosača kod kojih su normalne sile često značajnije od momenata savijanja.

Kako se oblik nosača može podesiti tako da pri nekom datom opterećenju postoje samo normalne sile koje izazivaju konstantne normalne napone pritiska u čitavom poprečnom presjeku, lučni nosači su veoma ***pogodni za konstrukcije u materijalima kao što su kamen, opeka i beton, koji podnose pritiske a ne trpe zatezanje****.*

Kada je opterećenje vertikalno, što je u praksi najčešći slučaj, reakcije Va' i Vb' jednake su reakcijama oslonaca proste grede pa su i uticajne linije za njih iste kao uticajne linije za reakcije proste grede.





$$V_a = V_a' + Htg\alpha_o$$

$$\mathrm{H} = \frac{\mathrm{M_{go}}}{\mathrm{f}}$$

$$V_a = V_a' + \frac{M_{go}}{f} tg\alpha_o$$

$$\max \mathrm{H_p} = \frac{\mathrm{p l_1 l_2}}{\mathrm{2f}}$$

Uticajne linije za presječne sile

M_c

$$M_c = M_{co} - Hy_c$$

uticajne linije za momenat savijanja u presjeku c mogu dobiti:

- **ordinata uticajnih linija za momenat M_{co} ekvivalentene proste grede,**
- **i ordinata uticajne linije za silu potisaka H pomnoženih sa $-y_c$.**

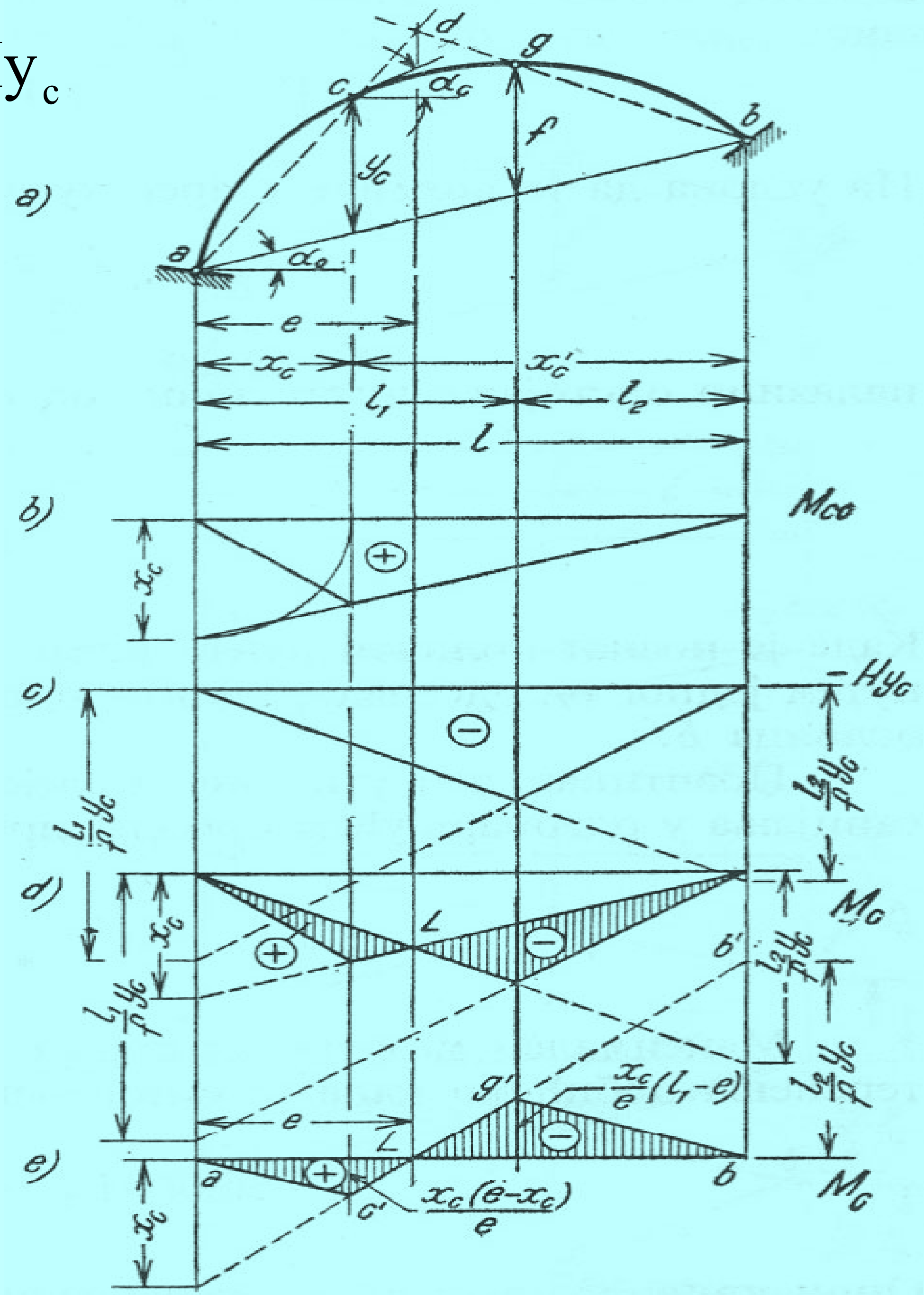
Kako su prve pozitivne a druge negativne, treba od ordinata uticajne linije M_{co} oduzeti ordinate uticajne linije za Hy_c

Sa slike se vidi da se ordinate uticajne linije na dijelu c-g linearno mijenjaju od vrijednosti $\boldsymbol{x_c}$ *ispod oslonca a do vrijednosti* $-\dfrac{l_2 y_c}{f}$ *ispod oslonca b.*

Kada ova dva odsječka spojimo pravom linijom, prava a'b', dio ove prave između presjaka c' i g' predstavlja uticajnu liniju za M_c na dijelu nosača od c do g.

Prave a-c ' i g'b su djelovi uticajne linije lijevo od presjeka c, odnosno, desno od zgloba g. Na ovaj način je uticajna linija redukovana na horizontalu.

$$M_c = M_{co} - Hy_c$$



a)
b)
c)
d)
e)
d
g
c
b
a
α_c
α_o
y_c
f
e
x_c
x_c'
l_1
l_2
l
M_{co}
$-Hy_c$
$\frac{l_1}{f}y_c$
$\frac{l_2}{f}y_c$
M_c
L
b'
g'
c'
$\frac{x_c}{e}(l_1-e)$
$\frac{x_c(e-x_c)}{e}$

Uticajna linija za momenat savijanja u presjeku c ima nultu tačku L koja se nalazi na vertikali presjeka d pravih a-c i g-b

Kada sila P=1 djeluje na dio c-g*, tako da joj napadna linija prolazi kroz tačku d, pravci reakcija su a-c i b-g, momenat savijanja je jednak nuli, time je dokazano da je položaj sile nulti položaj.*

Pri tom položaju sile P=1 reakcije oslonaca su:

