

IV Predavanje - zadaci

Pretvaranje ugla iz seksagezimalnog u dekadni oblik

Za praktična računanja na džepnom kalkulatoru ili računaru potrebno je ugao iz seksagezimalnog oblika pretvoriti u dekadni oblik prije bilo kakve aritmetičke operacije ili trigonometrijske funkcije. Takođe, kao rezultat neke računske operacije ili funkcije gdje se dobija neki ugao, on će se dobiti u dekadnom obliku, dok je za zapisivanje rezultata potrebno ugao iz dekadnog oblika pretvoriti u seksagezimalni oblik.

Dekadni oblik vrijednosti ugla je takav gdje su djelovi stepena umjesto u minutima i sekundama dati u desetim, stotim, hiljaditim itd. djelovima stepena. Ako je poznato da je 30' jedna polovina od 60' tj. jednog stepena, onda se ugao od 48°30' (u seksagezimalnom zapisu) može napisati kao 48,50° (u dekadnom zapisu). Treba primijetiti da se u dekadnom obliku za uglovne jedinice koriste samo stepeni, bez minuta i sekundi, ali sa određenim brojem decimala iza cijelog broja stepeni.

Za pretvaranje ugla iz seksagezimalnog oblika (stepeni-minuti-sekundi) u dekadni oblik (stepeni) može se upotrijebiti sledeća formula:

$$\text{dekadni_oblik} = \text{stepeni} + \frac{\text{min uti}}{60} + \frac{\text{sekundi}}{3600}$$

Koristeći datu formula, ugao 83°57'46", dat u seksagezimalnom obliku će u dekadnom zapisu biti:

$$83^\circ + \frac{57}{60} + \frac{46}{3600} = 83,96278^\circ$$

Dobijeni rezultat se po pravilima zaokruživanja ostavlja na minimum 5 decimala.

Za ovaj postupak, na džepnim kalkulatorima (digitronima) postoje već ugrađene funkcije koje ubrzavaju postupak računanja sa uglovnim vrijednostima. Prema načinu na koji se koristi ova funkcija postoje generalno dvije vrste ručnih kalkulatora (u daljem tekstu kalkulatora), kod kojih se značajno razlikuje postupak pretvaranja uglova iz dekadnog u seksagezimalni zapis i obratno.

Prvu grupu kalkulatora čine kalkulatori firme *Casio* i njihove kopije. Za pretvaranje uglova u dekadni oblik se koristi funkcija koja se poziva tasterom . Na Slici 1 prikazan je najčešći položaj ovog tastera na tastaturi kalkulatora prve grupe.



Slika 1. Položaj tastera za pretvaranje uglova u dekadni oblik na tastaturi kalkulatora prve grupe

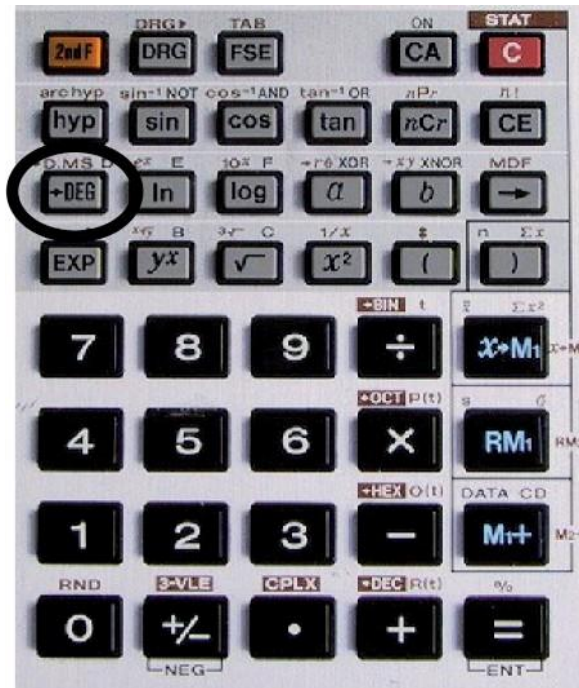
Kod ove grupe kalkulatora ugao se unosi na sledeći način: ukuca se broj stepeni, zatim se pritisne taster , nastavi se sa ukucavanjem minuta nakon kojih se ponovo pritisne taster  i na kraju se ukuca broj sekundi pa se treći put pritisne taster . Za ugao iz prethodnog primjera to će biti:

835746, na ekranu kalkulatora će biti ispisano $83^{\circ}57'46''$. Ovdje ne treba da zbunjuje što iza broja minuta i sekundi stoji oznaka za stepen - $^{\circ}$. Ovo je zbog toga što većina ekrana na kalkulatorima ne podržava rezoluciju za ' i '' (na nekima je i ova rezolucija podržana). Ovako unijet ugao može dalje da se koristi za računске operacije ili za računanje vrijednosti trigonometrijskih funkcija. Vrijednost ugla u dekadnom obliku se može vidjeti pritiskom na taster . Ponovnim pritiskom na isti taster se opet prikazuje ugao u seksagezimalnom obliku:

$$83^{\circ}57'46'' \quad \text{83.96277778} \quad 83^{\circ}57'46''$$

Napomena: kod starijih modela kalkulatora iz ove grupe će za prikaz ugla u seksagezimalnom obliku biti potrebno da se pritisne prvo taster  (upisano "shift na samom tasteru ili iznad njega) a zatim taster . Inače taster  služi za pozivanje funkcija ispisanih iznad tastera. Pritiskom na njega pa na drugi taster, kalkulator će izvršiti funkciju ispisanu iznad tog drugog tastera.

Kod druge grupe kalkulatora za pretvaranje uglova u dekadni oblik koristi se taster . Na Slici 2 je prikazan uobičajeni položaj ovog tastera.



Slika 2. Položaj tastera za pretvaranje ugla u dekadni oblik na tastaturi kalkulatora druge grupe

Kod ove grupe kalkulatora se pretvaranje ugla u dekadni oblik vrši na sledeći način: ukuca se broj stepeni, zatim se ukuca decimalna tačka, na prva dva decimalna mjesta se ukuca broj minuta, na treće i četvrto decimalno mjesto se ukuca broj sekundi. Pritiskom na taster  se dobija ugao u dekadnom obliku:

83.5746  83.96277778

Ovdje se mora voditi računa da ukoliko je jednocifren broj minuta ili sekundi, mora se ispred ukucati nula, kako bi minute i sekunde došle na pravo decimalno mjesto. Primjer, pretvaranje ugla od $29^{\circ} 2' 1''$ u dekadni oblik:

29.0201  29.0336111

Unosom vrijednosti 29.21 bi se dobio dekadni oblik ugla $29^{\circ}21'00''$

29.21  29.35

Pretvaranje ugla iz dekadnog u seksagezimalni oblik

Pretvaranje ugla iz dekadnog u seksagezimalni oblik, ukoliko na kalkulatoru ne postoji funkcija za ovu operaciju se izvodi u nekoliko koraka:

- U prvom koraku, cjelobrojni dio dekadnog zapisa (broj ispred decimalne tačke) se zapiše kao broj stepeni.
- Decimalni dio dekadnog zapisa (brojevi iza decimalne tačke) se pomnoži sa 60. Cjelobrojni dio se zapiše kao broj minuta.
- Decimalni dio kod računanja minuta se pomnoži sa 60. Dobijena vrijednost, zaokružena na cio broj predstavlja broj sekundi.

Primjer: Pretvaranje ugla 83.962778° u seksagezimalni oblik (stepeni minute sekunde).

1. korak:

Vrijednost 83.962778, zapiše se kao broj stepeni 83, za drugi korak ostaje decimalni dio 0.962778.

