Digitalno upravljanje

Žarko Zečević
Elektrotehnički fakultet
Univerzitet Crne Gore

Predavanje 3

Funkcija diskretnog prenosa

Ishodi učenja:

Nakon savladavanja gradiva sa ovog predavanja studenti će moći da:

- Definišu Z transformaciju signala/sistema
- Naprave vezu između Laplasove i Z transformacije signala/sistema
- Odrede funkciju prenosa hibridnog sistema
- Analitičkim putem odrede odziv hibridnog sistema u trenucima odabiranja

Z-transformacija

Laplasova transformacija je jedan od osnovnih alata za analizu kontinualnih sistema. U principu, ona se može koristiti i za modelovanje diskretnih sistema. Međutim, može se pokazati da LT diskretnog signala/sistema iracionalna funkcija, što je čini komplikovanom za bilo kakve matematičke manipulacije.

Signal na izlazu iz odabirača se modeluje na sljedeći način:

$$f^*(t) = f(t)\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t - nT).$$

Laplasova transformacija odabranog signala je jednaka:

$$F^*(s) = \int_0^{\infty} f^*(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\delta(t - nT)e^{-st}dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty} f(nT)\delta(t - nT)e^{-st}dt = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)e^{-nTs}.$$

Z-transformacija

Prethodna funkcija se može transformisati u racionalnu kompleksnu funkciju uvođenjem smjene:

$$z = e^{sT} \rightarrow s = \frac{1}{T}\ln z.$$

Na ovaj način se dobija Z-transformacija odabranog signala, odnosno:

$$F(z) = F^{*}(s = \frac{1}{T}\ln z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n}.$$

Dvije ekvivalentne definicije

Kao što je poznato odabrani signal se može dobiti inverznom Z-transformacijom koja je definisana na sljedeći način:

$$f(nT) = \frac{1}{2pj}\oint_{\Gamma} F(z)z^{n-1}dz.$$

Prethodni integral se može odrediti primjenom teoreme o reziduumu. Takođe, za široku klasu signala i sistema parovi Z-transformacija se mogu naći u formi tabela.

Tabela Z-transformacija

$f(n)$	$F(z)$
$\delta(n)$	1
$u(n)$	$\dfrac{z}{z-1}$
$\delta(n-m)$	z^{-m}
$nu(n)$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
$n^2u(n)$	$\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$a^n u(n)$	$\dfrac{z}{z-a}$
$e^{an}n$	$\dfrac{z}{z-e^a}$

$f(n)$	$F(z)$
$ne^{-an}u(n)$	$\dfrac{ze^{-a}}{(z-e^{-a})^2}$
$\left(1-e^{-an}\right)u(n)$	$\dfrac{(1-e^{a})z}{(z-1)(z-e^{-a})}$
$\sin(an)u(n)$	$\dfrac{z\sin(a)}{z^2-2z\cos(a)+1}$
$a^n\sin(an)u(n)$	$\dfrac{\mid a\sin(b)\mid z}{z^2-\mid 2a\cos(b)\mid z+a^2}$
$\cos(an)u(n)$	$\dfrac{z\left(z-\cos(a)\right)}{z^2-2z\cos(a)+1}$
$a^n\cos(an)u(n)$	$\dfrac{z\mid z-a\cos(b)\mid}{z^2-\mid 2a\cos(b)\mid z+a^2}$

Osobine Z-transformacije

Osobina	Ilustracija
Definicija	$f(n) \xleftrightarrow{z} F(z)$ $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n}$
Linearnost	$Af_1(n) + Bf_2(n) \xleftrightarrow{z} AF_1(z) + BF_2(z)$
Diferenc. unazad	$f(n) - f(n-1) \xleftrightarrow{z} (1 - z^{-1})F(z)$
Diferenc. unaprijed	$f(n+1) - f(n) \xleftrightarrow{z} (z-1)F(z) - zx(0)$
Vremensko skaliranje	$f\left(\frac{n}{k}\right) \xleftrightarrow{z} F\left(z^k\right)$
Integral	$\sum_{n=0}^{k} f(n) \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1-z^{-1}} F(z)$
Množenje sa vremenom	$nf(n) \xleftrightarrow{z} -z \frac{dF(z)}{dz}$