$$M_b = 0$$

$$V_a' l - 1(l-e) = 0$$

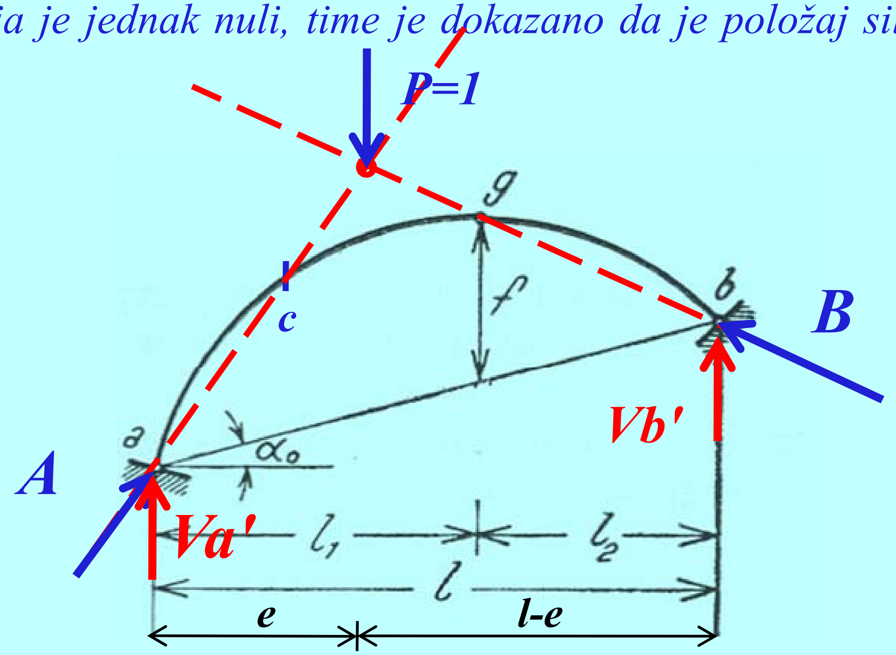
$$V_a' = \frac{l-e}{l}$$

$$M_a = 0$$

$$V_b' l - 1\, l = 0$$

$$V_b' = \frac{e}{l}$$

$$H = \frac{M_{go}}{f} = \frac{V_b' l_2}{f} = \frac{e l_2}{l f}$$



$$M_c = M_{co} - H y_c = V_a' x_c - H y_c = 0$$

$$M_c = \frac{l-e}{l} x_c - \frac{e l_2}{l f} y_c = 0$$

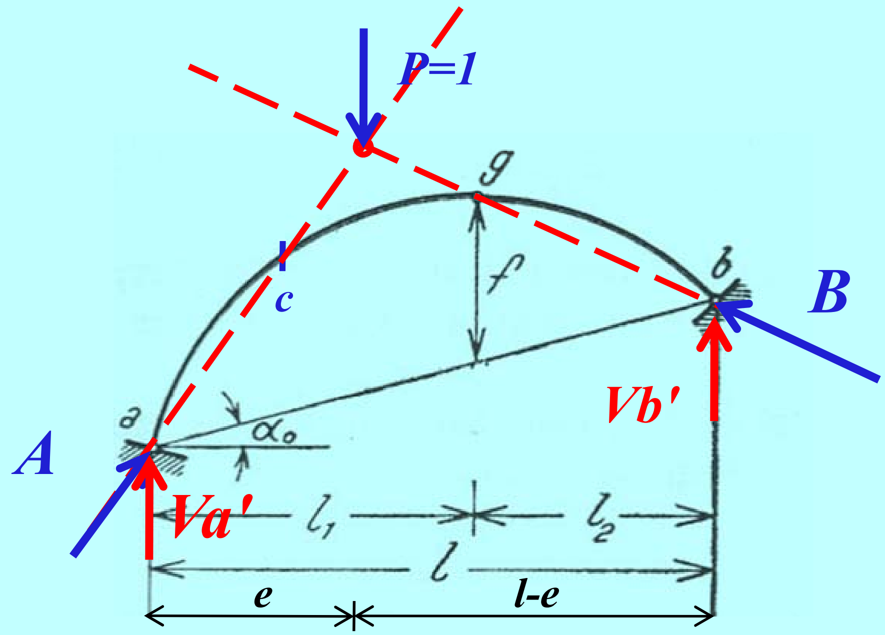
$$e = \frac{l}{1 + \frac{l_2}{f}\frac{y_c}{x_c}}$$

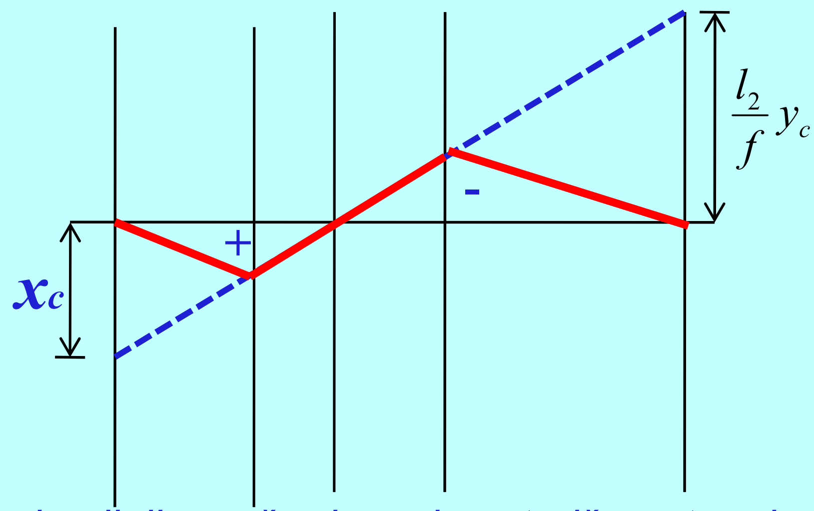
$$M_c = M_{co} - Hy_c$$

$$V_a' = \frac{1-e}{1} \qquad V_b' = \frac{e}{l}$$

$$H = \frac{el_2}{lf}$$

$$e = \frac{l}{1 + \frac{l_2}{f}\frac{y_c}{x_c}}$$





Kada je poznat položaj nulte tačke uticajna linija može da se konstruiše putem jednog odsječka, odsječka ispod oslonca a ili odsječka ispod oslonca b.

T_c

$$T_c = T_{co}\cos\alpha_c - H\frac{\sin(\alpha_c - \alpha_o)}{\cos\alpha_o}$$

$$T_c = T_{co}\cos\alpha_c - Ht_c \qquad \text{gdje je} \qquad t_c = \frac{\sin(\alpha_c - \alpha_o)}{\cos\alpha_o}$$

ordinate uticajne linije za transverzalnu silu u presjeku c mogu dobiti superpozicijom

- ***ordinata uticajne linije za transverzalnu silu T_{co} proste grede pomnoženih sa $\cos\alpha_c$***
- ***ordinata uticajne linije za potisak H pomnoženih sa $-t_c$***

Ordinate uticajne linije na dijelu c-g linearno mijenjaju od vrijednosti $\cos\alpha_c$ ispod oslonca a do vrijednosti $-l_2 t_c/f$ ispod oslonca b.

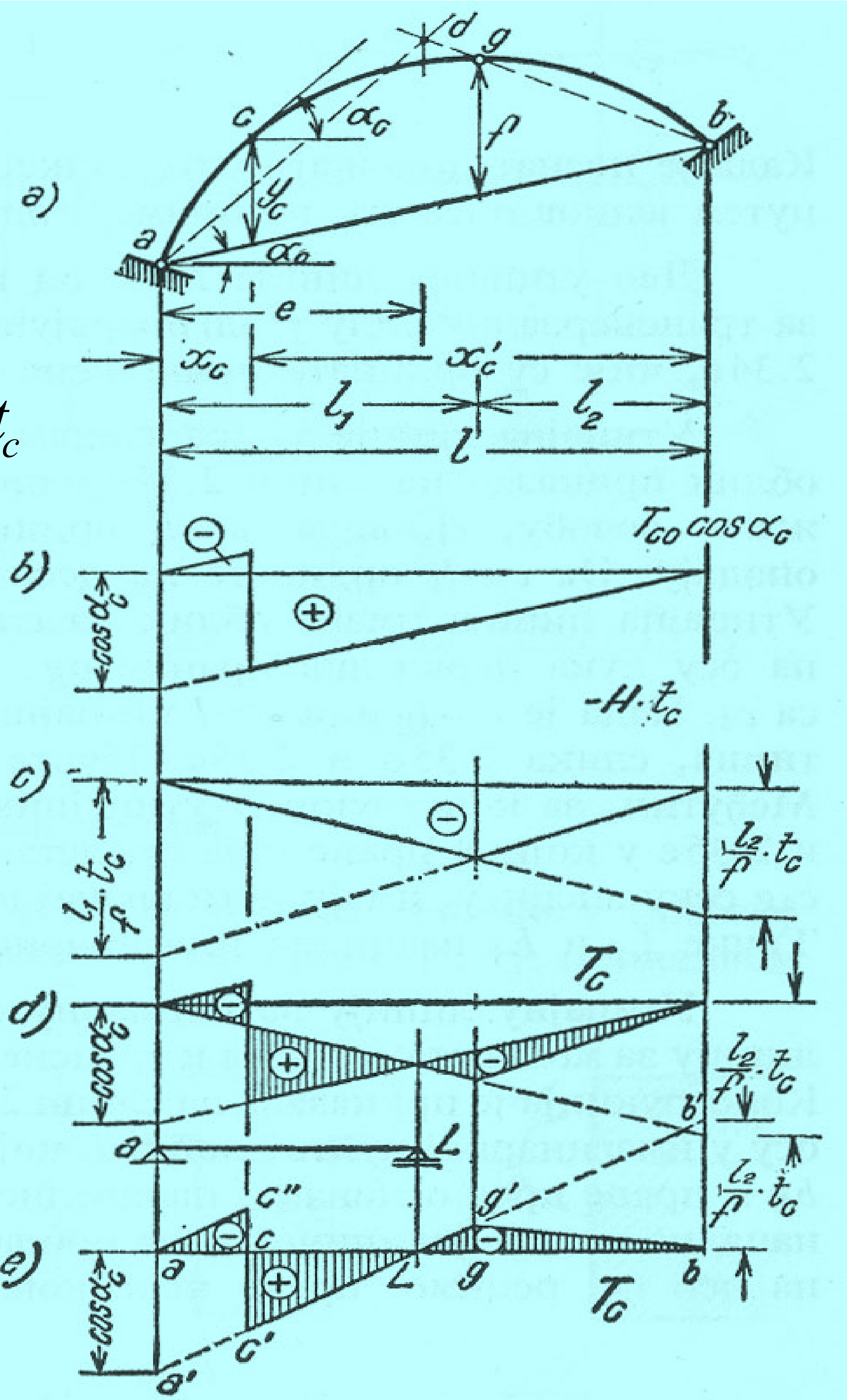
Prema tome ako ispod oslonca a nanesemo odsječak $\cos\alpha_c$ a ispod oslonca b odsječak $-l_2 t_c/f$ i te odsječke spojimo pravom a'-b' dio te prave predstavljaće granu uticajne linije za transverzalnu silu T_c na dijelu od c do g.