2. korak:

$0.962778 \cdot 60 = 57.76668$, zapiše se kao broj minuta 57, za treći korak ostaje decimalni dio 0.76668

3. korak:

$0.76668 \cdot 60 = 46.0008$, vrijednost se zaokružuje na cio broj i zapiše se kao broj sekundi 46. Dobijeni rezultat je $83^\circ 57' 46''$.

Ovaj postupak je mnogo brži i jednostavniji koristeći kalkulator koji ima ugrađenu funkciju za pretvaranje dekadnog oblika u seksagezimalni.

Kod prve grupe kalkulatora se ugao u dekadnom obliku prikazuje u seksagezimalnom obliku pritiskom tastera  ili kombinacijom tastera  ("shift") i  kod starijih modela.

Primjer: 83.962778  $83^\circ 57' 46''$.

Napomena: kod ove vrste kalkulatora, ugao u radnoj memoriji ostaje u dekadnom obliku. Primjenom tastera  se samo na displeju kalkulatora prikazuje u seksagezimalnom obliku. Ugao se i dalje može koristiti za neki sledeći korak računanja bez dodatnog pretvaranja.

Kod druge grupe kalkulatora, za pretvaranje ugla iz dekadnog u seksagezimalni oblik koristi se druga funkcija na tasteru . Druga funkcija se dobija pritiskanjem tastera  i zatim tastera . Taster  (second function) ima sličnu ulogu kao taster . On poziva funkciju ispisanu iznad tastera pritisnutog nakon njega. Dobijeni rezultat treba zaokružiti na 4 decimale gdje će cjelobrojni dio će prikazivati broj stepeni, prve dvije decimale broj minuta a treća i četvrta decimala će prikazivati broj sekundi.

Primjer računanja:

86.962778   86.5746

Kao rezultat se dobija ugao $83^{\circ} 57' 46''$.

Primjeri nekih računanja sa uglovima

Ukoliko želimo da sračunamo razliku dva ugla opet je različit postupak kod različitih vrsta kalkulatora.

Prva grupa kalkulatora:

Od vrijednosti ugla $109^{\circ} 23' 08''$ oduzimamo ugao $64^{\circ} 47' 51''$.

109  23  08 , prikaže se $109^{\circ} 23' 08''$  64  47  51 
($64^{\circ} 47' 51''$).

Pritiskom na  dobija se rezultat u obliku $44^{\circ} 35' 17''$.

Dakle, rezultat je $44^{\circ} 35' 17''$.

Druga grupa kalkulatora:

109.2308  109.38556  64.4751  64.7975  44.58806   44.3517

Dakle, rezultat je $44^{\circ} 35' 17''$.

Isti je postupak i kada se vrši sabiranje uglova.

I kod računanja trigonometrijskih funkcija datog ugla različiti su postupci kod različitih vrsta kalkulatora.

Dat je ugao $42^{\circ} 57' 53''$. Sračunati vrijednost funkcije sinus.

Prva grupa kalkulatora:

 42  57  53  (prikaže se: $\sin 42^{\circ} 57' 53''$), pritiskom na  dobija se rezultat u obliku 0.681547926.

Kod starijih modela kalkulatora se prvo unese vrijednost ugla i nakon toga se pozove funkcija sinus:

42  57  53   prikazuje se rezultat u obliku 0.681547926.

Druga grupa kalkulatora:

42.5753  42.964722  0.681547926

Za praktična računanja u geodeziji, vrijednosti trigonometrijskih funkcija se zaokružuju na najmanje pet decimala. Zapiše se rezultat 0.68155.

Na sličan način se računaju i vrijednosti za kosinus i tangens.

U sledećem primjeru prikazano je računanje vrijednosti ugla za datu vrijednost funkcije tangens. Ova kalkulacija se javlja prilikom računanja vrijednosti direkcionog ugla.

Data je vrijednost trigonometrijske funkcije tangens: $\text{tg}\alpha=0.94238$. Kako bi se odredila vrijednost ugla α koristi se funkcija arctg (arkus-tangens).