Osobina	Ilustracija
Pomjeranje u vremenu ulijevo	$f(n-k)h(n-k) \xleftrightarrow{z} z^{-k} F(z)$
Pomjeranje u vremenu udesno	$f(n+k)h(n+k)$ $\xleftrightarrow{z} z^k F(z) - \sum_{m=0}^{k-1} z^{k-m} x(m)$
Kompleksno skaliranje	$f(n)a^n \xleftrightarrow{z} F(z / a)$
Konvolucija	$f_1(n) * f_2(n) \xleftrightarrow{z} F_1(z) F_2(z)$
Teorema o početnoj vrijednosti	$\lim_{n \to 0} f(n) = \lim_{n \to \infty} F(z)$
Teorema o krajnjoj vrijednosti	$\lim_{n \to \infty} f(n) = \lim_{z \to 1} (z-1) F(z)$

Neke karakteristike Z-transformacije

- Z-transformacija $F(z)$ u sebi sadrži samo informaciju o vrijednostima signala $f(t)$ u trenucima odabiranja, odnosno informaciju o signalu $f(nT)$ ili $f^*(t)$

  Teorijski, informacija o kontinualnom signalu $f(t)$ se može očuvati u signalu $f^*(t)$, međutim tačnost te informacije zavisi od frekvencije odabiranja, odnosno od njene relativne vrijednosti u odnosu najveću učestanost u spektru signala $f(t)$. Međutim, signal $f(t)$ se uvijek može aproksimirati na osnovu odbiraka $f(nT)$.

- Z-transformacija odabranog signala nije jednoznačna

  Z transformacija $F(z)$ je jednoznačno određena odbircima $f(nT)$, kao što su i odbirci $f(nT)$ jednoznačno određeni inverznom Z transformacijom (smatramo da su svi signali jednaki 0 za $t<0$). Međutim, može se desiti da dva različita kontinualna signala u trenucima odabiranja imaju iste vrijednosti, što znači da $F(z)$ jednoznačno ne određuje kontinualni signal $f(t)$.

Primjer – Z-transformacija

Odrediti Z transformaciju diskretizovanog Hevisajdovog signala.

Diskretizovana Hevisajdova funkcija se može zapisati na sljedeći način:

$$f^*(t) = h(t)\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT) = \sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT).$$

Laplasova transformacija signala $f^*(t)$ je jednaka:

$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)e^{-nTs} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTs} = \frac{1-e^{-nTs}}{1-e^{-Ts}} = \frac{1}{1-e^{-Ts}}, \text{ za } \left|e^{-Ts}\right| < 1.$$

Smjenom $z = e^{sT}$ u prethodni izraz dobija se:

$$F^*\left(s = \frac{1}{T}\ln z\right) = F(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}.$$

Do istog izraza se dolazi i na sljedeći način:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1-z^{-n}}{1-z^{-1}} = \frac{1}{1-z^{-1}}, \text{ za } |z| > 1.$$

Primjer – rješavanje diferencne jednačine

Riješiti sljedeću linearnu diferencnu jednačinu:

$$y(n) = \frac{1}{3} y(n-1) + \frac{1}{3} u(n).$$

Prethodna diferencna jednačina se može transformisati u z domen:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z}{3z-1}.$$

Z-transformacija step funkcije je:

$$U(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}.$$

Izlazni signal u z domenu je jednak:

$$Y(z) = G(z)U(z) = \frac{z^2}{(3z-1)(z-1)},$$

ili u vremenskom:

$$y(n) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z^2}{(3z-1)(z-1)}\right\} = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}.$$

```
>> syms z
>> y= iztrans(z^2/(3*z-1)/(z-1))
>> y =
1/2 - (1/3)^n/6
```