Prava koja je paralelno povučena pravoj a'-b' iz tačke a predstavljaće uticajnu linija za T_c lijevo od presjeka c, a prava g'-b uticajnu liniju desno od zgloba g.

Uticajna linija ima nultu tačku L koja se nalazi na vertikali presjeka d prave b-g i prave kroz oslonac a paralelne tamgenti na osu luka u tački c.

Kada sila P=1 djeluje na dio c-g tako da joj napadna linija prolazi kroz tačku d pravci reakcija su a-d i b-g.

$$T_c = T_{co}\cos\alpha_c - Ht_c$$

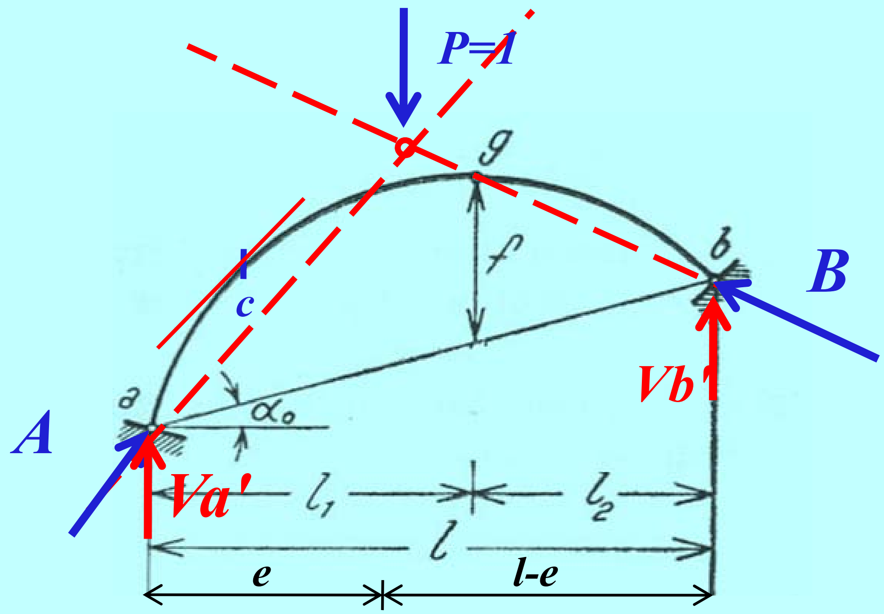


$$\mathrm{V_a}' = \frac{1-\mathrm{e}}{1} \qquad V_b' = \frac{e}{l} \qquad H = \frac{el_2}{lf}$$