Prva grupa kalkulatora:

 0.58793 (prikaže se $\tan^{-1} 0.58793$), pritiskom na  dobija se rezultat u dekadnom obliku 30.45255. Pritiskom na taster  se dobija $30^{\circ}27'09^{\circ}$ - seksagezimalni oblik.

Kod starijih modela kalkulatora se prvo unese vrijednost funkcije i nakon toga se pozove funkcija arctg:

0.58793  dobije se rezultat u dekadnom obliku 30.45255, pritiskom na  se dobija $30^{\circ}27'09^{\circ}$.

Druga grupa kalkulatora:

0.58793  dobije se rezultat u dekadnom obliku 30.45255. Pritiskom na  se dobija 30.2709 – seksagezimalni oblik.

Dakle, rezultat je $30^{\circ}27'09''$.

Na ovaj način računaju se i vrijednosti uglova ukoliko su date vrijednosti sinusa i kosinusa istih.

Pretvaranje uglova iz jednih jedinica u druge

1. Dati su uglovi: $\alpha=85^{\circ}29'58''$, $\beta=241^{\circ}97'41''$, $\gamma= 2.874562$ rad.

Sračunati ugao α u gradusima i radijanima, β u stepenima i radijanima i γ u stepenima i gradusima i naći njihovu sumu u svim jedinicama.

Za rješavanje ovog zadatka potrebna je opšta proporcija po kojoj jedan isti ugao zauzima procentualno isti dio punog kruga ma u kojim jedinicama da se izražava

$$\frac{\alpha^{\circ}}{360} = \frac{\alpha^g}{400} = \frac{\alpha^{rad}}{2\pi}.$$

Iz ove proporcije dobija se odnos ugla u stepenima sa istim u gradusima i radijanima:

$$\alpha^g = \frac{400}{360} * \alpha^{\circ} = \frac{10}{9} * \alpha^{\circ},$$

$$\alpha^{rad} = \frac{2\pi}{360} * \alpha^{\circ} = \frac{\pi}{180} * \alpha^{\circ}$$

Da bi se izvršila ova računanja potrebno je na način kako je objašnjeno, predhodno ugao α iz seksagezimalnog pretvoriti u dekadni zapis.

Uvrstivši datu vrijednost ugla α u stepenoj podjeli dobija se njegova vrijednost u gradusnoj:

$$\alpha^g = \frac{10}{9} * 85^{\circ}29'58'' = \frac{10}{9} * 85.49944^{\circ} = 94.99938^g = 94^g 99^c 94^{cc}$$

Napomena: Pretvaranje dekadne u centezimalnu podjelu kod gradusa je jednostavno. Pošto je osnova broj 100 tada treba samo odvojiti prve dvije cifre iza decimalnog zareza za gradusne minute i sledeće dvije za gradusne sekunde. Pri ovom poslednjem treba voditi računa o zakruživanju cifara i o nulama.

Primjeri: $29.03592^g = 29^g 03^c 59^{cc}$ $197.970151^g = 197^g 97^c 02^{cc}$.

U radijanskoj podjeli:

$$\alpha^{rad} = \frac{\pi}{180} * 85^{\circ}29'58'' = \frac{\pi}{180} * 85.49944^{\circ} = 1.492246814 \text{ rad} = 1.492247 \text{ rad}$$

Napomena 1: Prilikom proračuna ugao π treba pozivati iz memorije kalkulatora.

Ovo se čini pritiskom tastera  ili  (u zavisnosti od tipa kalkulatora) i taster iznad kojeg je ispisana oznaka za broj pi – “ π ”.

Napomena 2: Dobijeni ugao u radijanima dovoljno je zaokružiti na šest decimala.

