Z0. (Lema o zamjeni ekvivalentnih formula) Neka su A, B i C iskazne formule tada je
$$\models ((B \leftrightarrow C) \rightarrow (A \leftrightarrow A(B/C))).$$

Rj. Neka je $v \in 2^P$ proizvoljna valuacija. Dokažimo da je $v((B \leftrightarrow C) \rightarrow (A \leftrightarrow A(B/C))) = 1$. Razmotrimo sledeće slučajeve:

I) Ako je $v(B \leftrightarrow C) = 0$ tada na osnovu semantike za $\rightarrow$ važi $v((B \leftrightarrow C) \rightarrow (A \leftrightarrow A(B/C))) = 1$.

II) Ako je $v(B \leftrightarrow C) = 1$. Tada treba dokazati da je i $v(A \leftrightarrow A(B/C)) = 1$ iz čega slijedi da je $v((B \leftrightarrow C) \rightarrow (A \leftrightarrow A(B/C))) = 1$. Za dokaz ovoga ponovo razmotrimo dva podslučaja:

   a) Ako $B \notin sub(A)$ onda je $A(B/C) = A$ pa se dokaz svodi na $v(A \leftrightarrow A) = 1$ što je očigledno na (osnovu $\models A \rightarrow A$).

   b) Ako $B \in sub(A)$. U ovom slučaju dokaz izvodimo indukcijom po složenosti formule A.

   Baza indukcije: Neka je $A = B$. Onda je $A(B/C) = A$, što se dokazuje na isti način kao pod a); ili je $A(B/C) = C$ pa je $v(A \leftrightarrow A(B/C)) = v(B \leftrightarrow C) = 1$ (po pretpostavci za slučaj II).
   Indukcijski korak. Pretpostavimo da tvrđenje važi za sve formule manje složenosti od formule A. Dokažimo da tada tvrđenje važi i za formulu A.

   1^0 Ako je $A = \neg A_1$ onda je $A(B/C) = \neg A_1(B/C)$. Ako je $v(A) = 0$, tada $v(A) = 0$ akko $v(\neg A_1) = 0$ akko $v(A_1) = 1$ akko (po ind. pp) $v(A_1(B/C)) = 1$ akko $v(\neg A_1(B/C)) = 0$ akko $v(A(B/C)) = 0$, pa je $v(A \leftrightarrow A(B/C)) = 1$. Slično ako je $v(A) = 1$, tada $v(A) = 1$ akko $v(\neg A_1) = 1$ akko $v(A_1) = 0$ akko (po ind. pp) $v(A_1(B/C)) = 0$ akko $v(\neg A_1(B/C)) = 1$ akko $v(A(B/C)) = 1$, pa je $v(A \leftrightarrow A(B/C)) = 1$. Dakle, u svim slučajevima je $v(A \leftrightarrow A(B/C)) = 1$.

   2^0 Ako je $A = A_1 \wedge A_2$ onda je $A(B/C) = A_1(B/C) \wedge A_2(B/C)$. Ako je $v(A_1) = 1$ i $v(A_2) = 1$, onda je po ind. pp. $v(A_1(B/C)) = 1$ i $v(A_2(B/C)) = 1$ pa na osnovu semantike za $\wedge$ dobijamo $v(A_1 \wedge A_2) = 1$ i $v(A_1(B/C) \wedge A_2(B/C)) = 1$ pa je $v((A_1 \wedge A_2) \leftrightarrow ((A_1(B/C) \wedge A_2(B/C))) = 1$ tj. $v(A \leftrightarrow A(B/C)) = 1$. S druge strane, ako postoji $i \in \{1, 2\}$ tako da je $v(A_i) = 0$ onda je po ind. pp. $v(A_i(B/C)) = 0$ pa je $v(A_1 \wedge A_2) = 0$ i $v(A_1(B/C) \wedge A_2(B/C)) = 0$ iz čega dobijamo $v((A_1 \wedge A_2) \leftrightarrow ((A_1(B/C) \wedge A_2(B/C))) = 1$ tj. $v(A \leftrightarrow A(B/C)) = 1$.

   3^0 Ako je $A = A_1 \vee A_2$. Uradite sami. Razmotriti podslučaj $v(A_1) = 0$ i $v(A_2) = 0$ i podslučaj $v(A_i) = 1$ za neko $i \in \{1, 2\}$.

   4^0 Ako je $A = A_1 \rightarrow A_2$. Uradite sami.