$$T_c = T_{co}\cos\alpha_c - H\frac{\sin(\alpha_c-\alpha_o)}{\cos\alpha_o}$$

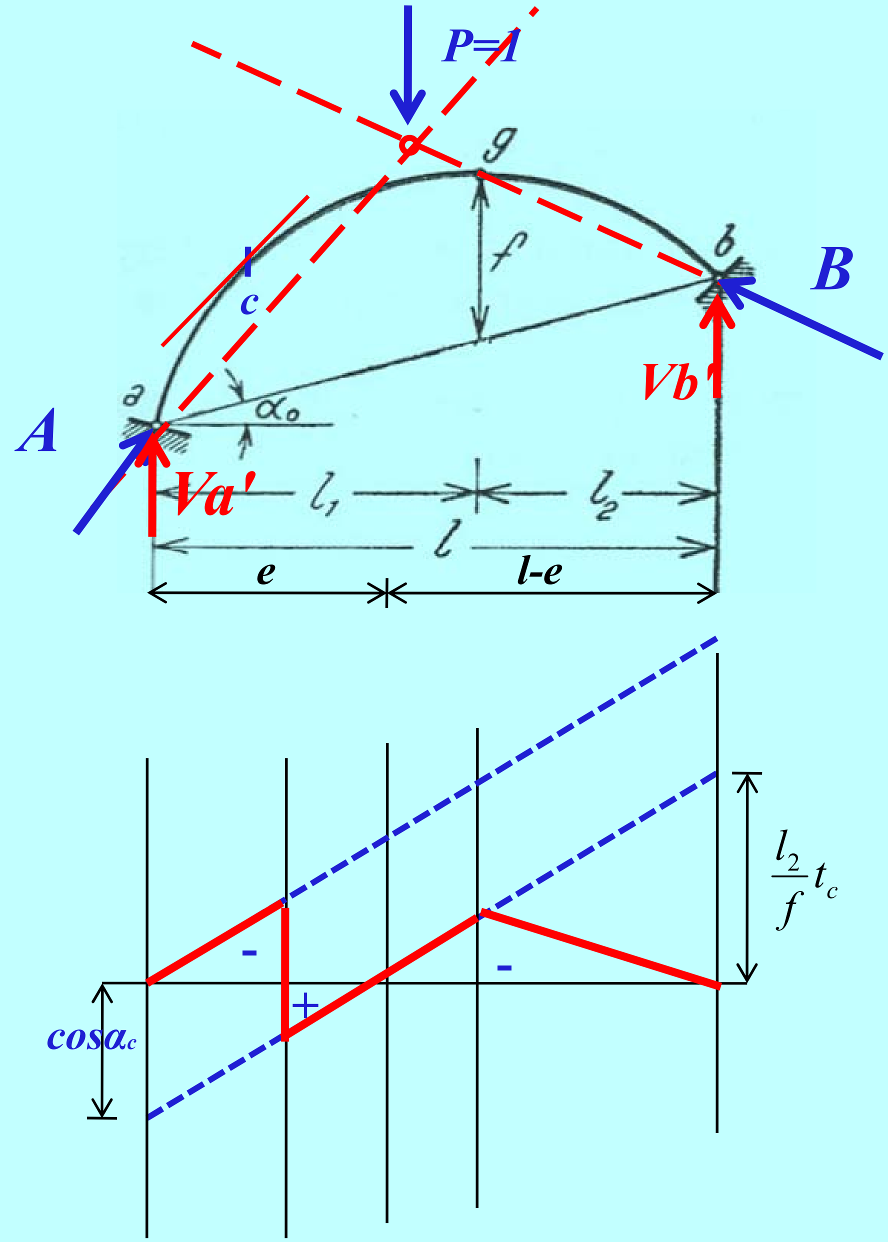
$$T_c = T_{co}\cos\alpha_c - Ht_c$$

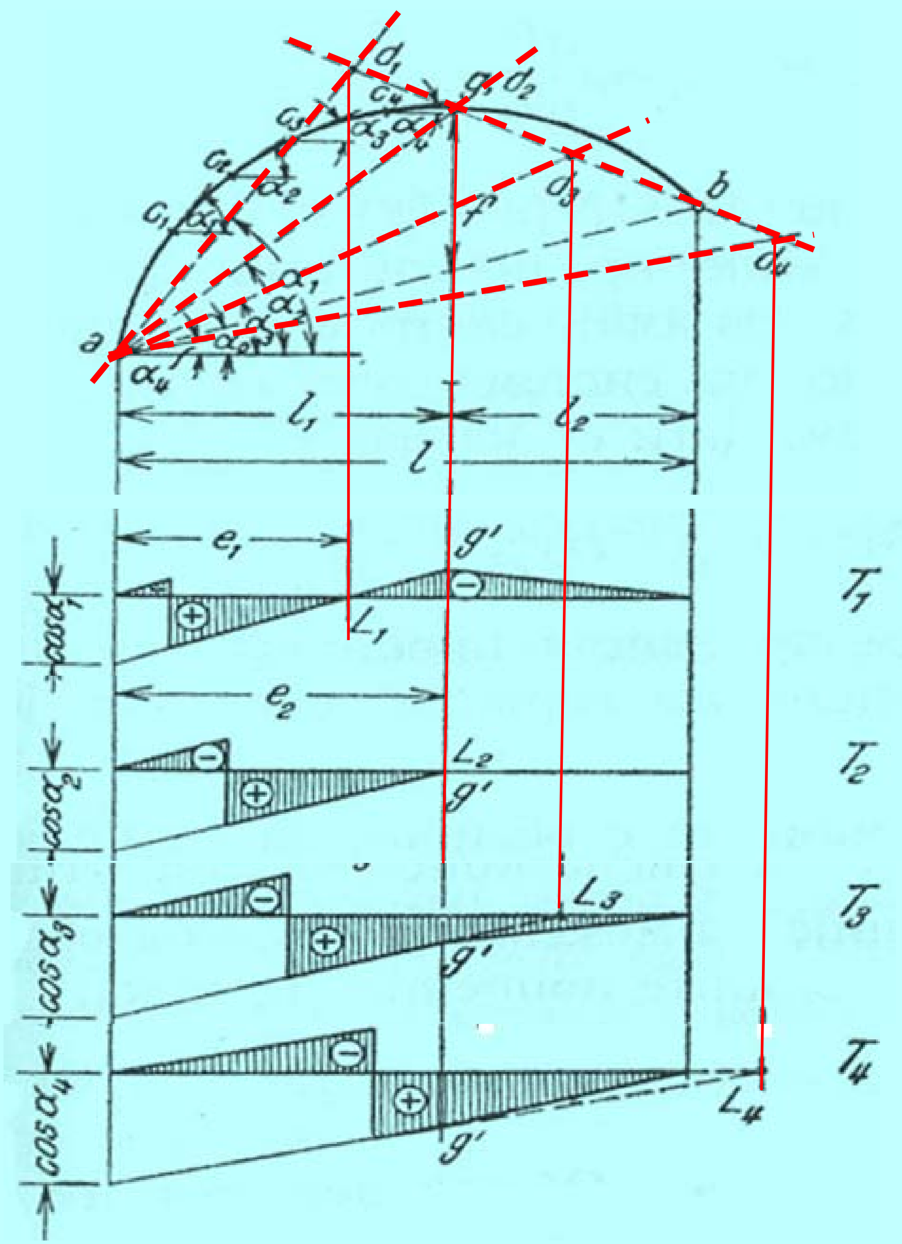
$$\mathrm{t_c} = \frac{\sin(\alpha_\mathrm{c}-\alpha_\mathrm{o})}{\cos\alpha_\mathrm{o}}$$



$$\mathrm{T_c} = \frac{1-\mathrm{e}}{1}\cos\alpha_\mathrm{c} - \frac{\mathrm{el_2}}{\mathrm{lf}}\mathrm{t_c} = 0 \qquad e = \frac{l}{1+\dfrac{l_2}{f}\dfrac{t_c}{\cos\alpha_c}}$$

$$T_c = T_{co}\cos\alpha_c - Ht_c$$



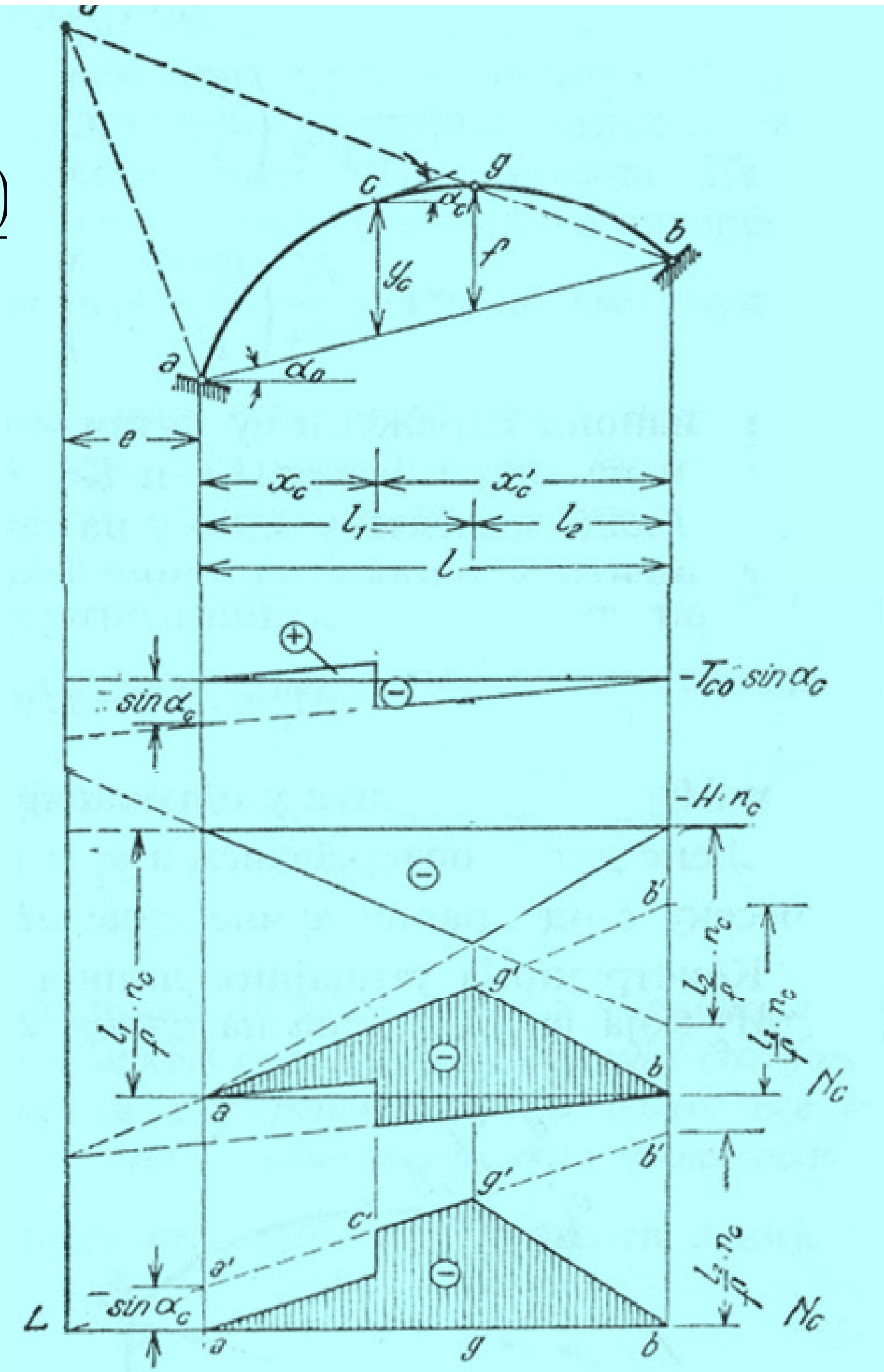


a
b
f
g
d_1
d_2
d_3
d_4
c_1
c_2
c_3
c_4
α_1
α_2
α_3
α_4
α_0
l_1
l_2
l
e_1
e_2
g'
L_1
L_2
L_3
L_4
T_1
T_2
T_3
T_4
$\cos\alpha_1$
$\cos\alpha_2$
$\cos\alpha_3$
$\cos\alpha_4$