Iz proporcije se dobija i odnos ugla β u gradusima sa njegovom vrijednošću u stepenima i radijanima:

$$\beta^{\circ} = \frac{360}{400} * \beta^g = \frac{9}{10} * \beta^g$$

Ugao α se ovako dobija u dekadnom obliku i potrebno ga je na način kako je to objašnjeno pretvoriti u seksagezimalni oblik.

$$\beta^{rad} = \frac{2\pi}{400} * \beta^g = \frac{\pi}{200} * \beta^g$$

Uvrstivši datu vrijednost ugla β u gradusnoj podjeli dobija se isti u stepenij:

$$\beta^{\circ} = \frac{9}{10} * 241^g 97^c 41^{cc} = \frac{9}{10} * 241.9741^g = 217.77669^{\circ} = 217^{\circ} 46' 36''$$

Napomena: Ugao se iz gradusne centezimalne podjele pretvara lako u gradusnu dekadnu podjelu jer je osnova broj 100. Dovoljno je samo iznos gradusnih minuta upisati na prva dva decimalna mjesta a iznos gradusnih sekundi na sledeća dva. Pri tome treba voditi računa i o nulama.

$$\text{Primjeri: } 187^g 6^c 1^{cc} = 187.0601^g \quad 54^g 2^{cc} = 54.0002^g$$

U radijanskoj podjeli:

$$\beta^{rad} = \frac{\pi}{200} * 241^g 97^c 41^{cc} = \frac{\pi}{200} * 241.9741^g = 3.800920275^{rad} = 3.800920^{rad}$$

Iz date proporcije može se proračunati i odnos ugla γ u radijanima sa istim u stepenima:

$$\gamma^{\circ} = \frac{360}{2\pi} * \gamma^{rad} = \frac{180}{\pi} * \gamma^{rad}$$

Uvrstivši datu vrijednost:

$$\gamma^{\circ} = \frac{180}{\pi} * 2.874562^{rad} = 164.70027^{\circ} = 164^{\circ} 42' 01''$$

I gradusima:

$$\gamma^g = \frac{400}{2\pi} * \gamma^{rad} = \frac{200}{\pi} * \gamma^{rad}$$

Uvrstivši datu vrijednost:

$$\gamma^g = \frac{200}{\pi} * 2.874562^{rad} = 183.00030^g = 183^g 00^c 03^{cc}$$

Preostalo je da se sračunaju sume uglova u svim jedinicama. Ukupni ugao nazvaćemo ψ pa će on u stepenima biti:

$$\psi^{\circ} = \alpha^{\circ} + \beta^{\circ} + \gamma^{\circ} = 85^{\circ} 29' 58'' + 217^{\circ} 46' 36'' + 164^{\circ} 42' 01'' = 467^{\circ} 58' 35''$$

Ovom uglu se može i oduzeti 360° da bi bio opsegu 0° do 360° :

$$\psi^{\circ} = 467^{\circ} 58' 35'' (-360^{\circ}) = 107^{\circ} 58' 35''$$

Suma u gradusima:

$$\psi^g = \alpha^g + \beta^g + \gamma^g = 94^g 99^c 94^{cc} + 241^g 97^c 41^{cc} + 183^g 00^c 03^{cc} = 519^g 97^c 38^{cc}$$

Sabiranje uglova u gradusima je jednostavno jer je dovoljno sabrati uglove kao da su u decimalnom zapisu i na kraju odvojiti prve dvije decimale za gradusne minute i sledeće dvije za gradusne sekunde.

