Зад (в) $(A\times C)\cup(B\times C)\subset(A\cup B)\times C$

$(x,y)\in(A\times C)\cup(B\times C)\leftrightarrow(x,y)\in A\times C \lor (x,y)\in B\times C$

$\leftrightarrow(x\in A\land y\in C)\lor(x\in B\land y\in C)$

$(x,y)\in(A\cup B)\times C\leftrightarrow x\in A\cup B\land y\in C\leftrightarrow$

$(x\in A\lor x\in B)\land(y\in C)$

$p: x\in A$; $q: y\in C$; $r: x\in B$

$$F: \overbrace{(p\land q)\lor(r\land q)}^{F_1}\rightarrow\overbrace{(p\lor r)\land q}^{F_2}$$

Провјеримо да ли је F таутологија

$v(p)$	$v(q)$	$v(r)$	$v(p\land q)$	$v(r\land q)$	$v(F_1)$	$v(p\lor r)$	$v(F_2)$	$v(F)$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	0	1
1	0	0	0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	1

$(\forall v\in 2^P \; v(F)=1)\Rightarrow$

F – таутологија $\Rightarrow$ важи скуповна релација

За сваку $v \in 2^P$, за све $A, B \in F$

(I) $v(A \wedge B) = 1$ акко $v(A)=1, v(B)=1$

(II) $v(A \vee B) = 0$ акко $v(A)=0, v(B)=0$

(III) $v(A \to B) = 0$ акко $v(A)=1, v(B)=0$

(IV) $v(\neg A) = 1$ акко $v(A)=0$

Зад Доказати да су следеће формуле таутологије свођењем на апсурд.

(а) $\models (A \to (B \to A))$

(б) $\models (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

(ц) $\models (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$

Р) Треба доказати $(\forall v \in 2^P)\ v(A \to (B \to A)) = 1$. Прет. супротно $(\exists v \in 2^P)\ v(A \to (B \to A)) = 0$. Тада

$\underline{v(A)=1}$ и $v(B \to A) = 0$

$v(B) = 1$ и $\underline{v(A) = 0}$

$\lightning$

Контрадикција, наша прет. није тачна. Важи $(\forall v \in 2^P)\ v(A \to (B \to A)) = 1$

(б) Прет. да $(\exists v \in 2^P)$

$v((A\to(B\to C)) \to ((A\to B)\to(A\to C))) = 0$

$v(A\to(B\to C)) = 1$ и $v((A\to B)\to(A\to C)) = 0$

$v(A\to B)=1$ $v(A\to C)=0$

$v(A\to(B\to C))=0$

$\lightning$

$v(B)=1$, $v(A)=1$, $v(C)=0$

Контрадикција. Важи $(\forall v\in 2^P)\ v(F)=1$.

(c) Прет. супротно $(\exists v\in 2^P)$

$v((A\to B)\to((B\to C)\to(A\to C)))=0$

$v(A\to B)=1$ и $v((B\to C)\to(A\to C))=0$

$v(A\to B)=0$

$v(B\to C)=1$ $v(A\to C)=0$

$v(B)=0$ $v(A)=1$, $v(C)=0$

Контрадикција. $(\forall v\in 2^P)\ v(F)=1$.

Зад. Доказати да су следеће формуле таутологије свођењем на апсурд.

(a) $\models (A\to B)\lor(B\to A)$

(б) $\models ((A\to B)\to A)\to A$

(c) $\models (A\land(A\lor B))\leftrightarrow A$

(d) $\models (A\to B)\to((A\to \neg B)\to\neg A)$

(9) (a) Прет. супротно $(\exists v \in 2^P)$

$v((A \to B) \vee (B \to A)) = 0$

$v(A \to B) = 0$ и $v(B \to A) = 0$

$\underline{v(A) = 1 \quad v(B) = 0}$ $\quad$ $\underline{v(B) = 1 \quad v(A) = 0}$

Контрадикција. Важи $(\forall v \in 2^P)\ v(F) = 1$.

(b) Прет. супротно $(\exists v \in 2^P)$

$v(((A \to B) \to A) \to A) = 0$

$v((A \to B) \to A) = 1 \qquad v(A) = 0$

$(v(A) \to v(B)) \to v(A) = 1$

$(\underbrace{0 \to v(B)}_{=1}) \to 0 = 1$

$1 \to 0 = 1$

$0 = 1$, Контрадикција.