Nc

$$N_c = -T_{co}\sin\alpha_c - H\frac{\cos(\alpha_c - \alpha_o)}{\cos\alpha_o}$$

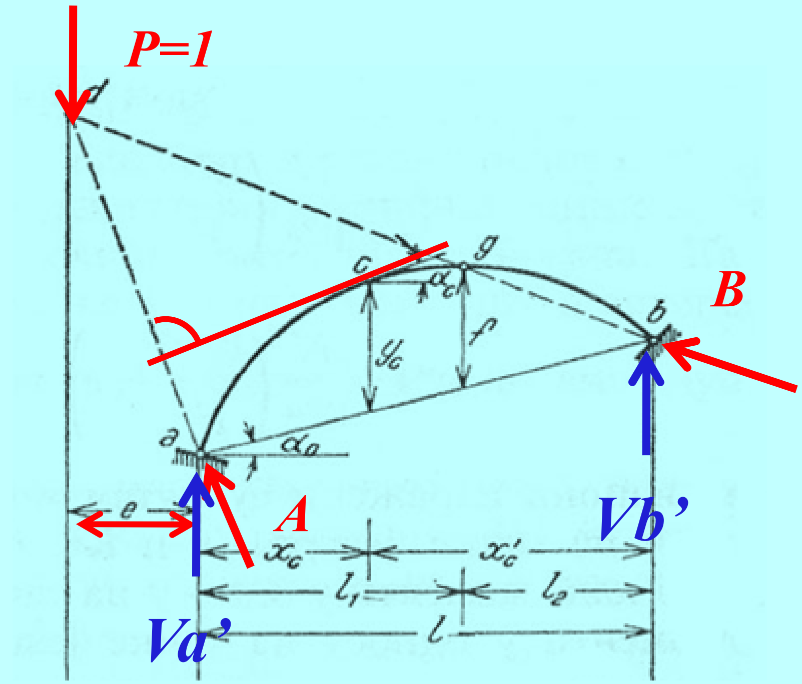
$$N_c = -T_{co}\sin\alpha_c - Hn_c$$



Nc

$$N_c = -T_{co}\sin\alpha_c - H\frac{\cos(\alpha_c - \alpha_o)}{\cos\alpha_o}$$

$$N_c = -T_{co}\sin\alpha_c - Hn_c$$



$$M_b = 0 \qquad \mathrm{V_a}' = \frac{1+\mathrm{e}}{1}$$

$$M_a = 0 \qquad V_b' = -\frac{e}{l}$$

$$H = \frac{M_{go}}{f} \qquad \mathrm{H} = -\frac{\mathrm{el_2}}{\mathrm{lf}}$$

$$\mathrm{N_c} = -\frac{1+\mathrm{e}}{1}\cos\alpha_\mathrm{c} + \frac{\mathrm{el_2}}{\mathrm{lf}}\mathrm{n_c} = 0$$

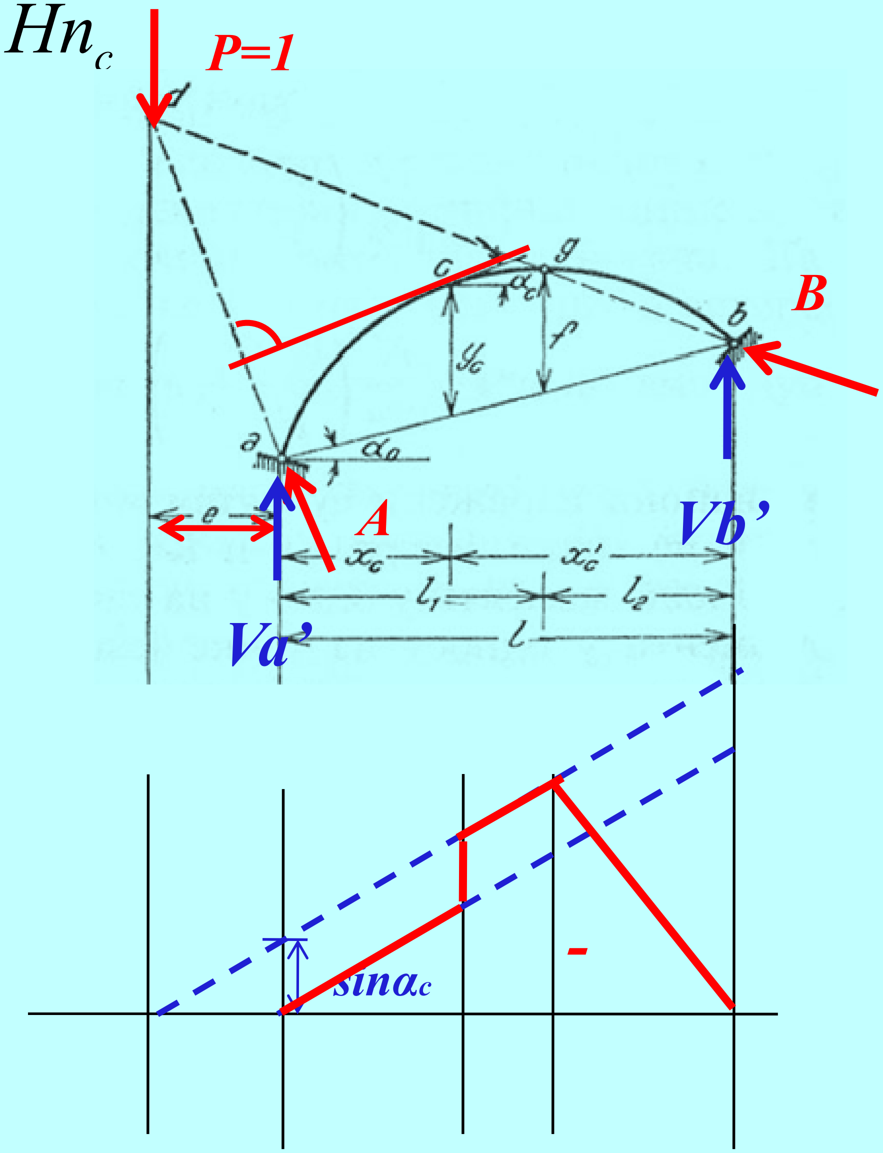
$$\mathrm{e} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{l_2}}{\mathrm{f}}\dfrac{\mathrm{n_c}}{\sin\alpha_\mathrm{c}} - 1}$$

Nc

$$N_c = -T_{co}\sin\alpha_c - H\frac{\cos(\alpha_c - \alpha_o)}{\cos\alpha_o}$$

$$N_c = -T_{co}\sin\alpha_c - Hn_c$$

$$e = \frac{1}{\frac{l_2}{f}\frac{n_c}{\sin\alpha_c} - 1}$$

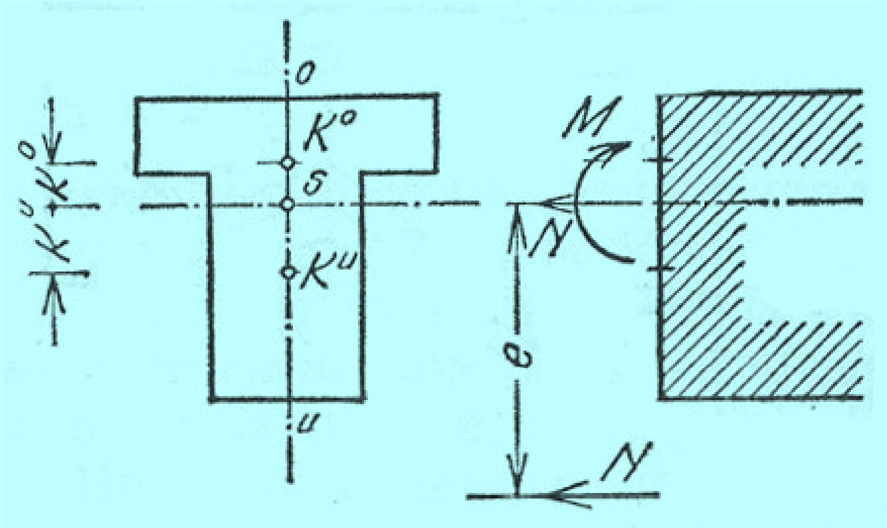


Momenti u odnosu na tačke jezgra

Iz Otpornosti materijala je poznato da su ivični naponi u presjeku koji je napadnut normalnom silom N i momentom savijanja M, tj. normalnom silom na odstojanju e=M/N od težišta presjeka dati izrazima:

$$\sigma^o = \frac{N}{F} - \frac{M}{W^o}$$

$$\sigma^u = \frac{N}{F} + \frac{M}{W^u}$$



Gdje su W^o i W^u otporni momenti poprečnog presjeka za gornju, odnosno, donju ivicu presjeka.