Napomena. Drugi način za dokaz (npr. 2^0) je preko tablice u kojoj koristimo $v(A_i(B/C)) = v(A_i)$ na osnovu ind. pp $v(A_i \leftrightarrow A_i(B/C)) = 1$:

A_1	A_2	$A_1(B/C)$	$A_2(B/C)$	$A = A_1 \wedge A_2$	$A(B/C) = A_1(B/C) \wedge A_2(B/C)$	$A \leftrightarrow A(B/C)$
0	0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1

Z1. (Teorema interpolacije) Neka nije $\models \neg A$ i nije $\models B$. Ako je $\models A \to B$ onda postoji formula C koja samo sadrži iskazne promenljive koje su zajedničke za formule A i B takva da je $\models A \to C$ i $\models C \to B$.
Uraditi zadatak za formule $A(r, q, p)$ i $B(s, q, p)$ date tabelom:

s	r	q	p	A	B
0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1

Rj. Formulu $A(p_1, ..., p_{n1})$ zapišimo u (savršenoj) DNF a formulu $B(q_1, ..., q_{n2})$ u (savršenoj) KNF. Imamo da je:

$$A = \bigvee_{i \leq k} K_i, \quad K_i = \bigwedge_{l=1}^{n1} p_l^{\delta_{il}} \text{ i } B = \bigwedge_{j \leq m} D_j, \quad D_j = \bigvee_{l=1}^{n2} q_l^{\delta_{jl}}.$$

Iz $\models A \to B$ dobijamo $\models \bigvee_{i \leq k} K_i \to \bigwedge_{j \leq m} D_j$, pa kako $\models \bigwedge_{j \leq m} D_j \to D_{j'}$ za svako $j' \in \{1, ..., m\}$ to na osnovu tranzitivnosti važi $\models \bigvee_{i \leq k} K_i \to D_{j'}$. Neka je $D'_{j'}$ formula koju dobijamo kada u disjunkciji $D_{j'}$ izostavimo iskazne promenljive (i njihove negacije) koji se ne javljaju u formuli A. Tada $\models \bigvee_{i \leq k} K_i \to D'_{j'}$. Zaista, $D_{j'} = \bigvee_{l=1}^{n2} q_l^{\delta_{j'l}}$ pa ako je v valuacija i $v(A) = 1$ konstruišimo valuaciju u takvu da je $u(q_l^{\delta_{j'l}}) = 0$ ako se q_l ne javlja u A, inače je $u(p) = v(p)$ za ostale iskazne promenljive p. Očigledne $u(A) = 1$ i $u(D'_{j'}) = u(D_{j'})$, pa iz $\models A \to D_{j'}$ dobijamo $u(D_{j'}) = 1$ tj. $v(D'_{j'}) = u(D'_{j'}) = 1$. S druge strane $D_{j'} = D'_{j'} \vee D''_{j'}$ pa $\models D'_{j'} \to D_{j'}$.

Neka je $C = \bigwedge_{j\leq m} D'_j$. Sada, za svako $j \in \{1, ..., m\}$ i valuaciju v ako je $v(A) = 1$ onda je i $v(D'_j) = 1$ pa je i $v(C) = 1$. Takođe, ako je $v(C) = 1$ onda je za svako $j \in \{1, ..., m\}$ $v(D'_j) = 1$ pa je i $v(D_j) = 1$ tj. $v(B) = 1$.

Dakle, $\models A \to C$ i $\models C \to B$. Što je i trebalo dokazati.

Za konkretan primjer imamo $A(r, q, p) = 1$ za $r = 0, q = 0, p = 1$ i $r = 1, q = 1, p = 1$ tj. $A = (\neg r \wedge \neg q \wedge p) \vee (r \wedge q \wedge p)$. $B(s, q, p) = 0$ za $s = 0, q = 0, p = 0$ i $s = 1, q = 1, p = 0$ tj. $B = (s \vee q \vee p) \wedge (\neg s \vee \neg q \vee p)$. Ovdje je $D_1 = (s \vee q \vee p)$, pa kako se s ne javlja u A dobijamo $D'_1 = (q \vee p)$. Slično dobijamo $D'_2 = (\neg q \vee p)$, odnosno $C = (q \vee p) \wedge (\neg q \vee p)$. Provjeriti da za formule iz ovog primjera važe svi uslovi koje smo naveli u dokazu (npr. $\models A \to D'_1$, $\models D'_1 \to D_1$).

Napomena. Mi smo gledali i modifikovali formulu B da bi dobili formulu C. Možemo li modifikovati formulu A pa da dobijemo formulu koja zadovoljava tražene uslove? Npr. da li u konkretnom primjeru za C možemo uzeti $C = (\neg q \wedge p) \vee (q \wedge p)$?

Z2. Dokazati $\vdash (C \to A) \to ((B \to C) \to (B \to A))$.

