(Зад) Користећи закон двојне негације доказати Персов закон $\vdash ((A \to B) \to A) \to A$

(Р) $\vdash ((A\to B)\to A)\to A \overset{тд}{\Longleftrightarrow} (A\to B)\to A \vdash A$

закон двојне негације
$\vdash \neg\neg A \leftrightarrow A$

Доказујемо $(A\to B)\to A \vdash \neg\neg A$

Користићемо правило за доказивање негације

$\neg A, (A\to B)\to A \vdash (A\to B)$?

$\neg A, (A\to B)\to A \vdash \neg(A\to B)$?

① $\neg A$ ② $(A\to B)\to A$ претпоставке

③ $\neg A \to (A\to B)$ аксиома негације ④ $(A\to B)$ мп. ①③

⑤ $((A\to B)\to A)\to(\neg A\to\neg(A\to B))$ инстанца правила контрапозиције

$\vdash (A\to B)\to(\neg B\to\neg A)$ за $A=(A\to B)$ и $B=A$

⑥ $\neg A\to\neg(A\to B)$ мп. ⑤②

⑦ $\neg(A\to B)$ мп. ①⑥

$$\left.\begin{aligned} &\neg A, (A\to B)\to A \vdash (A\to B) \\ &\neg A, (A\to B)\to A \vdash \neg(A\to B)\end{aligned}\right\} \text{правило} \underset{\text{за негацију}}{\Longrightarrow} (A\to B)\to A \vdash \neg\neg A$$

(зад) $\vdash (A \to B) \longleftrightarrow (\neg A \lor B)$

Докажимо да $\vdash (\neg A \lor B) \to (A \to B) \overset{\text{тд.}}{\Longleftrightarrow}$

правило за дисјункцију $$\begin{array}{c} \neg A \lor B \vdash A \to B \\ \hline\hline \end{array}$$

тд $$\begin{array}{c} \neg A \vdash A \to B \\ \hline\hline \vdash \neg A \to (A \to B) \end{array}$$ аксиома негације

$$\begin{array}{c} B \vdash A \to B \\ \hline\hline \vdash B \to (A \to B) \end{array}$$ тд. аксиома импликације

Сада докажимо $\vdash (A \to B) \to (\neg A \lor B) \overset{\text{тд.}}{\Longleftarrow}$

$$(A \to B) \vdash \neg A \lor B$$

$$\begin{array}{c} A \lor \neg A,\ A \to B \vdash \neg A \lor B \\ \hline\hline \end{array}$$ правило за дисјункцију

$A, A \to B \vdash \neg A \lor B$

① A ② $A \to B$ прет.

③ B мп ①②

④ $B \to (\neg A \lor B)$ аксиома дисј.

5) $\neg A \lor B$ мп. ③④

$\neg A, A \to B \vdash \neg A \lor B$

① $\neg A$ ② $A \to B$ прет.

③ $\neg A \to (\neg A \lor B)$ аксиома дисј.

④ $\neg A \lor B$ мп. ①③

Зад. Из закона искључења трећег и осталих аксиома доказати другу аксиому негације $\vdash (A\to B)\to((A\to\neg B)\to\neg A)$.

Рј. $\overset{тд\times 2}{\Longleftrightarrow} (A\to B), A\to\neg B\vdash\neg A$

$$\frac{A\vee\neg A,\ A\to B,\ A\to\neg B\vdash\neg A}{\quad}$$ правило за дисјункцију

(I) $A, A\to B, A\to\neg B\vdash\neg A$ (II) $\neg A, A\to B, A\to\neg B\vdash\neg A$ (очигледно)

① A ② $A\to B$

③ $A\to\neg B$ претпоставке

④ B мп ①②   ⑤ $\neg B$ мп ①③

⑥ $\neg B\to(B\to\neg A)$ аксиома негације $\neg A\to(A\to B)$

⑦ $B\to\neg A$ мп. ⑤⑥

⑧ $\neg A$ мп. ④⑦

Зад. Користећи закон искључења трећег доказати $\vdash((A\vee B)\to A)\vee((A\vee B)\to B)$

Рј.

$$\frac{A\vee\neg A\vdash((A\vee B)\to A)\vee((A\vee B)\to B)}{\quad}$$ правило за дисјункцију