Iz ovih izraza vidimo da se u opštem slučaju ekstremne vrijednosti ivičnih napona neće javiti ni pri položaju opterećenja pri kome se javlja ekstremna vrijednost momenata savijanja.

Ekstremne vrijednosti ivičnih napona pojaviće se pri položajima opterećenja koji nijesu mjerodavni položaji za gornje sile u presjeku.

Poznatom transformacijom izraza:

$$\sigma^{o}=\frac{N}{W^{o}}\left(\frac{W_{o}}{F}-e\right)=\frac{N}{W^{o}}\left(k^{u}-e\right)=-\frac{M^{u}}{W^{o}}$$

$$\sigma^{u}=\frac{N}{W^{u}}\left(\frac{W^{u}}{F}+e\right)=\frac{N}{W^{u}}\left(k^{o}+e\right)=\frac{M^{o}}{W^{u}}$$

Ivični naponi izraženi su putem momenata s obzirom na tačke jezgra Ku i Ko

$$M^{u}=N\left(e-k^{u}\right) \qquad M^{o}=N\left(e+k^{o}\right)$$

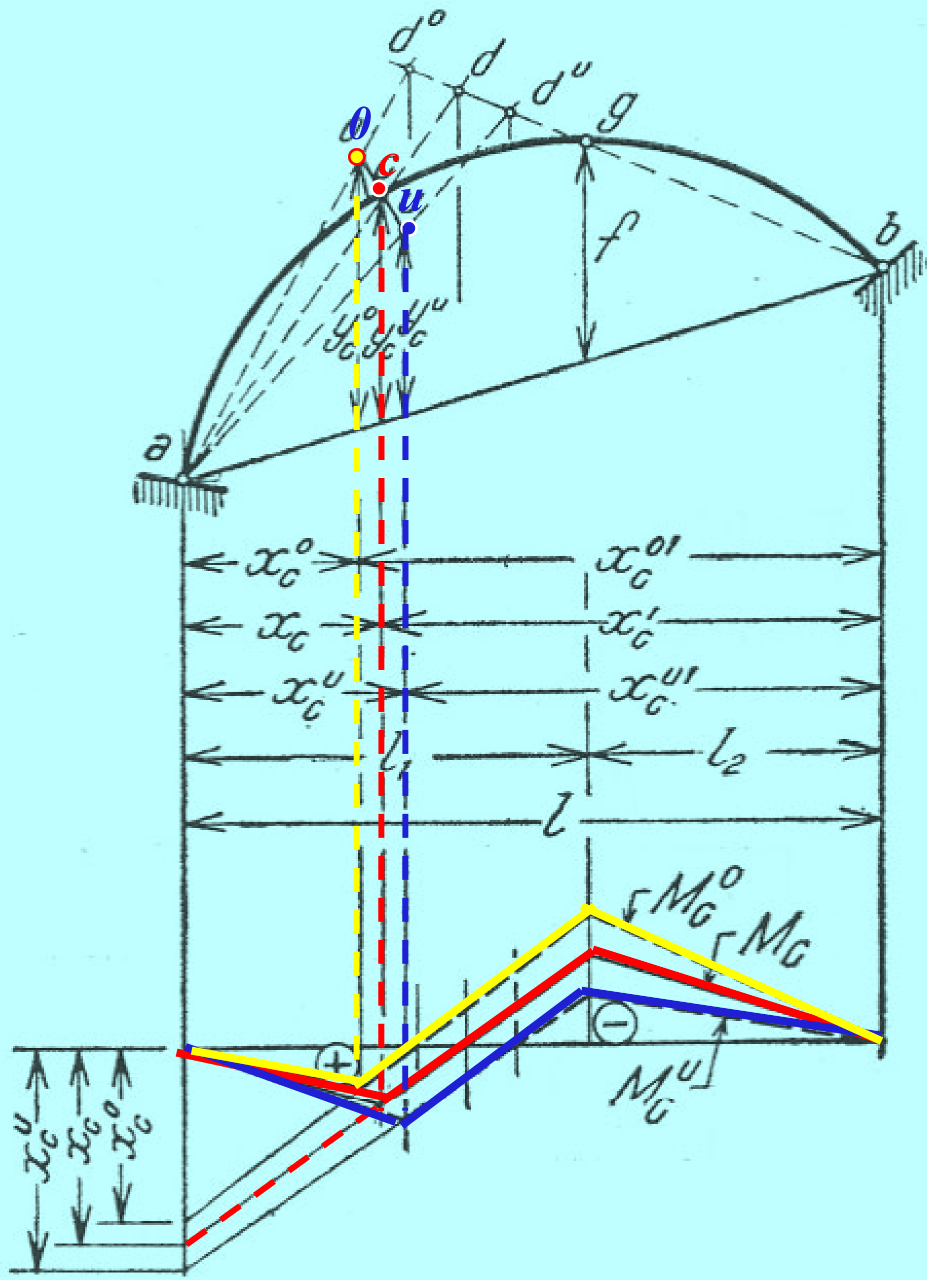
Ekstremne vrijednosti ivičnih napona dobićemo kada momenti u odnosu na tačke jezgra imaju ekstremne vrijednosti.

Momenti u odnosu na tačke jezra nosača luka sa tri zloba koji je opterećen vertikalnim opterećenjem, dati su izrazima:

$$M_{c}^{o}=M_{c0}^{o}-Hy^{o}{}_{c} \qquad M_{c}^{u}=M_{c0}^{u}-Hy^{u}{}_{c}$$

Gdje su $M^{o}{}_{c0}$ i $M^{u}{}_{c0}$ momenti u odgovarajućim presjecima proste grede raspona l opterećene datim opterećenjem a $y^{o}{}_{c}$ i $y^{u}{}_{c}$ odstojanja gornje i donje tačke jezgra u presjeku c od pravca lučne sile a-b.

Konstrukcija uticajnih linija za momente s obzirom na tačke jezgra M^o_c *i* M^u_c *koja je prikazana analogna je konstrukciji uticajne linije za momenat savijanja s obzirom na težište poprečnog presjeka.*