Rj. Dokaz 1. Po teoremi dedukcije dovoljno je dokazati $(C \to A), (B \to C), B \vdash A$. Uvedimo oznaku $\Sigma = \{(C \to A), (B \to C), B\}$. Sada treba dokazati $\Sigma \vdash A$, a dokaz za ovo je niz formula $A_1 = B \in \Sigma$, $A_2 = (B \to C) \in \Sigma$, $A_3 = C$ po modus ponensu na formule A_1, A_2 (u daljem oznaka (MP 1,2)), $A_4 = (C \to A) \in \Sigma$, $A_5 = A$ (MP 3,4).
Dokaz 2. To teoremi tranzitivnosti važi $(B \to C), (C \to A) \vdash (B \to A)$. Na osnovu pravila permutacije pretpostavki dobijamo $(C \to A), (B \to C) \vdash (B \to A)$ a na osnovu ovoga primjenom dva puta pravila (teoreme) dedukcije dobijamo $\vdash (C \to A) \to ((B \to C) \to (B \to A))$.
Dokaz 3. Dokaz je niz formula $A_1 = (C \to A) \to (B \to (C \to A)) \in T_1$, $A_2 = (B \to (C \to A)) \to ((B \to C) \to (B \to A)) \in T_2$, $A_3 = (C \to A) \to ((B \to C) \to (B \to A))$ primjenom pravila tranzitivnosti na formule A_1 i A_2.
Dokaz 4. Dokaz je niz formula (ne koristimo tranzitivnost i ne koristimo teoremu dedukcije; dokaz je dobijen na osnovu dokaza 1 postepenim modifikovanjem prethodnog dokaza da se smanji broj pretpostavki za jedan) $A_1 = (C \to A) \to (B \to (C \to A)) \in T_1$, $A_2 = (B \to (C \to A)) \to ((B \to C) \to (B \to A)) \in T_2$, $A_3 = A_2 \to ((C \to A) \to A_2) = ((B \to (C \to A)) \to ((B \to C) \to (B \to A))) \to ((C \to A) \to ((B \to (C \to A)) \to ((B \to C) \to (B \to A)))) \in T_1$, $A_4 = (C \to A) \to A_2 = (C \to A) \to ((B \to (C \to A)) \to ((B \to C) \to (B \to A)))$ (MP 2,3), $A_5 = A_4 \to (A_1 \to A_7) = ((C \to A) \to ((B \to (C \to A)) \to ((B \to C) \to (B \to A)))) \to (((C \to A) \to (B \to (C \to A))) \to ((C \to A) \to ((B \to C) \to (B \to A)))) \in T_2$, $A_6 = A_1 \to A_7 = ((C \to A) \to (B \to (C \to A))) \to ((C \to A) \to ((B \to C) \to (B \to A)))$ (MP 4,5), $A_7 = (C \to A) \to ((B \to C) \to (B \to A))$ (MP 1,6),

Z3. Neka je $T_0 = \{(\neg A \to \neg B) \to (B \to A) \ : \ A, B \in F\}$ i $T' = T_1 \cup T_2 \cup T_0$. Ako je T' skup aksioma a modus ponens (MP) pravilo izvođenja dokazati da je $T_i \subset Con(T')$ za $i = 3, 4, ..., 11$ tj. svaka instanca aksioma T_i je dokaziva. Veznici $\wedge$ i $\vee$ se uvode kao skraćenice preko veznika $\neg$ i $\to$.

Rj. Iz $T_1 \cup T_2$ dokazanana je teorema tautologije (tj. $\vdash A \to A$), teorema (pravilo) dedukcije, tranzitivnost implikacije,... pa ih dalje koristimo kao već dokazane. Napominjemo, da ako nešta dokažemo mi to koristimo u narednim koracima kao i posledice toga što smo dokazali (koje su dokazane na predavanjima).

(a) $T_9 = \{\neg A \to (A \to B) \,:\, A, B \in F\}$

Po pravilu dedukcije dovoljno je dokazati $\neg A, A \vdash B$ tj. $\Sigma = \{\neg A, A\}$. Dokaz za formulu B iz Σ je sledeći niz formula:
$A_1 = \neg A \in \Sigma$, $A_2 = \neg A \to (\neg B \to \neg A) \in T_1$, $A_3 = \neg B \to \neg A$ (MP 1,2), $A_4 = (\neg B \to \neg A) \to (A \to B) \in T_0$, $A_5 = A \to B$ (MP 3,4), $A_6 = A \in \Sigma$, $A_7 = B$ (MP 6,5).
Koristili smo oznaku (MP 1,2) što znači da je formula A_3 dobijena primjenom modus ponensa na formule A_1 i A_2.
Drugi dokaz. Iz formula $A' = \neg A \to (\neg B \to \neg A) \in T_1$ i $A'' = (\neg B \to \neg A) \to (A \to B) \in T_0$ primjenom pravila tranzitivnosti (u daljem skraćeno (TRANZ)) dobijamo $\vdash \neg A \to (A \to B)$.