Primjer – rješavanje diferencne jednačine

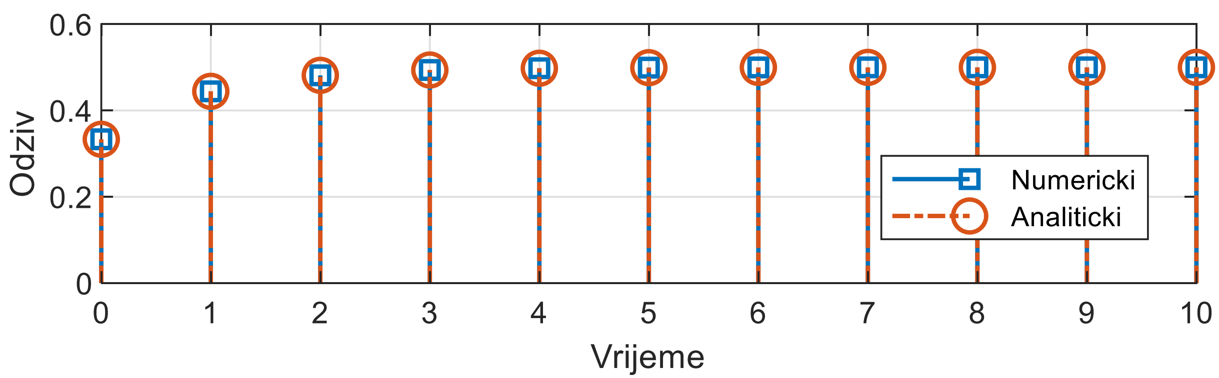
Na osnovu prethodnog izraza možemo odrediti odziv sistema u stacionarnom stanju:

$$y(\infty) = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{\infty} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Odziv sistema u stacionarnom stanju možemo odrediti i primjenom granične teoreme, koja u z domenu ima sljedeću formu:

$$Y(z) = \lim_{z \to 1}(z-1)Y(z) = \lim_{z \to 1}(z-1)\frac{z^2}{(3z-1)(z-1)} = \lim_{z \to 1}\frac{z^2}{3z-1} = \frac{1}{2}.$$

Napomenimo da smo na ovaj način dobili analitički izraz za odziv sistema, dok smo u primjeru na prvom predavanju istu diferencnu jednačinu rješavali numeričkim putem. Ukoliko bi skicirali odziv sistema $y(n)$, dobili bi smo iste vrijednosti odbiraka.



Primjer – rješavanje diferencne jednačine

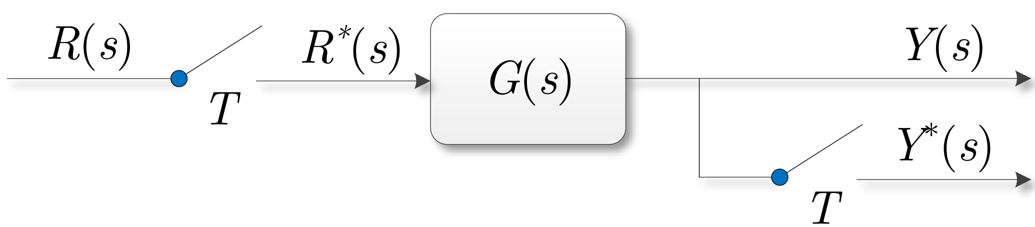
```
clear y
close all
N=11; % broj trenutaka vremena
y1(1)=1/3*1;
% ovo je zapravo y1(0), samo u mat indeksiramo od 1
y2(1)=1/2-1/6*(1/6)^0; % y2(0)
for n=2:N % pocinjemo od 2, jer se u jednacini pojavljuje y(n-1)
    y1(n)=1/3*y1(n-1)+1/3*1; % ulazni signal je step funkcija
    y2(n)=1/2-1/6*(1/3)^(n-1); % analiticko rjesenje
% smanjujemo n za 1, zbog matlab-ovg jer matlab pocinje indeksiranje od 1, a
n treba da pocne od 0
end
stem([0:N-1],y1,'-s','linewidth',1.2)
hold on
stem([0:N-1],y2,'-.','linewidth',1.2,'markersize',9);
grid
axis([0 10 0 0.6])
xlabel('Vrijeme')
ylabel('Odziv')
legend('Numericki','Analiticki')
% z=tf('z',-1) % moze i na ovaj nacin.. -1 kad pedioda odab. nije def.
% G=z/(3*z-1)
% step(G)
```

Funkcija prenosa hibridnog sistema

Funkcija prenosa kontinualnih sistema povezuje Laplasovu transformaciju izlaznog signala i Laplasovu transformaciju ulaznog signala. Sa druge strane, funkcija diskretnog prenosa sistema povezuje Z-transformaciju izlaznog signala u trenucima odabiranja i Z-transformaciju odbiraka ulaznog signala.