Важи $(\forall v \in 2^P)\ v(F) = 1$.

(c) Прет. да $\exists v \in 2^P$

$v((A \wedge (A \vee B)) \Leftrightarrow A) = 0$

I случај

$v(A \wedge (A \vee B)) = 1 \qquad v(A) = 0$

$v(A)=1$, $v(A\vee B)=1$

контрадикција!

II случај

$v(A\wedge(A\vee B))=0 \quad \wedge \quad v(A)=1$

$v(A)\wedge v(A\vee B)=0$

$v(A)\wedge(v(A)\vee v(B))=0$

$1 \wedge (\underbrace{1\vee v(B)}_{1})=0$

$1\wedge 1=0$

$1=0$. контрадикција

$(\forall v\in 2^P)\ v(F)=1$.

(d) Прет. да $\exists v\in 2^P$

$v((A\to B)\to((A\to\neg B)\to\neg A))=0$

$v(A\to B)=1 \qquad v((A\to\neg B)\to\neg A)=0$

$v(A)\to v(B)=1 \qquad v(A\to\neg B)=1 \quad v(\neg A)=0$

$1\to 0=1 \qquad v(\neg B)=1 \leftarrow v(A)=1$

$0=1 \qquad v(B)=0$

контрадикција.

Важи $(\forall v\in 2^P)\ v(F)=1$.

(Зад) Да ли су сведене фле таутологије

(а) $((p\to q)\wedge(q\to r))\to(p\to r)$

(б) $(p\to q)\leftrightarrow(\neg p\vee q)$

(ц) $((\neg p\wedge\neg q)\wedge r)\to((p\wedge\neg q)\wedge\neg r)$

Одрадити за вјежбу.

(Зад) Испитати да ли за скупове A, B, C, D важи

$$(A\setminus B)\cap(C\setminus D)=(A\cap C)\setminus(B\cup D).$$

$x\in(A\setminus B)\cap(C\setminus D)\leftrightarrow x\in A\setminus B\wedge x\in C\setminus D\leftrightarrow$

$\leftrightarrow(x\in A\wedge\neg(x\in B))\wedge(x\in C\wedge\neg(x\in D))$

$x\in(A\cap C)\setminus(B\cup D)\leftrightarrow x\in A\cap C\wedge\neg(x\in(B\cup D))$

$\leftrightarrow(x\in A\wedge x\in C)\wedge(\neg(x\in B\vee x\in D))$

$p: x\in A\quad q: x\in B\quad r: x\in C\quad s: x\in D$

формула F

$((p\wedge\neg q)\wedge(r\wedge\neg s))\leftrightarrow((p\wedge r)\wedge\neg(q\vee s))$

Направимо таблицу и провјеримо да ли је F таутологија.

Зад. Испитати да ли су формуле логички еквивалентне

a) $A \equiv (p \to q) \vee r$

$B \equiv (p \vee q) \to r$

b) $A \equiv p \to (q \to r)$

$B \equiv (p \to q) \to r$

c) $A \equiv p \vee (q \vee r)$

$B \equiv (p \vee q) \vee r$

a)

$v(p)$	$v(q)$	$v(r)$	$v(p\to q)$	$v(A)$	$v(p \vee q)$	$v(B)$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	1	1	0	1

$\exists v: \begin{array}{ccc} p & q & r \\ 1 & 1 & 0 \end{array}$ тд $v(A) \neq v(B) \Rightarrow$

формуле A и B нијесу логички екв.

b) и c) за вјежбу.

НОРМАЛНЕ ФОРМЕ

Дисјунктивна нормална форма

Ако није контрадикција, свака исказна формула може се представити у ДНФ.

Ако су $p_1, \dots, p_n$, елементарна конјукција је формула облика $p_1^{\varepsilon_1} \wedge p_2^{\varepsilon_2} \wedge \dots \wedge p_n^{\varepsilon_n}$ где је $p_i^{\varepsilon_i} = p_i$ или $p_i^{\varepsilon_i} = \neg p_i$

$v(p_1)$	$v(p_2)$	...	$v(p_n)$	$v(A)$
⋮				
				1 ← j-ти ред
⋮				

$$\boxed{\begin{array}{l} A_j = p_1^{\varepsilon_1^j} \wedge p_2^{\varepsilon_2^j} \wedge \dots \wedge p_n^{\varepsilon_n^j} \\ \text{ако је } v(p_i) = 0,\ p_i^{\varepsilon_i} = \neg p_i \\ \text{ако је } v(p_i) = 1,\ p_i^{\varepsilon_i} = p_i \end{array}}$$