(b) $\vdash \neg\neg A \to A$ (jaki zakon dvojne negacije) tj. $\neg\neg A \vdash A$

Ako na aksiome $\neg\neg A \to (\neg A \to \neg\neg\neg A) \in T_9$ i $(\neg A \to \neg\neg\neg A) \to (\neg\neg A \to A) \in T_0$ primjenimo (TRANZ) dobijamo $\vdash \neg\neg A \to (\neg\neg A \to A)$. Sada ako na prethodnu formulu koristeći pretpostavku $\neg\neg A$ dva puta primjenimo (MP) dobijamo A tj. $\neg\neg A \vdash A$.
Drugi način (tj. precizniji zapis prethodnog dokaza). Dokaz (po definiciji) bi podrazumjevao da napišemo niz formula koji iz $\Sigma = \{\neg\neg A\}$ dokazuje A. Na osnovu prethodnog to nije teško uraditi.
$A_1 = \neg\neg A \in \Sigma$, $A_2 = \neg\neg A \to (\neg A \to \neg\neg\neg A) \in T_9$, $A_3 = (\neg A \to \neg\neg\neg A)$ (MP 1,2), $A_4 = (\neg A \to \neg\neg\neg A) \to (\neg\neg A \to A) \in T_0$, $A_5 = (\neg\neg A \to A)$ (MP 3,4), $A_6 = A$ (MP 1,5).
Treći način. Slično kao u prvom dokazu koristeći T_0, T_9 i tranzitivnost dobijamo $B_1 = \neg\neg A \to (\neg\neg A \to A)$. Sada koristimo distributivnost $\to$ tj. aksiomu $B_2 = (\neg\neg A \to (\neg\neg A \to A)) \to ((\neg\neg A \to \neg\neg A) \to (\neg\neg A \to A)) \in T_2$. Primjenom (MP 1,2) dobijamo $B_3 = (\neg\neg A \to \neg\neg A) \to (\neg\neg A \to A)$. Uzmimo $B_4 = (\neg\neg A \to \neg\neg A)$ (teorema tautologije). Primjenom (MP 4,3) dobijamo $B_5 = \neg\neg A \to A$. Dakle, niz formula $(B_1, ..., B_5)$ je dokaz za formulu $B_5 = \neg\neg A \to A$ tj. $\vdash \neg\neg A \to A$.

(c) $\vdash A \to \neg\neg A$ (slabi zakon dvojne negacije) tj. $A \vdash \neg\neg A$

Dokaz je niz formula $A_1 = \neg\neg\neg A \to \neg A$ (jaki zakon dvojne negacije tj. (b)), $A_2 = (\neg\neg\neg A \to \neg A) \to (A \to \neg\neg A) \in T_0$, $A_3 = A \to \neg\neg A$ (MP 1,2).

(d) $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ (slabi zakon kontrapozicije)

Dokazaćemo $A \to B \vdash \neg B \to \neg A$. Dokaz je niz formula $A_1 = \neg\neg A \to A$ (b), $A_2 = A \to B \in \Sigma$, $A_3 = B \to \neg\neg B$ (c), $A_4 = \neg\neg A \to \neg\neg B$ (TRANZ 1,2,3), $A_5 = (\neg\neg A \to \neg\neg B) \to (\neg B \to \neg A) \in T_0$, $A_6 = \neg B \to \neg A$ (MP 5,6).
Napomena. Spajajući ovo tvrđenje i aksiomu T_0 (koja je jaki zakon kontrapozicije) dobijamo dvojno pravilo kontrapozicije koje će mo označavati sa (KP) da

bi uprostili dalje zapise:

$$\frac{A \to B}{\overline{\neg B \to \neg A}}$$

(e) $\vdash (A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B)$ tj. $(A \to B), (\neg A \to B) \vdash B$

Dokaz je niz formula $A_1 = \neg A \to B \in \Sigma$, $A_2 = \neg B \to \neg\neg A$ (KP 1), $A_3 = \neg\neg A \to A$ (b), $A_4 = A \to B \in \Sigma$, $A_5 = \neg B \to B$ (TRANZ 2,3,4), $A_6 = \neg B \to (B \to \neg(B \to B)) \in T_9$, $A_7 = (\neg B \to (B \to \neg(B \to B))) \to ((\neg B \to B) \to (\neg B \to \neg(B \to B))) \in T_2$, $A_8 = (\neg B \to B) \to (\neg B \to \neg(B \to B))$ (MP 6,7), $A_9 = \neg B \to \neg(B \to B)$ (MP 5,8), $A_{10} = (B \to B) \to B$ (KP 9), $A_{11} = B \to B$ (tautologija), $A_{12} = B$ (MP 11,10).