Luk sa tri zgloba sa zategom

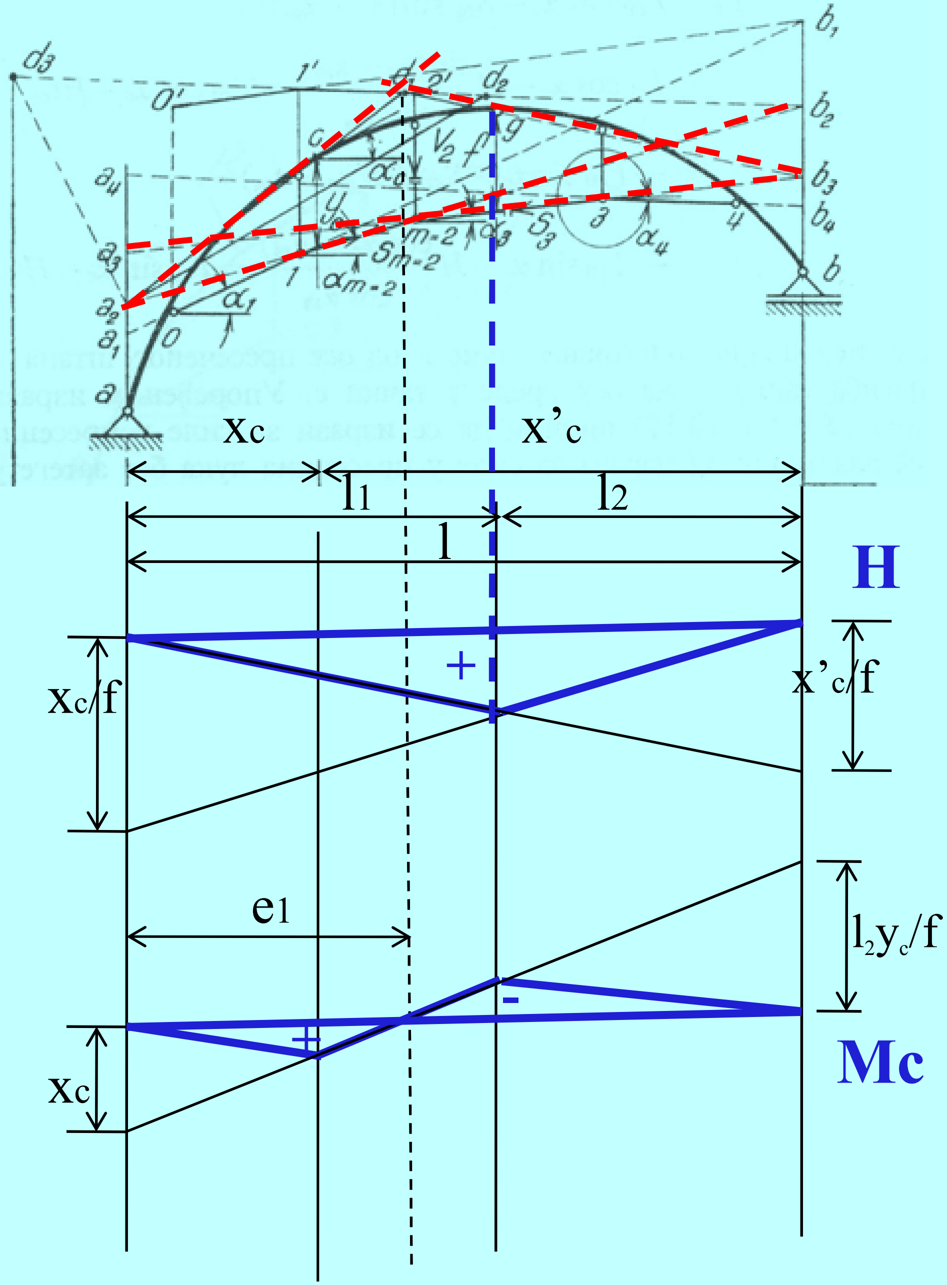
Uticajna linija za horizontalnu komponentu H sile u zatezi ista je kao uticajna linija sile potiska kod luka, čija je strijela jednaka vertikalnom rastojanju zgloba g od ose onog štapa zatege koji se nalazi na vertikali kroz zglob g.

Uticajne linije za sile u prostim štapovima prikazuju se u funkciji od sile H množeći ordinate uticajne linije odgovarajućim multiplikatorima. shodno izrazima:

$$S_m = \frac{H}{\cos\alpha_m}$$

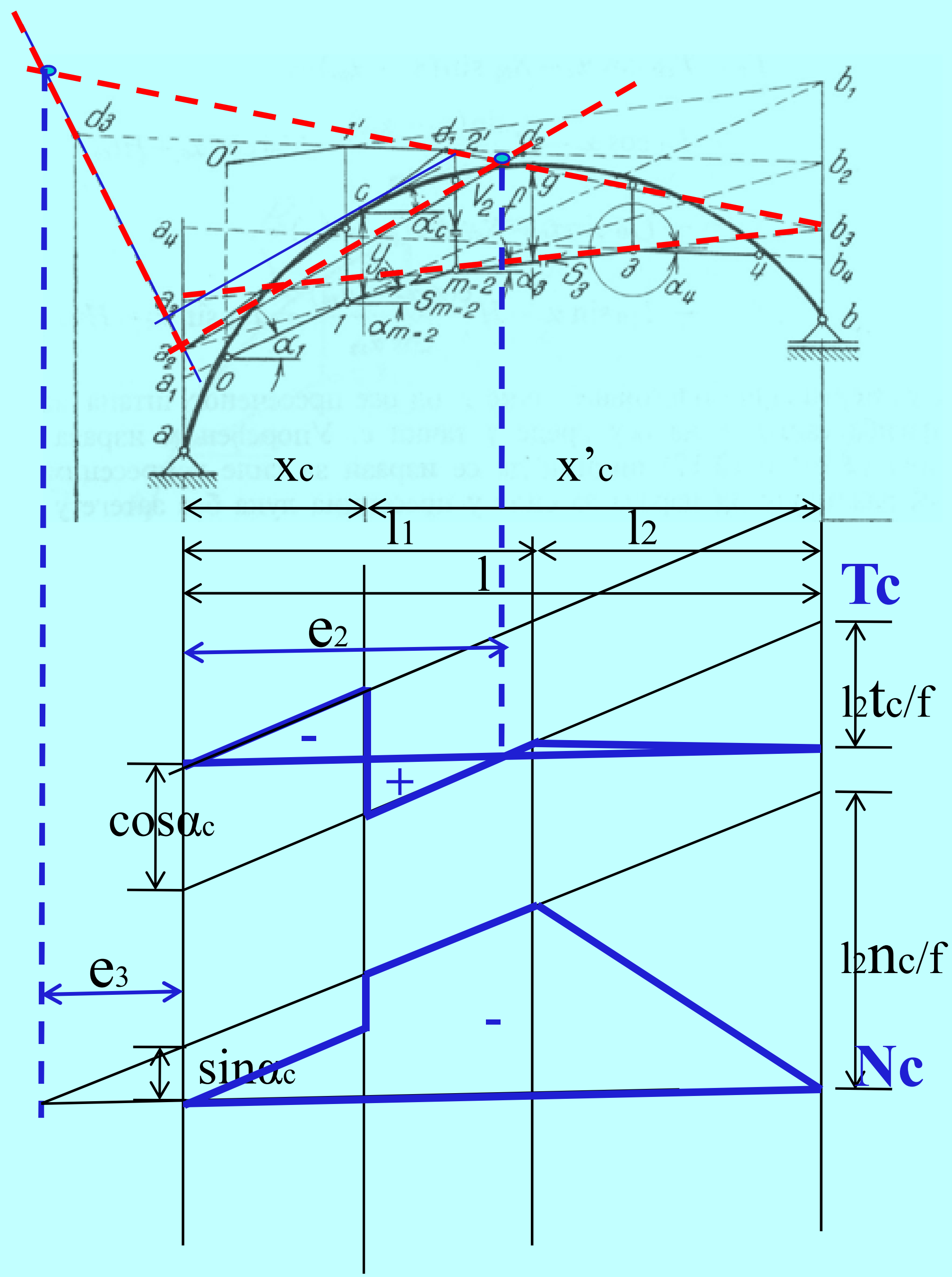
$$V_m = H\left(\mathrm{tg}\,\alpha_{m+1} - \mathrm{tg}\,\alpha_m\right)$$

$$M_c = M_{co} - H y_c$$



Konstrukcija uticajnih linija sa presječne sile pomoću odsječaka na vertikalama kroz oslonce a i b slična je konstrukciji uticajnih linija luka na tri zgloba.

Odstojanja nultih tačaka dobijamo tako što u izraze za veličinu **e umjesto α_o unesemo ugao α_m**, pri čemu je y_m odstojanje težišta presjeka s od ose presečenog štapa zatege.