Takođe, i kod ovog ugla može se oduzeti 400^g (perioda punog ugla u centezimalnoj podjeli) da bi bio u opsegu 0^g do 400^g :

$$\psi^g = 519^g 97^c 38^{cc} (-400^g) = 119^g 97^c 38^{cc}$$

Suma u radijanima:

$$\psi^{rad} = \alpha^{rad} + \beta^{rad} + \gamma^{rad} = 1.492247 \text{ rad} + 3.800920 \text{ rad} + 2.874562 \text{ rad} = 8.167729 \text{ rad}$$

I ovom uglu se može oduzeti vrijednost od 2π (perioda punog ugla u radijanskoj podjeli) da bi bio u opsegu od 0 rad do $2\pi \text{ rad}$:

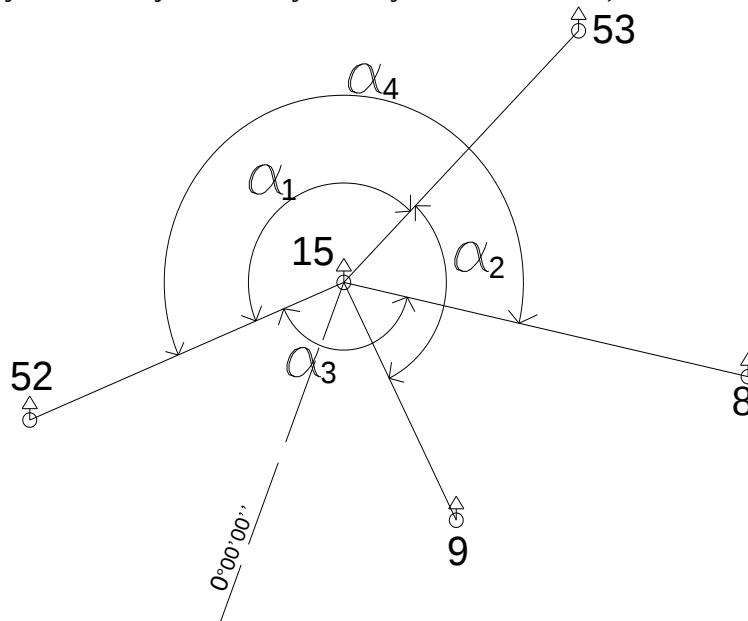
$$\psi^{rad} = 8.167729 \text{ rad} (-2\pi) = 1.884544 \text{ rad}$$

Za čitav proračun u ovom zadatku bi bila provjera da li se suma uglova u stepenima slaže sa sumom u gradusima i radijanima:

$$\psi^\circ = \psi^g = \psi^{rad}$$

Obrada podataka mjerenja horizontalnih uglova – girusna metoda

1. U datom primjeru na slici ispod, stanica je tačka 15 sa koje su opažana četiri pravca girusnom metodom u jednom girusu. U toku mjerenja, nula horizontalnog limba je bila u proizvoljnom pravcu (označeno sa $0^{\circ}00'00''$). (Opažani pravac neke tačke predstavlja ugao, za koji je potrebno zaokrenuti durbin instrumenta od nule limba do pravca tačke, mjereno u smjeru kretanja kazaljke na časovniku).



Dobijene vrijednosti su date u tabeli:

Stanica	Vizura	I položaj o ' "	II položaj o ' "	2C "	Sredina o ' "	Redukovana sredina
15	53	203 54 24	23 54 30			
	8	262 03 12	82 02 58			
	9	313 41 22	133 41 26			
	52	46 02 54	226 03 02			

Iz datih podataka sračunati dvostruku kolimacionu grešku za svaki pravac, naći sredinu iz dva položaja durбина i redukovanu sredinu. Zatim, iz razlike pravaca sračunati uglove α_1 , α_2 , α_3 i α_4 .

Prvi korak pri obradi podataka mjerenja horizontalnih uglova je računanje dvostruke kolimacione greške 2C. Ova greška se računa za sve opažane pravce, po formuli:

$$2C = (II \pm 180^\circ) - I$$

180° se dodaje ukoliko je čitanje na limbu u drugom položaju bilo manje od 180°, u suprotnom ta vrijednost se oduzima.

Oznaka "II" predstavlja vrijednost pravca u drugom položaju durbina a oznaka "I" vrijednost pravca u prvom položaju durbina.