(f) Za valuaciju v i formulu A koristimo oznaku A^v za $A^{v(A)}$. Dokazati da $A^v, B^v \vdash (A \to B)^v$. Ovo se svodi na četiri slučaja:

i) $v(A) = 0, v(B) = 0$ pa je $v(A \to B) = 1$ i $\neg A, \neg B \vdash (A \to B)$,

ii) $v(A) = 0, v(B) = 1$ pa je $v(A \to B) = 1$ i $\neg A, B \vdash (A \to B)$,

iii) $v(A) = 1, v(B) = 0$ pa je $v(A \to B) = 0$ i $A, \neg B \vdash \neg(A \to B)$,

iv) $v(A) = 1, v(B) = 1$ pa je $v(A \to B) = 1$ i $A, B \vdash (A \to B)$.

Dokaz za $B \vdash (A \to B)$ je niz formula $A_1 = B \in \Sigma$, $A_2 = B \to (A \to B) \in T_1$, $A_3 = A \to B$ (MP 1,2). Pa po pravilu slabljenja slijede *ii)* i *iv)*.

Dokaz za $\neg A \vdash (A \to B)$ je niz formula $A_1 = \neg A \in \Sigma$, $A_2 = \neg A \to (A \to B) \in T_9$, $A_3 = A \to B$ (MP 1,2). Pa po pravilu slabljenja slijede *i)* i *ii)*.

Dokažimo *iii)*. Uočimo $A, A \to B \vdash B$ (ovo je MP) pa je po teoremi dedukcije $\vdash A \to ((A \to B) \to B)$. Dokaz za $A, \neg B \vdash \neg(A \to B)$ je niz formula $A_1 = A \in \Sigma$, $A_2 = A \to ((A \to B) \to B)$, $A_3 = (A \to B) \to B$ (MP 1,2), $A_4 = \neg B \to \neg(A \to B)$ (KP 3), $A_5 = \neg B \in \Sigma$, $A_6 = \neg(A \to B)$ (MP 5,4).

(g) Ako je $(A \wedge B)$ skraćenica za $\neg(A \to \neg B)$ i $(A \vee B)$ skraćenica za $(\neg A \to B)$ dokazati T_3 do T_8.

i) $T_3 : (A \wedge B) \to A$ tj. $\vdash \neg(A \to \neg B) \to A$. Dokaz je $A_1 = \neg A \to (A \to \neg B) \in T_9$, $A_2 = \neg(A \to \neg B) \to \neg\neg A$ (KP 1), $A_3 = \neg\neg A \to A$ (b), $A_4 = \neg(A \to \neg B) \to A$ (TRANZ 2,3).

ii) $T_4 : (A \wedge B) \to B$ tj. $\vdash \neg(A \to \neg B) \to B$. Dokaz je $A_1 = \neg B \to (A \to \neg B) \in T_1$, $A_2 = \neg(A \to \neg B) \to \neg\neg B$ (KP 1), $A_3 = \neg\neg B \to B$ (b), $A_4 = \neg(A \to \neg B) \to B$ (TRANZ 2,3).

iii) $T_5 : A \to (B \to (A \wedge B))$ tj. $\vdash A \to (B \to \neg(A \to \neg B))$. Po teoremi dedukcije dovoljno je dokazati $A, B \vdash \neg(A \to \neg B)$, što slijedi iz (f) tj. $A, \neg(\neg B) \vdash \neg(A \to \neg B)$ i $\vdash B \to \neg\neg B$.

iv) $T_6 : A \to (A \vee B)$ tj. $\vdash A \to (\neg A \to B)$. Dokaz je $A_1 = A \to \neg\neg A$ (c), $A_2 = \neg\neg A \to (\neg A \to B) \in T_9$, $A_3 = A \to (\neg A \to B)$ (TRANZ 1,2).

v) $T_7 : B \to (A \vee B)$ tj. $\vdash B \to (\neg A \to B)$. Dokaz $A_1 = B \to (\neg A \to B) \in T_1$.

vi) $T_8 : (A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$ tj. $\vdash (A \to C) \to ((B \to C) \to ((\neg A \to B) \to C))$. Po teoremi dedukcije dovoljno je dokazati $A \to C, B \to C, \neg A \to B \vdash C$. Dokaz je $A_1 = \neg A \to B \in \Sigma$, $A_2 = B \to C \in \Sigma$, $A_3 = \neg A \to C$ (TRANZ 1,2), $A_4 = A \to C \in \Sigma$, $A_5 = C$ na osnovu A_4, A_3 i (e).