Posmatrajmo kontinualni sistem čija je funkcija prenosa $G(s)$. Na ulaz sistema dolazi odabrani signal $r^*(t)$, kao što je prikazano na slici ispod. Pretpostavićemo da je analogni signal $r(t)$ jednak nuli za $t<0$.

S obzirom na to da je sistem kontinualan, izlazni signal $y(t)$ će takođe biti kontinualan, bez obzira na to što je na njegov ulaz dovedena povorka diskretnih impulsa.



Funkcija prenosa hibridnog sistema

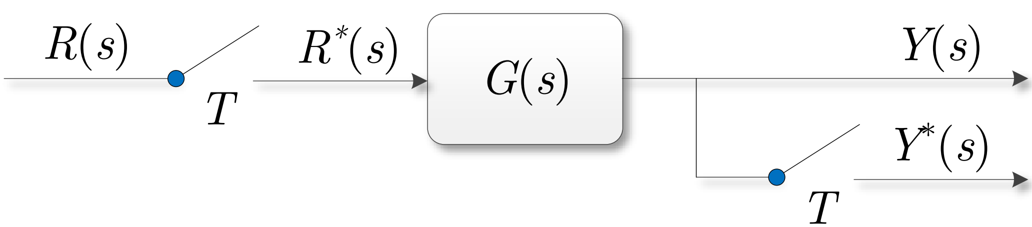
Odziv kontinualnog sistema je jednak:

$$Y(s) = G(s)R^*(s).$$

Analiza signala $Y(s)$ u prethodnom obliku je dosta komplikovana, jer je odabrani signal $R^*(s)$ periodičan. Da bi pojednostavili matematičku analizu, zamislimo da se na izlazu sistema nalazi odabirač, koji je sinhronizovan sa odabiračem ulaznog signala. Laplasova transformacija odbiraka izlaznog signala je jednaka:

$$Y^*(s) = \left(Y(s)\right)^* = \left(G(s)X^*(s)\right)^*,$$

gdje * operator označava da se radi o periodičnom produženju Laplasove trasformacije signala $Y(s)$.



Funkcija prenosa hibridnog sistema

Laplasova transformacija odbiraka izlaznog signala se može zapisati na sljedeći način:

$$Y^*(s) = \left(G(s)X^*(s)\right)^* = \frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{\infty} Y(s + jn\Omega_s) = \frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{\infty} G(s + jn\Omega_s)X^*(s + jn\Omega_s).$$

S obzirom da je signal $X^*(s)$ periodičan sa periodom Ω_s, važi sljedeće:

$$X^*(s) = X^*(s + jn\Omega s),$$

pa se prethodni izraz svodi na:

$$Y^*(s) = X^*(s)\frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{\infty} G(s + jn\Omega_s) = X^*(s)G^*(s).$$

Funkcija prenosa $G^*(s)$ predstavlja funkciju diskretnog prenosa. Smjenom $s=1/T\times\ln(z)$ funkcija diskretnog prenosa se preslikava u z-domen i dobija sljedeći oblik:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{R(z)}.$$

Funkcija prenosa hibridnog sistema

Dakle, funkcija diskretnog prenosa $G(z)$ predstavlja odnos Z-transformacija izlaznog i ulaznog signala. Iako je izlazni signal kontinualan, važno je imati u vidu da funkcija diskretnog prenosa u sebi sadrži samo informaciju o vrijednostima izlaznog signala u trenucima odabiranja.