$A\vdash((A\vee B)\to A)\vee((A\vee B)\to B)$ (I)

① A претпоставка   ② $A\to((A\vee B)\to A)$ аксиома

③ $(A\vee B)\to A$ мп ①②   ④ $((A\vee B)\to A)\to((A\vee B)\to A\vee(A\vee B)\to B$ аксиома дис.: $A\to(A\vee B)$

⑤ $((A\vee B)\to A)\vee((A\vee B)\to B)$ мп. ③④

⑪ $\neg A \vdash ((A \vee B) \to A) \vee ((A \vee B) \to B)$

① $\neg A$ прет.

② $\neg A \to (A \to B)$ аксиома негације

③ $A \to B$ мп ①②

④ $(A \to B) \to ((B \to B) \to ((A \vee B) \to B))$ аксиома дисјункције

⑤ $B \to B$ (теорема таутологије)

⑥ $(B \to B) \to ((A \vee B) \to B)$ мп. ③④

⑦ $(A \vee B) \to B$ мп. ⑤⑥

⑧ $((A \vee B) \to B) \to (((A \vee B) \to A) \vee ((A \vee B) \to B))$

⑨ $((A \vee B) \to A) \vee ((A \vee B) \to B)$ мп. ⑦⑧

Зад ⓐ $\vdash \neg(A \wedge B) \longleftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

(б) $\vdash \neg(A \vee B) \longleftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

Р) ⓐ $\vdash \neg(A \wedge B) \longleftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

1° $\vdash \neg(A \wedge B) \to (\neg A \vee \neg B)$

① $\neg A \to (\neg A \vee \neg B)$ аксиома

② $\neg B \to (\neg A \vee \neg B)$ аксиома

③ $(\neg A \to (\neg A \vee \neg B)) \to (\neg(\neg A \vee \neg B) \to \neg\neg A)$
контрапозиција за ①

④ $(\neg B \to (\neg A \vee \neg B)) \to (\neg(\neg A \vee \neg B) \to \neg\neg B)$
контрапозиција за ②

⑤ $\neg(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg\neg A$ мп ① ③

⑥ $\neg(\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg\neg B$ мп ② ④

⑦ $\neg(\neg A \vee \neg B) \vdash A$ } на основу ⊛ замјена еквивал. формула
⑧ $\neg(\neg A \vee \neg B) \vdash B$ }

⊛
$\boxed{\begin{array}{l} \vdash \neg\neg A \Leftrightarrow A \\ \vdash \neg\neg B \Leftrightarrow B \end{array}}$

(7/8) + правило конјункције } ⑨ $\neg(\neg A \vee \neg B) \vdash A \wedge B$

⑩ $\vdash \neg(\neg A \vee \neg B) \rightarrow (A \wedge B)$ тд.

⑪ $\vdash (\neg(\neg A \vee \neg B) \rightarrow (A \wedge B)) \rightarrow (\neg(A \wedge B) \rightarrow \neg\neg(\neg A \vee \neg B))$
контрапозиција за ⑩

⑫ $\vdash \neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$ мп ⑩ и ⑪

2° $\vdash (\neg A \vee \neg B) \rightarrow \neg(A \wedge B) \overset{тд}{\Longleftarrow}$

$\neg A \vee \neg B \vdash \neg(A \wedge B) \Longleftarrow$ правило за дисјунк.

i) $\neg A \vdash \neg(A \wedge B)$ ii) $\neg B \vdash \neg(A \wedge B)$

① $\neg A$ прет.

Доказ за i) ћемо извршити правилом за доказивање негације

$\neg A, A \wedge B \vdash \neg A$ ⟶ ① $\neg A$ ② $A \wedge B$ прет.

$\neg A, A \wedge B \vdash A$ ⟶ ③ $(A \wedge B) \rightarrow A$
④ A мп. ② ③

⇓ правило за негацију

$\boxed{\neg A \vdash \neg(A \wedge B)}$

Доказ за (ii) је сличан.

$\neg B \vdash \neg(A \wedge B)$

Опет користимо закон за доказивање негације.

$\left.\begin{array}{l}\neg B, A \wedge B \vdash B \\ \neg B, A \wedge B \vdash \neg B\end{array}\right\} \longrightarrow$

① $\neg B$ ② $A \wedge B$ прет.