(h) T_{10} : $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ tj. $A \to B, A \to \neg B \vdash \neg A$. Dokaz je $A_1 = A \to B \in \Sigma$, $A_2 = \neg B \to \neg A$ (KP 1), $A_3 = A \to \neg B \in \Sigma$, $A_4 = \neg\neg B \to \neg A$ (KP 3), $A_5 = \neg A$ na osnovu A_2, A_4 i (e).

(i) T_{11} : $(A \vee \neg A)$ tj. $\vdash \neg A \to \neg A$. Dokaz je $A_1 = \neg A \to \neg A$ teorema tautologije.

Napomena. Dokaz zakona isključenja trećeg je u ovom slučaju jednostavan jer se u samoj definiciji skraćenice $(A \vee B)$ za $(\neg A \to B)$ "krije" taj zakon.

Z4. Dokazati zakon iaključena trećeg koristeći jaki zakon dvojne negacije i ostale aksiome T_1 do T_{10}.

Rj. Na predavanjima je dokazano da slabi zakon kontrapozicije $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ možemo dokazati koristeći aksiome T_1 do T_{10}. Otuda možemo koristiti jednostrano pravilo (KP) koje odgovara slabom zakonu kontrapozicije. Dokazaćemo da koristeći aksiome T_1 do T_{10} važi $\vdash \neg\neg(A \vee \neg A)$ pa uz jaki zakon dvojne negacije $\neg\neg A \to A$ dobijamo zakon isključenja trećeg $\vdash (A \vee \neg A)$.
Dakle, ostaje da dokažemo $\vdash \neg\neg(A \vee \neg A)$. Razmišljamo na sledeći način. Treba da dokažemo negaciju formule $C = \neg(A \vee \neg A)$. Za to možemo iskoristiti pravilo za dokazivanje negacije odnosno aksiomu T_{10}. Tj. da iz formule $C = \neg(A \vee \neg A)$ možemo dokazati neku formulu B i njenu negaciju. Treba da otkrijemo koja je to formula B. Pošto je i formula C u obliku negacije možemo uočiti da (po De Morganovim zakonima) važi $\neg(A \vee \neg A) \to (\neg A \wedge \neg\neg A)$, s druge strane po aksiomama T_3 i T_4 važi $(\neg A \wedge \neg\neg A) \to \neg A$ i $(\neg A \wedge \neg\neg A) \to \neg\neg A$. Imajući u vidu tranzitivnost očekujemo da $\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A$ i $\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg\neg A$ tj. za formulu B možemo uzeti $\neg A$. Sada možemo pristupiti dokazu. Znači, treba nam da dokažemo $\vdash \neg(A \vee \neg A) \to \neg A$ a da ne iskoristimo zakon isključenja trećeg. Možemo koristiti De Morganov zakon kao gore (jer za njegov dokaz ne koristimo T_{11}) ili slabi zakon kontrapozicije a za to nam treba da važi $\vdash A \to (A \vee \neg A)$ (vidimo da je poslednja formula aksioma). Na osnovu ovog razmišljanja (analize) ispisujemo dokaz.
Dokaz za $\vdash \neg\neg(A \vee \neg A)$ je niz formula: $A_1 = A \to (A \vee \neg A) \in T_6$, $A_2 = \neg A \to (A \vee \neg A) \in T_7$, $A_3 = \neg(A \vee \neg A) \to \neg A$ (KP 1), $A_4 = \neg(A \vee \neg A) \to \neg\neg A$ (KP 2), $A_5 = (\neg(A \vee \neg A) \to \neg A) \to ((\neg(A \vee \neg A) \to \neg\neg A) \to \neg\neg(A \vee \neg A)) \in T_{10}$, $A_6 = (\neg(A \vee \neg A) \to \neg\neg A) \to \neg\neg(A \vee \neg A)$ (MP 3,5), $A_7 = \neg\neg(A \vee \neg A)$ (MP 4,6).

Z5. Dokazati zakone distributivnosti za $\wedge$ i $\vee$.
(a) $\vdash (A \vee (B \wedge C)) \to ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$,
(b) $\vdash ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \to (A \wedge (B \vee C))$,
(c) $\vdash (A \wedge (B \vee C)) \to ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$,
(d) $\vdash ((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \to (A \vee (B \wedge C))$.