Langerova greda

Uticajna linija za momenat u presjeku s horizontalni potisak poligonalnog luka H svemu je isti izrazima za iste te sile ***luka a-g′-b.***

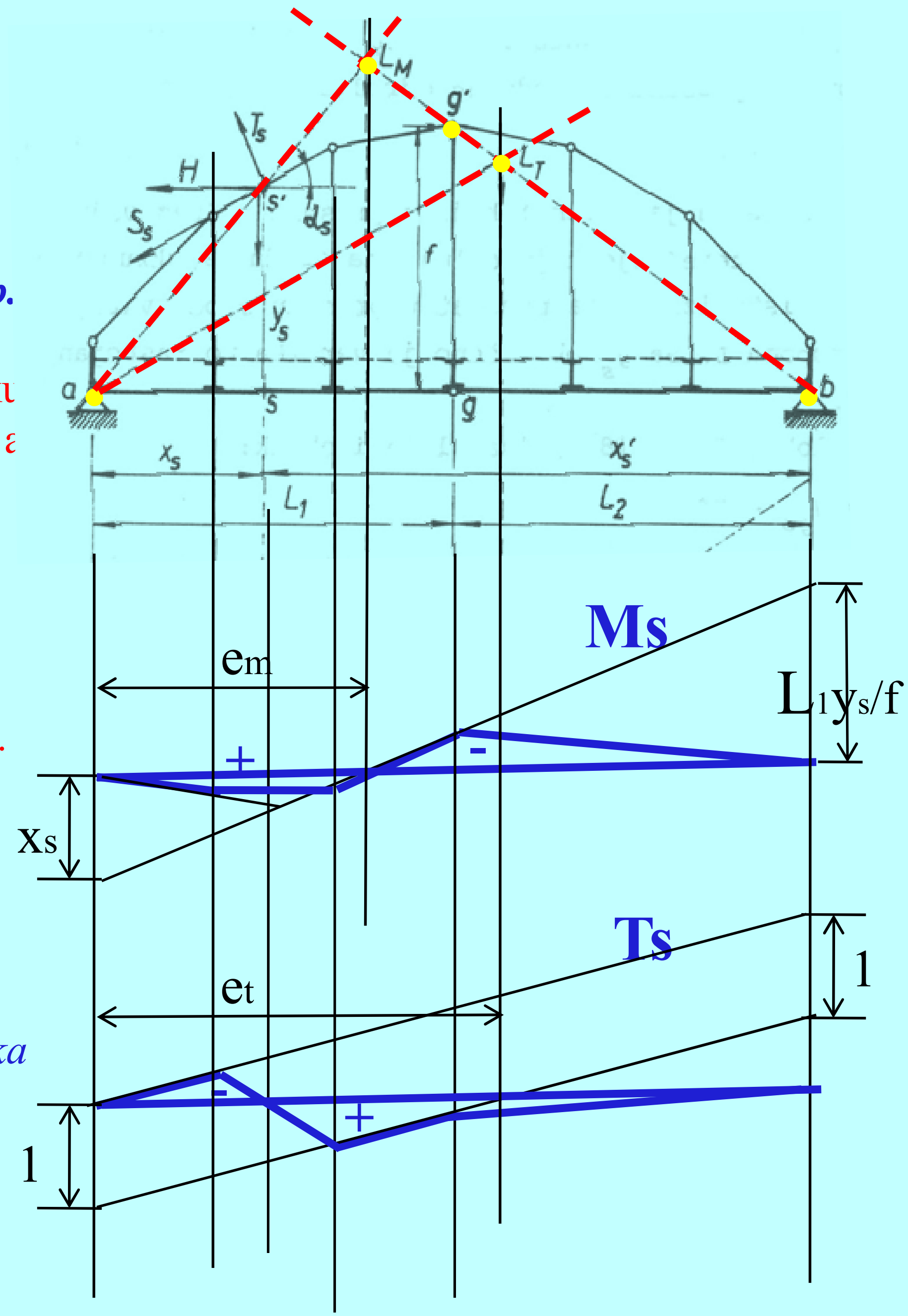
Uticajna linija za transverzalnu silu u presjeku s je slična uticajnoj liniji ekvivalentnog luka a iz izraza:

$$T_s = \frac{T_{sl}}{\cos\alpha_s}$$

ordinate na vertikalama kroz oslonce a i b su:

$$\frac{1\cos\alpha_s}{\cos\alpha_s} = 1 \qquad \frac{-1\cos\alpha_s}{\cos\alpha_s} = -1$$

Položaj razdjelnica određujemo kao kod luka na tri zgloba.



Lančani most sa gredom za ukrućenje

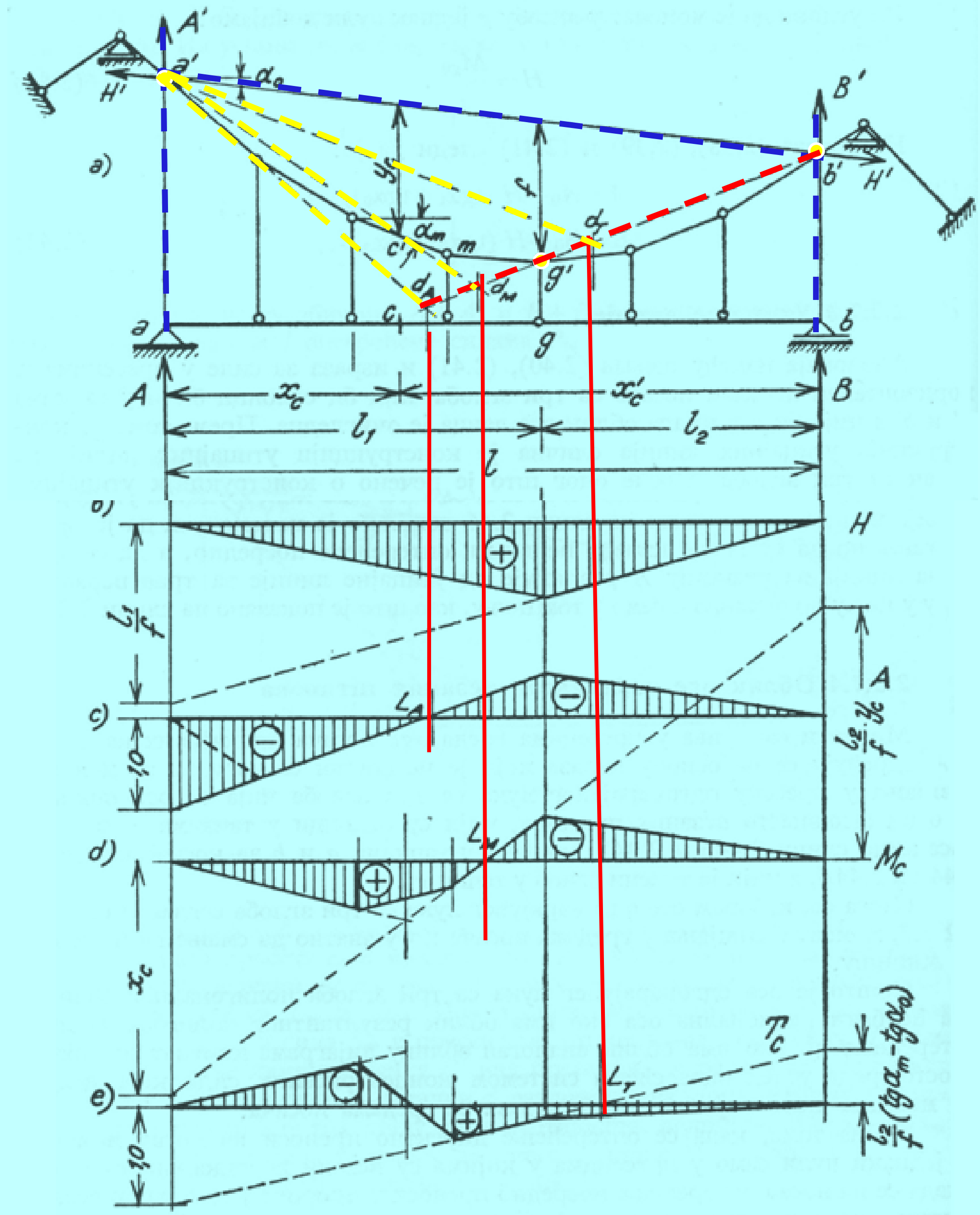
$$M_g = M_{go} - H\,f = 0 \qquad H = \frac{M_{go}}{f}$$

$$A = A_o - H(\mathrm{tg}\alpha_2 - \mathrm{tg}\alpha_o)$$

$$B = B_o - H(\mathrm{tg}\alpha_2 - \mathrm{tg}\alpha_o)$$

$$M_s = M_{so} - H\,y_s$$

$$T_s = T_{so} + H(\mathrm{tg}\alpha_o - \mathrm{tg}\,\alpha_s)$$



Poligonalni luk sa gredom za ukrućenje iznad luka

Ekvivalentni luk na tri zgloba a'-g'-b'.