Зад в) $(A\times C)\cup(B\times C)\subset(A\cup B)\times C$

$(x,y)\in(A\times C)\cup(B\times C)\leftrightarrow(x,y)\in A\times C\vee(x,y)\in B\times C$

$\leftrightarrow(x\in A\wedge y\in C)\vee(x\in B\wedge y\in C)$

$(x,y)\in(A\cup B)\times C\leftrightarrow x\in A\cup B\wedge y\in C\leftrightarrow$

$(x\in A\vee x\in B)\wedge(y\in C)$

$p: x\in A$; $q: y\in C$; $r: x\in B$

$$F: \overbrace{(p\wedge q)\vee(r\wedge q)}^{F_1}\rightarrow\overbrace{(p\vee r)\wedge q}^{F_2}$$

Провјеримо да ли је F таутологија

$v(p)$	$v(q)$	$v(r)$	$v(p\wedge q)$	$v(r\wedge q)$	$v(F_1)$	$v(p\vee r)$	$v(F_2)$	$v(F)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

$(\forall v\in 2^P\ v(F)=1)\Rightarrow$

F – таутологија $\Rightarrow$ Дати скуповна релација

За сваку $v \in 2^P$, за све $A, B \in F$

(I) $v(A \wedge B) = 1$ акко $v(A) = 1, v(B) = 1$

(II) $v(A \vee B) = 0$ акко $v(A) = 0, v(B) = 0$

(III) $v(A \to B) = 0$ акко $v(A) = 1, v(B) = 0$

(IV) $v(\neg A) = 1$ акко $v(A) = 0$

Зад Доказати да су следеће формуле таутологије свођењем на апсурд.

(а) $\models (A \to (B \to A))$

(б) $\models (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

(ц) $\models (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

Рј Треба доказати $(\forall v \in 2^P)\ v(A \to (B \to A)) = 1$. Прет. супротно $(\exists v \in 2^P)\ v(A \to (B \to A)) = 0$. Тада

$\underline{v(A) = 1}$ и $v(B \to A) = 0$

$v(B) = 1$ и $\underline{v(A) = 0}$

Контрадикција, наша прет. није тачна. Значи $(\forall v \in 2^P)\ v(A \to (B \to A)) = 1$

(b) Прет. да $(\exists v \in 2^P)$

$v\big((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))\big) = 0$

$v(A \to (B \to C)) = 1$ и $v((A \to B) \to (A \to C)) = 0$

$\underline{v(A \to (B \to C)) = 0}$ $\qquad v(A \to B) = 1 \quad v(A \to C) = 0$

$\underline{v(B) = 1}, \ \underline{v(A) = 1}, \ \underline{v(C) = 0}$

Контрадикција. Важи $(\forall v \in 2^P)\ v(F) = 1$.

(c) Прет. супротно $(\exists v \in 2^P)$

$v\big((A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))\big) = 0$

$v(A \to B) = 1$ и $v((B \to C) \to (A \to C)) = 0$

$v(A) \to B) = 0$ $\qquad v(B \to C) = 1 \quad v(A \to C) = 0$

$\underline{v(B) = 0 \quad v(A) = 1}, \ v(C) = 0$

Контрадикција. $(\forall v \in 2^P)\ v(F) = 1$.

Зад. Доказати да су следеће формуле таутологије свођењем на апсурд.

(a) $\models (A \to B) \lor (B \to A)$

(b) $\models ((A \to B) \to A) \to A$

(c) $\models (A \land (A \lor B)) \leftrightarrow A$

(d) $\models (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$

(9) (a) Прет. супротно $(\exists v \in 2^P)$

$v((A \to B) \vee (B \to A)) = 0$

$v(A \to B) = 0$ и $v(B \to A) = 0$

$\underline{v(A)=1 \quad v(B)=0}$, $\underline{v(B)=1 \quad v(A)=0}$

Контрадикција. Важи $(\forall v \in 2^P)$ $v(F)=1$.

(б) Прет. супротно $(\exists v \in 2^P)$

$v(((A \to B) \to A) \to A) = 0$

$v((A \to B) \to A) = 1 \qquad v(A) = 0$

$(v(A) \to v(B)) \to v(A) = 1$

$(\underbrace{0 \to v(B)}_{= 1}) \to 0 = 1$

$1 \to 0 = 1$

$0 = 1$, Контрадикција.

Важи $(\forall v \in 2^P)$ $v(F) = 1$.

(c) Прет. да $\exists v \in 2^P$

$v((A \wedge (A \vee B)) \leftrightarrow A) = 0$

I случај

$v(A \wedge (A \vee B)) = 1 \qquad v(A) = 0$

$v(A)=1$, $v(A\vee B)=1$

контрадикција!

II случај

$v(A\wedge(A\vee B))=0 \quad \wedge \quad v(A)=1$

$v(A)\wedge v(A\vee B)=0$

$v(A)\wedge(v(A)\vee v(B))=0$

$1 \wedge (\underbrace{1\vee v(B)}_{1})=0$

$1\wedge 1=0$

$1=0$. контрадикција

$(\forall v\in 2^P)\ v(F)=1$.