Rj. Dokaze za (a) i (b) smatramo "šablonskim" (lakim) jer se $\wedge$ nalazi sa desne a $\vee$ sa lijeve strane implikacije $(\to)$, pa možemo da koristimo zakon (teoremu) infimuma i zakon (aksiomu) supremuma tj. pravila konjunkcije i disjunkcije. Za dokazivanje (c) i (d) treba "malo" iskustva.

(a) Razmišljamo (analiziramo). Na lijevoj strani je disjunkcija formula znači može nam pomoći zakon supremuma $(P \to R) \to ((Q \to R) \to ((P \vee Q) \to R))$. U našem slučaju je $P = A$, $Q = B \wedge C$ i $R = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$, pa treba dokazati da $P \to R$ i $Q \to R$ tj. $i)$ $A \to ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$ i $ii)$ $(B \wedge C) \to ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$. Nakon što dobijemo $i)$ i $ii)$ primjenićemo zakon supremuma $(A \to ((A \vee B) \wedge (A \vee C))) \to (((B \wedge C) \to ((A \vee B) \wedge (A \vee C))) \to ((A \vee (B \wedge C)) \to ((A \vee B) \wedge (A \vee C))))$ i dva puta modus ponens i dobićemo dokaz za (a).
Sada razmišljamo kako da dokažemo $i)$ i $ii)$. U oba slučaja je konjunkcija sa desne strane što znači može nam pomoći zakon infimuma $(Z \to X) \to ((Z \to Y) \to (Z \to (X \wedge Y)))$. Za slučaj $i)$ $A \to ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$ uzeli bi $Z = A$, $X = (A \vee B)$ i $Y = (A \vee C)$ pa treba dokazati $Z \to X$ i $Z \to Y$ tj. $A \to (A \vee B)$ i $A \to (A \vee C)$. Poslednje formule su instance aksioma iz T_6. Za slučaj $ii)$ $(B \wedge C) \to ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$ uzeli bi $Z = (B \wedge C)$, $X = (A \vee B)$ i $Y = (A \vee C)$ pa treba dokazati $(B \wedge C) \to (A \vee B)$ i $(B \wedge C) \to (A \vee C)$. Dokaz za drugu formulu je sledeći niz formula $A_1 = (B \wedge C) \to C \in T_4$, $A_2 = C \to (A \vee C) \in T_7$, $A_3 = (B \wedge C) \to (A \vee C)$ (TRANZ 1,2); slično se dokazuje i prva formula. U oba slučaja $i)$, $ii)$ kada dobijemo dokaze "pomoćnih" formula koristimo odgovarajuću instancu zakona infimuma i modus ponens dva puta. Na osnovu ovog razmatranja nije teško zapisati dokaz ali obrnutim redosljedom. Radi bolje preglednosti možemo pisati više kraćih dokaza, jer njihovim nadovezivanjem lako dobijamo jedan dokaz date formule. Dokaz je sledeći niz formula (koristimo oznaku (INF) za zakon infimuma):

$A_1 = (B \wedge C) \to C \in T_4$, $A_2 = C \to (A \vee C) \in T_7$, $A_3 = (B \wedge C) \to (A \vee C)$ (TRANZ 1,2),

$A_4 = (B \wedge C) \to B \in T_3$, $A_5 = B \to (A \vee B) \in T_7$, $A_6 = (B \wedge C) \to (A \vee B)$ (TRANZ 4,5),

$A_7 = A_4 \to (A_3 \to A_9) = ((B \wedge C) \to (A \vee B)) \to (((B \wedge C) \to (A \vee C)) \to ((B \wedge C) \to ((A \vee B) \wedge (A \vee C))))$ (INF), $A_8 = A_3 \to A_9 = ((B \wedge C) \to (A \vee C)) \to ((B \wedge C) \to ((A \vee B) \wedge (A \vee C)))$ (MP 4,7), $A_9 = (B \wedge C) \to ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$ (MP 3,8),

$A_{10} = A \to (A \vee B) \in T_6$, $A_{11} = A \to (A \vee C) \in T_6$, $A_{12} = (A \to (A \vee B)) \to ((A \to (A \vee C)) \to (A \to ((A \vee B) \wedge (A \vee C))))$ (INF), $A_{13} = (A \to (A \vee C)) \to (A \to ((A \vee B) \wedge (A \vee C)))$ (MP 10,12), $A_{14} = A \to ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$ (MP 11,13),

$A_{15} = A_{14} \to (A_9 \to A_{17}) = (A \to ((A \vee B) \wedge (A \vee C))) \to (((B \wedge C) \to ((A \vee B) \wedge (A \vee C))) \to ((A \vee (B \wedge C)) \to ((A \vee B) \wedge (A \vee C)))) \in T_8$, $A_{16} = A_9 \to A_{17} = ((B \wedge C) \to ((A \vee B) \wedge (A \vee C))) \to ((A \vee (B \wedge C)) \to ((A \vee B) \wedge (A \vee C)))$ (MP 14,15), $A_{17} = (A \vee (B \wedge C)) \to ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$ (MP 9,16).