$v_1, v_2, \dots, v_k$ – валуације за које је A тачна

$$B = A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_k \quad (\text{ДНФ})$$

Конјуктивна нормална форма

Ако формула није таутологија, може се записати у конјуктивној нормалној форми. (као конјук. ел. дисјункција) КНФ

Ако су $p_1, p_2, \dots, p_n$ исказни симболи, елемен. дисјункција је формула облика $p_1^{\varepsilon_1} \vee p_2^{\varepsilon_2} \vee \dots \vee p_n^{\varepsilon_n}$ где је

$p_i^{\varepsilon_i} = p_i$ или $p_i^{\varepsilon_i} = \neg p_i$

$v(p_1)$	$v(p_2)$	$\dots$	$v(p_n)$	$v(A)$	
$\vdots$					
				0	– j-ти ред
$\vdots$					

$$A_j = \underbrace{p_1^{\varepsilon_1^j} \vee p_2^{\varepsilon_2^j} \vee \dots \vee p_n^{\varepsilon_n^j}}_{\text{елем. дисј.}}$$

$p_i^{\varepsilon_i^j} = p_i$ ако $v(p_i) = 0$

$p_i^{\varepsilon_i^j} = \neg p_i$ ако $v(p_i) = 1$

$v_1, v_2, \dots, v_k$ – валуације за које је $v(A) = 0$

$$\boxed{B = A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_k}$$

Зад. Представити формулу у КНФ и ДНФ.
$(p \to q) \to r$.

Рј. Формирајмо таблицу истинитости за дату формулу.

$v(p)$	$v(q)$	$v(r)$	$v(p\to q)$	$v((p\to q)\to r)$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
0	1	0	1	0
0	0	1	1	1
0	0	0	1	0

* За ДНФ посматрамо валуације где је валуација формуле 1

1° $v(p)=v(q)=v(r)=1$ $\qquad p\land q\land r$

2° $v(p)=1 \quad v(q)=0 \quad v(r)=1$ $\qquad p\land\neg q\land r$

3° $v(p)=1 \quad v(q)=v(r)=0$ $\qquad p\land\neg q\land\neg r$

4° $v(p)=0 \quad v(q)=v(r)=1$ $\qquad \neg p\land q\land r$

5° $v(p)=v(q)=0 \quad v(r)=1$ $\qquad \neg p\land\neg q\land r$

ДНФ: $(p\land q\land r)\lor(p\land\neg q\land r)\lor(p\land\neg q\land\neg r)\lor(\neg p\land q\land r)\lor(\neg p\land\neg q\land r)$

* За КНФ посматрамо валуације (редове) где је валуација формуле 0

1° $v(p)=1 \quad v(q)=1 \quad v(r)=0$ $\qquad \neg p\lor\neg q\lor r$

2° $v(p)=0 \quad v(q)=1 \quad v(r)=0$ $\qquad p\lor\neg q\lor r$

3° $v(p)=v(q)=v(r)=0$ $\qquad p\lor q\lor r$

КНФ: $(\neg p\lor\neg q\lor r)\land(p\lor\neg q\lor r)\land(p\lor q\lor r)$

Формула A је логичка последица скупа формула Σ ако за сваку валуацију за коју су истините све формуле из Σ важи да је истинита и формула A.
Другачије речено, формула A је логич. последица скупа формула Σ ако је формула A истинита кад год су истините све претпоставке скупа Σ. Ознака $\Sigma \models A$
Ако је $\Sigma = \emptyset$, уместо $\emptyset \models A$ пишемо $\models A$, што је у сагласности са појмом таутологије.
Таутологија је логичка последица празног скупа претпоставки.
Скуп формула Σ је логички конзистен. (непротивријечан) ако не постоји исказна формула A за коју $\Sigma \models A$ и $\Sigma \models \neg A$. ~~Скуп~~ У супротном, Σ је логички неконзистентан (противрјечан) скуп формула.

Скуп формула је задовољив ако постоји валуација за коју су истините све његове формуле.