③ $(A \wedge B) \to B$

④ B мп. ② ③

$\Downarrow$ правило за доказивање негације

$\neg B \vdash \neg(A \wedge B)$.

(б) $\vdash \neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

1° $\vdash \neg(A \vee B) \to (\neg A \wedge \neg B)$

правило конјункције + тд

(i) $\neg(A \vee B) \vdash \neg A$ (ii) $\neg(A \vee B) \vdash \neg B$

① $A \to (A \vee B)$ аксиома

② $(A \to (A \vee B)) \to (\neg(A \vee B) \to \neg A)$ контрапозиција за ①

③ $\neg(A \vee B) \to \neg A$ мп. ① ②

④ $\neg(A \vee B) \vdash \neg A$ тд. ③

(ii) се доказује слично

② $\vdash (\neg A \land \neg B) \to \neg(A \lor B) \xLeftarrow{тд}$

$\neg A \land \neg B \vdash \neg(A \lor B)$

① $(\neg A \land \neg B) \to \neg A$ аксиома

② $(\neg A \land \neg B) \to \neg B$ аксиома

③ $((\neg A \land \neg B) \to \neg A) \to (\neg\neg A \to \neg(\neg A \land \neg B))$ контрапоз. за ①

④ $((\neg A \land \neg B) \to \neg B) \to (\neg\neg B \to \neg(\neg A \land \neg B))$ контрапоз за ②

⑤ $\neg\neg A \to \neg(\neg A \land \neg B)$ (5') $A \to \neg(\neg A \land \neg B)$ мп①③

⑥ $\neg\neg B \to \neg(\neg A \land \neg B)$ (6') $B \to \neg(\neg A \land \neg B)$ мп②④

⑦ $(A \to \neg(\neg A \land \neg B)) \to ((B \to \neg(\neg A \land \neg B)) \to ((A \lor B) \to \neg(\neg A \land \neg B)))$

⑧ $(A \lor B) \to \neg(\neg A \land \neg B)$ мп (5') (6') ⑦

⑨ $\neg\neg(\neg A \land \neg B) \to \neg(A \lor B)$ контрапозиција за ⑧

(9') $(\neg A \land \neg B) \to \neg(A \lor B)$ $\Gamma \vdash \underline{\neg\neg A \Leftrightarrow A}$

За вјежбу: без позивања на закон искључења трећег доказати негирани закон искључења трећег $\vdash \neg\neg(A \lor \neg A)$. (користити законе де Моргана и прав. за доказивање негације)

Σ неконзистентан ако $\exists A$ тд

$$\Sigma \vdash A \quad и \quad \Sigma \vdash \neg A$$

Σ конзистентан ако $\nexists A$ тд $\Sigma \vdash A$
$\Sigma \vdash \neg A$

(Зад) Нека је Σ скуп формула. Доказати
Σ противрјечан $\Longleftrightarrow$ из Σ доказива произв. формула

$\Longleftarrow$ Нека је из $\Sigma \vdash B$, B произв. формула.
Дакле, ако је B фла онда је $\neg B$ формула
Из Σ слиједи произвољна фла, па

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma \vdash B \\ \Sigma \vdash \neg B \end{array}\right\} \Rightarrow$$ тј Σ противрјечан (неконзистентан)

$\Longrightarrow$ Σ противрјечан тј $\exists A$ ① $\Sigma \vdash A$
② $\Sigma \vdash \neg A$

③ $\vdash \neg A \to (A \to B)$ аксиома негације (B - произв)

④ $\Sigma \vdash \neg A \to (A \to B)$ правило слабљења за ③

⑤ $\Sigma \vdash (A \to B)$ мп ②④

⑥ $\Sigma \vdash B$ мп. ①⑤

Из Σ смо доказали произв. флу B.

(зад) Нека је C исказна формула, а Σ скуп формула. Доказати

$$\Sigma \cup \{C\} \text{ непротивријечан} \iff \Sigma \nvdash \neg C$$

(р)

($\Rightarrow$) Нека је $\Sigma \cup \{C\}$ непротивријечан. Докажимо $\Sigma \nvdash \neg C$. Претпоставимо супрот.

$$\Sigma \vdash \neg C \xRightarrow[\text{слабљење}]{\text{правило}} \left.\begin{array}{l} \Sigma, C \vdash \neg C \\ \Sigma, C \vdash C \ (\text{тривијално}) \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ Σ, C противријечан. ↯ контрадикција $\Sigma \vdash \neg C$.