(b) Slično prethodnom treba dokazati $\vdash (A \wedge B) \to (A \wedge (B \vee C))$ i $\vdash (A \wedge C) \to (A \wedge (B \vee C))$ i primjeniti zakon supremuma. Za dokaz npr. $\vdash (A \wedge B) \to (A \wedge (B \vee C))$ treba dokazati $\vdash (A \wedge B) \to A$ i $\vdash (A \wedge B) \to (B \vee C)$ i primjeniti zakon infimuma. Dokaz za $\vdash (A \wedge B) \to (B \vee C)$ je $A_1 = (A \wedge B) \to B \in T_4$, $A_2 = B \to (B \vee C) \in T_6$, $A_3 = (A \wedge B) \to (B \vee C)$ (TRANZ 1,2). Ostale detalje uradite sami.

(c) Treba da dokažemo $\vdash (A \wedge (B \vee C)) \rightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$. Gledamo možemo li svesti dokaz na slučaj koji nam izgleda jednostavniji. Po teoremi dedukcije dovoljno je dokazati $A \wedge (B \vee C) \vdash ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$ odnosno po pravilu o konjunkciji pretpostavki $A, (B \vee C) \vdash ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$. Sada vidimo da dokaz možemo raditi po slučajevima (tj. koristimo pravilo disjunkcije): $A, B \vdash ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$ i $A, C \vdash ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$. Dokaz za $A, B \vdash ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$ je $A_1 = A \in \Sigma$, $A_2 = B \in \Sigma$, $A_3 = A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)) \in T_5$, $A_4 = B \rightarrow (A \wedge B)$ (MP 1,3), $A_5 = (A \wedge B)$ (MP 2,4), $A_6 = (A \wedge B) \rightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \in T_6$. Slično se dokazuje drugi slučaj.

(d) $\vdash ((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \rightarrow (A \vee (B \wedge C))$. Po teoremi dedukcije dovoljno je dokazati $((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \vdash (A \vee (B \wedge C))$ odnosno po pravilu o konjunkciji pretpostavki $(A \vee B), (A \vee C) \vdash (A \vee (B \wedge C))$. Primjenom dva puta pravila disjunkcije dobijamo da treba dokazati: *i)* $A \vdash (A \vee (B \wedge C))$, *ii)* $B, A \vdash (A \vee (B \wedge C))$, *iii)* $A, C \vdash (A \vee (B \wedge C))$ i *iv)* $B, C \vdash (A \vee (B \wedge C))$.
Prva tri slučaja dokazujemo koristeći pravilo slabljenja i dokaz $A_1 = A \in \Sigma$, $A_2 = A \rightarrow (A \vee (B \wedge C)) \in T_6$, $A_3 = (A \vee (B \wedge C))$ (MP 1,2). Dokaz za *iv)* je niz formula $A_1 = B \in \Sigma$, $A_2 = C \in \Sigma$, $A_3 = B \rightarrow (C \rightarrow (B \wedge C)) \in T_5$, $A_4 = C \rightarrow (B \wedge C)$ (MP 1,3), $A_5 = (B \wedge C)$ (MP 2,4), $A_6 = (B \wedge C) \rightarrow (A \vee (B \wedge C)) \in T_7$, $A_7 = (A \vee (B \wedge C))$ (MP 5,6).
Napomena. Dokaz smo mogli uraditi iz dva koraka. Prvo dokažemo $\vdash ((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \rightarrow ((A \vee (A \wedge C)) \vee ((B \wedge A) \vee (B \wedge C)))$ koristeći pravila disjunkcije, a zatim dokažemo $\vdash ((A \vee (A \wedge C)) \vee ((B \wedge A) \vee (B \wedge C))) \rightarrow (A \vee (B \wedge C))$ koristeći činjenicu da je $\vee$ sa lijeve strane i aksiomu supremuma. Na kraju ostaje da primjenimo tranzitivnost implikacije.

Z6. (a) Dokazati zakone komutativnosti i asocijativnosti za $\wedge$ i $\vee$.
(b) Dokazati De Morganove zakone.
(c) Dokazati $\vdash A \leftrightarrow (A \wedge A)$.
(d) Dokazati $\vdash A \leftrightarrow (A \vee A)$.

Rj. Urađeno na predavanjima.