Зад Формула B је логичка последица формуле A ($A \models B$) акко је $A \to B$ таутологија

Дј $\Rightarrow$ Нека важи $A \models B$ (*) тј $(\forall v \in 2^P)\ v(A)=1$ $\Rightarrow v(B)=1$.

$v(A \to B) = ?$

Ако је $v(A)=1 \overset{(*)}{\Rightarrow} v(B)=1 \Rightarrow v(A\to B) = 1 \to 1 = 1$

Ако је $v(A)=0 \Rightarrow v(A \to B) = \underset{\underset{0}{\parallel}}{v(A)} \to v(B) = 1$

Дакле, $(\forall v \in 2^P)\ v(A\to B)=1$ тј $\models A \to B$.

$\Leftarrow$ Нека важи $\models A \to B$, тј. $(\forall v \in 2^P)\ v(A\to B)=1$.

Треба доказати да ако је $v(A)=1 \Rightarrow v(B)=1$.

Нека је $v(A)=1$

$$\left.\begin{array}{l} v(A)=1 \\ v(A\to B)=1 \\ \overset{\parallel}{v}(\underset{\underset{1}{\parallel}}{A}) \to v(B) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow v(B)=1 \quad \text{тј. } A \models B$$

Зад $\Sigma, A \models B$ акко $\Sigma \models A \to B$

Рј ($\Rightarrow$) Нека важи $\Sigma, A \models B$ тј.

$(\forall v \in 2^P)\ v(\Sigma)=1$ и $v(A)=1 \Rightarrow v(B)=1$ (*)

$(v(C)=1\ \forall C \in \Sigma)$

Треба доказати да из $v(\Sigma)=1 \Rightarrow v(A\to B)=1$.

Нека $v(\Sigma)=1 \to$ ако $v(A)=1 \overset{*}{\Rightarrow} v(B)=1 \Rightarrow v(A\to B)= =1\to 1=1$

$\searrow$ ако $v(A)=0$, $v(A\to B)=\underset{0}{v(A)}\to v(B)=1$

Дакле, ако је $v(\Sigma)=1 \Rightarrow v(A\to B)=1$, тј. $\Sigma \models A\to B$.

($\Leftarrow$) $\Sigma \models A\to B$ $(\forall v \in 2^P)$ за $v(\Sigma)=1 \overset{*}{\Rightarrow} v(A\to B)=1$

Треба доказати $v(\Sigma)=1, v(A)=1 \Rightarrow v(B)=1$.

Нека је $v(\Sigma)=1, v(A)=1 \overset{*}{\Rightarrow} v(A\to B)=1$

$\underset{1}{v(A)}\to v(B)=1 \Rightarrow v(B)=1$.

Зад Нека је $\Sigma=\{p_1 \vee p_2, p_1\to p_3\}$. Доказати да је $\Sigma \models p_2 \vee p_3$. ($p_1, p_2, p_3$ су произвољне формуле.)

Рј Треба доказати да из $v(\Sigma)=1$ $(v(C)=1\ \forall C\in\Sigma)$ слиједи $v(p_2\vee p_3)=1$.

Претпоставимо супротно, да $(\exists v^* \in 2^P)\ v^*(\Sigma)=1 \Rightarrow v^*(p_2\vee p_3)=0$

$v^*(p_1 \vee p_2)=1$ и $v^*(p_1 \to p_3)=1$ | $v^*(p_2)=0$ $v^*(p_3)=0$

$v^*(p_1)=1 \longrightarrow v^*(p_1) \to v^*(p_3)=1$

$1 \to 0 = 1$

$\underline{0 = 1}$

Контрадикција.

Важи $\Sigma \models p_2 \vee p_3$.

Зад. Доказати да ако важи $\models A$ и $\models A \to B$, тада $\models B$.

Рј. Претпоставимо да важи $\models A$, $\models A \to B$ и $\not\models B$.

$(\forall v \in 2^P)\ v(A)=1$ и $(\forall v \in 2^P\ v(A \to B)=1)$.

$(\exists v^* \in 2^P\ v^*(B)=0)$

$(\forall v \in 2^P)\ v(A)=v(A \to B)=1$. Како то важи за сваку валуацију, важи и за v^*

$v^*(A)=v^*(A \to B)=1$.

$v^*(A) \to v^*(B)=1$

$1 \to 0 = 1$

$0 = 1$

Контрадикција. Наша претпоставка је нетачна, $\models B$.