(d) Прет. да $\exists v\in 2^P$

$v((A\to B)\to((A\to\neg B)\to\neg A))=0$

$v(A\to B)=1 \qquad v((A\to\neg B)\to\neg A)=0$

$v(A)\to v(B)=1 \qquad v(A\to\neg B)=1 \quad v(\neg A)=0$

$1\to 0=1 \qquad v(\neg B)=1 \leftarrow v(A)=1$

$0=1 \qquad v(B)=0$

контрадикција.

Важи $(\forall v\in 2^P)\ v(F)=1$.

(Зад) Да ли су сведене фле тауто-логије

ⓐ $((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$

ⓑ $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$

ⓒ $((\neg p \wedge \neg q) \wedge r) \to ((p \wedge \neg q) \wedge \neg r)$

Одрадити за вјежбу.

(Зад) Испитати да ли за скупове A, B, C, D важи

$$(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D).$$

$x \in (A \setminus B) \cap (C \setminus D) \leftrightarrow x \in A \setminus B \wedge x \in C \setminus D \leftrightarrow$

$\leftrightarrow (x \in A \wedge \neg(x \in B)) \wedge (x \in C \wedge \neg(x \in D))$

$x \in (A \cap C) \setminus (B \cup D) \leftrightarrow x \in A \cap C \wedge \neg(x \in (B \cup D))$

$\leftrightarrow (x \in A \wedge x \in C) \wedge (\neg(x \in B \vee x \in D))$

$p: x \in A \quad q: x \in B \quad r: x \in C \quad s: x \in D$

формула F

$((p \wedge \neg q) \wedge (r \wedge \neg s)) \leftrightarrow ((p \wedge r) \wedge \neg(q \vee s))$

Направимо таблицу и провјеримо да ли је F таутологија.

Зад. Испитати да ли су формуле логички еквивалентне

(а) $A \equiv (p \to q) \vee r$

$B \equiv (p \vee q) \to r$

(б) $A \equiv p \to (q \to r)$

$B \equiv (p \to q) \to r$

(с) $A \equiv p \vee (q \vee r)$

$B \equiv (p \vee q) \vee r$

(а)

$v(p)$	$v(q)$	$v(r)$	$v(p \to q)$	$v(A)$	$v(p \vee q)$	$v(B)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	1	1	0	1

$\exists v: \begin{matrix} p & q & r \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}$ тд $v(A) \neq v(B) \Rightarrow$

формуле A и B нису логички екв.

(б) и (с) за вјежбу.

НОРМАЛНЕ ФОРМЕ

Дисјунктивна нормална форма

Ако није контрадикција, свака исказна формула може се представити у ДНФ.

Ако су $p_1, \ldots, p_n$, елементарна конјукција је формула облика $p_1^{\varepsilon_1} \land p_2^{\varepsilon_2} \land \ldots \land p_n^{\varepsilon_n}$ где је $p_i^{\varepsilon_i} = p_i$ или $p_i^{\varepsilon_i} = \neg p_i$

$v(p_1)$	$v(p_2)$	$\ldots$	$v(p_n)$	$v(A)$
$\vdots$				
				1 ← j-ти ред
$\vdots$				

$$\boxed{A_j = p_1^{\varepsilon_1^j} \land p_2^{\varepsilon_2^j} \land \ldots \land p_n^{\varepsilon_n^j}}$$

ако је $v(p_i) = 0$, $p_i^{\varepsilon_i} = \neg p_i$

ако је $v(p_i) = 1$, $p_i^{\varepsilon_i} = p_i$

$v_1, v_2, \ldots, v_k$ – валуације за које је A тачна

$$B = A_1 \lor A_2 \lor \ldots \lor A_k \quad (\text{ДНФ})$$

Конјунктивна нормална форма

Ако формула није таутологија, може се записати у конјунктивној нормалној форми. (као конјук. ел. дисјункција) КНФ

Ако су $p_1, p_2, \ldots, p_n$ исказни симболи, елемен. дисјункција је формула облика $p_1^{\varepsilon_1} \vee p_2^{\varepsilon_2} \vee \ldots \vee p_n^{\varepsilon_n}$ где је

$p_i^{\varepsilon_i} = p_i$ или $p_i^{\varepsilon_i} = \neg p_i$

$v(p_1)$	$v(p_2)$	...	$v(p_n)$	$v(A)$	
$\vdots$					
				0	j-ти ред
$\vdots$					

$$A_j = \underbrace{p_1^{\varepsilon_1^j} \vee p_2^{\varepsilon_2^j} \vee \ldots \vee p_n^{\varepsilon_n^j}}_{\text{елем. дисј.}}$$

$p_i^{\varepsilon_i^j} = p_i$ ако $v(p_i) = 0$

$p_i^{\varepsilon_i^j} = \neg p_i$ ако $v(p_i) = 1$

$v_1, v_2, \ldots, v_k$ – валуације за које је $v(A) = 0$

$$\boxed{B = A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_k}$$

Зад. Представити формулу у КНФ и ДНФ.
$(p \to q) \to r$.

Рј. Формирајмо таблицу истинитости за дату формулу.