Na ovaj način se dobijaju vrijednosti:

$$2C_{53} = 6''$$

$$2C_8 = -14''$$

$$2C_9 = 4''$$

$$2C_{52} = 8''$$

Zatim, računaju se sredine iz dva pravca po formuli:

$$sredina = \frac{I + (II \pm 180^\circ)}{2} \text{ ili po formuli } sredina = I + C$$

180° se dodaje ukoliko je čitanje na limbu u drugom položaju bilo manje od 180°, u suprotnom ta vrijednost se oduzima.

Uvrstivši mjerene vrijednosti dobijaju se sredine pravaca:

$$53^S = 203^\circ 54' 27''$$

$$8^S = 262^\circ 03' 05''$$

$$9^S = 313^\circ 41' 24''$$

$$52^S = 46^\circ 02' 58''$$

U trećem koraku se računaju redukovane sredine pravaca. Redukovana sredina odgovara vrijednosti sredine iz oba položaja pravca u slučaju kada bi se nula limba poklapala sa početnim pravcem (u ovom zadatku je to tačka 53). Redukovana sredina se dobija kada se od vrijednosti sredine pravca oduzima sredina početnog pravca.

$$Redukovana\ sredina_i = Sredina_i - Sredina_1$$

Ukoliko se dobije negativna vrednost, dodaje se 360°.

Uvrstivši sračunate vrijednosti dobijaju se redukovane sredine pravaca:

$$53^R = 0^\circ 00' 00''$$

$$8^R = 58^\circ 08' 38''$$

$$9^R = 109^\circ 46' 57''$$

$$52^R = 202^\circ 08' 31''$$

Ovako sračunate vrijednosti se mogu prikazati u tabelu na sledeći način:

Stanica	Vizura	I položaj o ' "	II položaj o ' "	2C "	Sredina o ' "	Redukovana sredina
15	53	203 54 24	23 54 30	6	203 54 27	0 00 00
	8	262 03 12	82 02 58	-14	262 03 05	58 08 38
	9	313 41 22	133 41 26	4	313 41 24	109 46 57
	52	46 02 54	226 03 02	8	46 02 58	202 08 31

Iz dobijenih redukovanih sredina se zatim mogu sračunati traženi uglovi. Oni se dobijaju oduzimanjem redukovane sredine lijevog pravca od vrijednosti redukovane sredine desnog pravca.

$$Ugao = Redukovana sredina_{desni} - Redukovana sredina_{lijevi}$$

Ukoliko se dobije negativna vrijednost, dodaje se 360° .

Za ugao α_1 desni pravac je pravac ka tački 53, dok je lijevi pravac ka tački 52. Koristeći vrijednosti redukovanih sredina, traženi ugao će biti:

$$\alpha_1 = 53^R - 52^R = 0^\circ 00' 00'' - 202^\circ 08' 31'' = -202^\circ 08' 31'' (+360^\circ) = 157^\circ 51' 29''$$

Za ugao α_2 desni pravac je pravac ka tački 9, dok je lijevi pravac ka tački 53. Koristeći vrijednosti redukovanih sredina, traženi ugao će biti:

$$\alpha_2 = 9^R - 53^R = 109^\circ 46' 57'' - 0^\circ 00' 00'' = 109^\circ 46' 57''$$

Za ugao α_3 desni pravac je pravac ka tački 52, dok je lijevi pravac ka tački 8. Koristeći vrijednosti redukovanih sredina, traženi ugao će biti:

$$\alpha_3 = 52^R - 8^R = 202^\circ 08' 31'' - 58^\circ 08' 38'' = 143^\circ 59' 53''$$

Za ugao α_4 desni pravac je pravac ka tački 8, dok je lijevi pravac ka tački 52. Koristeći vrijednosti redukovanih sredina, traženi ugao će biti:

$$\alpha_4 = 8^R - 52^R = 58^\circ 08' 38'' - 202^\circ 08' 31'' = -143^\circ 59' 53'' (+360^\circ) = 216^\circ 00' 07''$$