(зад) Скуп формула је логички неконзистентан акко је свака исказна формула његова логичка последица.

(⇐) Нека је Σ скуп формула такав да је свака ~~исказна~~ формула логичка последица од Σ, тј. $(\forall B \in F)$ $\Sigma \models B$. Нека је $A \in F$ тада и $\neg A \in F$. тј A и $\neg A$ су формуле, како је свака формула логичка последица од Σ онда је $\Sigma \models A$ и $\Sigma \models \neg A$ тј Σ је неконзистентан.

(⇒) Прет. да је Σ неконзистентан. тј $(\exists A\text{-формула})$ тд. $\Sigma \models A$ и $\Sigma \models \neg A$. тј $(\forall v \in 2^P)$ $\underbrace{v(\Sigma)=1}_{\forall c \in \Sigma\ v(c)=1}$ $\Rightarrow v(A)=v(\neg A)=1$ скраћено

Посматрајмо формулу $F = A \to (\neg A \to B)$. Ова формула је таутологија. Пошто формула F важи за сваку $v \in 2^P$, важиће и за валуац. v за коју су све формуле из Σ истините, тј.

$\Sigma \models A \to (\neg A \to B)$ тј

$(\forall v \in 2^P)\ v(\Sigma)=1 \Rightarrow v(A \to (\neg A \to B)) = 1$

$v(A) \to (v(\neg A) \to v(B)) = 1$
$v(A) = 1 \quad v(\neg A) = 1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{v(B)=1}$

Дакле, за $v \in 2^P$ за коју је $v(\Sigma)=1$ важи $v(B)=1$ тј. $\Sigma \models B$.

(Зад) Доказати да је скуп формула противрјечан акко је контрадикција логичка посљедица тог скупа.

(Р) ($\Rightarrow$) Нека је Σ противрјечан скуп формула тј. $\exists A \in F$ $\Sigma \models A$, $\Sigma \models \neg A$ тј. $(\forall v \in 2^P)\ v(\Sigma)=1 \Rightarrow v(A)=1, v(\neg A)=1$

$v(A \wedge \neg A) = v(A) \wedge v(\neg A) = 1 \wedge 1 = 1$

Дакле $(\forall v \in 2^P)\ v(\Sigma)=1 \Rightarrow v(A \wedge \neg A) = 1$ тј. $\Sigma \models A \wedge \neg A$. (А формула ~~а~~ $A \wedge \neg A$ је контрадикција)

($\Leftarrow$) Нека је B контрадикција и $\Sigma \models B$. Како је формула B контрадикција тј. $\forall v \in 2^P$ $v(B)=0$, онда је формула $B \to \neg B$ таутологија. ($\models B \to \neg B$)

Нека $v(\Sigma)=1 \Rightarrow v(B)=1$. Пошто је $B \to \neg B$ таутологија што је $v(B \to \neg B)=1$

$\underbrace{\underset{\underset{1}{\parallel}}{v(B)} \to v(\neg B) = 1}$

$\Downarrow$

$v(\neg B)=1$ тј $\Sigma \models \neg B$.

Скуп Σ је противрјечан.

Зад Скуп формула је конзистентан акко је задовољив.

($\Rightarrow$) Нека је Σ конзистентан. Претпоставимо ~~да~~ није задовољив.

тј $(\nexists v \in 2^P)$ тд $v(\Sigma)=1$

$\Gamma v(B)=1 \; \forall B \in \Sigma$,

Због тога $\Sigma \models A$, за свако A. Како важи за ~~неку~~ сваку формулу A $\Sigma \models A$, ~~и~~ и $\neg A$ је формула па $\Sigma \models \neg A$. тј Σ је ~~а~~ неконзистентан. Нетачна претпоставка Σ је задовољив.

($\Leftarrow$) Нека је Σ задовољив. Прет. да је неконз. Σ задовољив, тј $(\exists v \in 2^P)$ $\underbrace{(\forall B \in \Sigma \;\; v(B)=1)}_{v(\Sigma)=1}$

Пошто је Σ неконзистентан. $\exists A$ $\Sigma \models A$ и $\Sigma \models \neg A$. тј

$v^* \in 2^P \quad v^*(\Sigma) = 1 \Rightarrow \underline{v^*(A^*) = 1} \quad v^*(\neg A^*) = 1$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \parallel$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \underline{v^*(A) = 0}$

Нетачна прет.

Σ је конзистентан.