($\Leftarrow$) Нека $\Sigma \nvdash C$. Докажимо $\Sigma \cup \{C\}$ непротивријечан. Претпоставимо $\Sigma \cup \{C\}$ противријечан. тј $(\exists A)$ т.д

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma \cup \{C\} \vdash A \\ \Sigma \cup \{C\} \vdash \neg A \end{array}\right\} \Rightarrow \Sigma \vdash \neg C$$

Али како $\Sigma \nvdash C$, наша претпоставка није тачна, па $\Sigma \cup \{C\}$ непротивријечан

(зад) Нека је Σ непротивријечан скуп фла ㉚
Доказати да је тада бар један од скупова $\Sigma \cup \{A\}$ или $\Sigma \cup \{\neg A\}$ непротивријечан.

(р) Претпоставимо супротно

Σ - непротивријечан и Σ, A противријечан (*)
$\Sigma, \neg A$ противријечан (**)

$$(*) \Rightarrow \exists B \quad \left.\begin{array}{l}\Sigma, A \vdash B\\ \Sigma, A \vdash \neg B\end{array}\right\} \xRightarrow[\text{за доказив. негације}]{\text{правило}} \Sigma \vdash \neg A \quad ①$$

$$(**) \Rightarrow \exists C \quad \left.\begin{array}{l}\Sigma, \neg A \vdash C\\ \Sigma, \neg A \vdash \neg C\end{array}\right\} \xRightarrow[\text{за доказ. негације}]{\text{правило}} \Sigma \vdash \neg\neg A$$

тј

$\Sigma \vdash A$ ②

Из ① и ② Σ противријечан.
Контрадикција.

деф. Скуп формула Σ је <u>максимално непротивријечан</u> ако је Σ непротивр. и $(\forall C \notin \Sigma)$ $\Sigma \cup \{C\}$ противријечан.

Зад) Ако је Σ максимално непротивријечан. Доказати

$$\Sigma \vdash C \iff C \in \Sigma$$

Рј)

($\Leftarrow$) тривијално

($\Rightarrow$) $(\Sigma \vdash C \Rightarrow C \in \Sigma)$

Претпоставимо $C \notin \Sigma$. Тада пошто је Σ максим. противријечан онда Σ, C противријечан $\xrightarrow{\text{деф.}}$

$$(\exists A) \quad \left.\begin{array}{l} \Sigma, C \vdash A \\ \Sigma, C \vdash \neg A \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{правило} \\ \Rightarrow \text{за} \\ \text{негацију} \end{array} \quad \Sigma \vdash \neg C$$

Па је Σ противријечан. Контрадикција!

(Зад) Нека је Σ максимално непротивр. скуп, A, B - формуле. Тада

$$A \wedge B \in \Sigma \iff A \in \Sigma \text{ и } B \in \Sigma$$

(Д)

$$\boxed{\Sigma \text{ максим. непротивр. тада } \Sigma \vdash C \text{ акко } C \in \Sigma}$$

$(\Rightarrow)$

$$A \wedge B \in \Sigma \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \Sigma \vdash A \wedge B \\ \Sigma \vdash (A \wedge B) \to A \\ \text{(аксиома и правила слабљења)} \end{array}\right\} \overset{\text{МП}}{\Rightarrow} \Sigma \vdash A \Rightarrow A \in \Sigma$$

Слично

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma \vdash (A \wedge B) \\ \Sigma \vdash (A \wedge B) \to B \end{array}\right\} \overset{\text{МП}}{\Rightarrow} \Sigma \vdash B \Rightarrow B \in \Sigma$$

$(\Leftarrow)$

$$A \in \Sigma, B \in \Sigma \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \Sigma \vdash A, \Sigma \vdash B \\ \Sigma \vdash A \to (B \to (A \wedge B)) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{\text{МП} \times 2}{\Sigma \vdash A \wedge B} \Rightarrow A \wedge B \in \Sigma$$