Funkcija diskretnog prenosa se alternativno može definisati i na sljedeći način:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g(nT) z^{-k}.$$

Odnosno, funkcija diskretnog prenosa je ujedno i Z-transformacija odbiraka impulsnog odziva kontinualnog sistema:

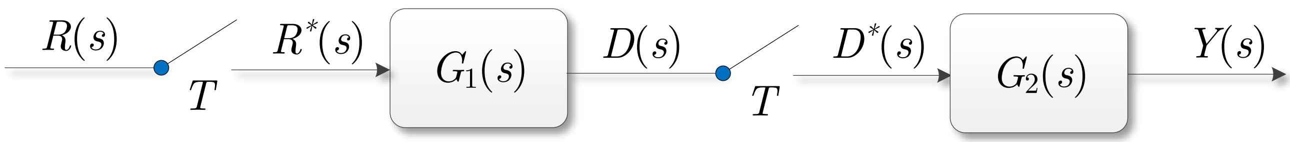
$$G(z) = \mathcal{Z}\left\{g(nT)\right\}.$$

Iako matematički nije ispravan, radi jednostavnosti u nastavaku ćemo često koristiti sljedeći zapis za funkciju diskretnog prenosa:

$$G(z) = \mathcal{Z}\left\{G(s)\right\}.$$

Kaskadna veza funkcija prenosa

Posmatrajmo sada rednu vezu dva kontinualna sistema, prikazanu na slici ispod.



Koristeći se prethodnim izvođenjem, možemo zapisati sljedeće:

$$D(s) = G_1(s)R^*(s) \rightarrow D^*(s) = G_1^*(s)R^*(s),$$

$$Y(s) = G_2(s)D^*(s) \rightarrow Y^*(s) = G_2^*(s)D^*(s).$$

Kombinujući dva prethodna izraza, dobija se:

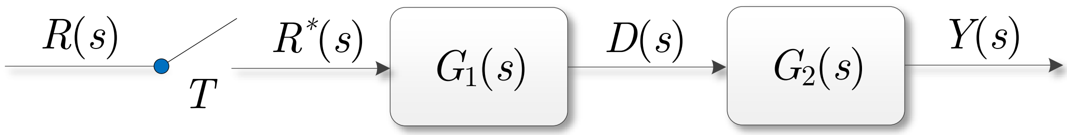
$$Y^*(s) = G_1^*(s)G_2^*(s)R^*(s),$$

ili u z-domenu:

$$Y(z) = G_1(z)G_2(z)R(z).$$

Kaskadna veza funkcija prenosa

Sada posmatrajmo rednu vezu dva kontinualna sistema koja nijesu razdvojena odabiračem.



$$D(s) = G_1(s)R^*(s)$$

$$Y(s) = G_2(s)D(s) \rightarrow Y(s) = G_1(s)G_2(s)R^*(s).$$

Nakon primjene * operatora na zadnju jednačinu dobija se:

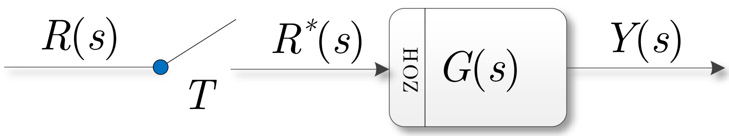
$$Y^*(s) = \left(G_1(s)G_2(s)R^*(s)\right)^* = \left(G_1(s)G_2(s)\right)^* R^*(s),$$

$$Y(z) = \mathcal{Z}\left(G_1(s)G_2(s)\right) R(z) = G_{12}(z)R(z).$$

Dakle, ekvivalentna funkcija prenosa se ne može zapisati kao proizvod funkcija prenosa $G_1(z)$ i $G_2(z)$, već je ona jednaka Z-transformaciji odbiraka impulsnog odziva čija je Laplasova transfomacija $G_1(s)\,G_2(s)$.

ZOH ekvivalent sistema

Odbici diskretnog signala nikad direktno ne dolaze na ulaz kontinualnog sistema, već se prvo pomoću kola zadrške pretvaraju u analogni signal. Radi jednostavnosti ZOH kolo se često ne skicira, već se podrazumijeva, osim ako je naglašeno da se na neki drugi način vrši rekonstrukcija analognog signala.



Izlazni signal se u ovom slučaju može zapisati na sljedeći način:

$$Y(s) = G_{zoh} G(s) R^*(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} G(s) R^*(s).$$

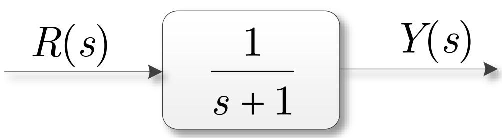
Nakon primjene * operatora, prethodna jednačina se svodi na:

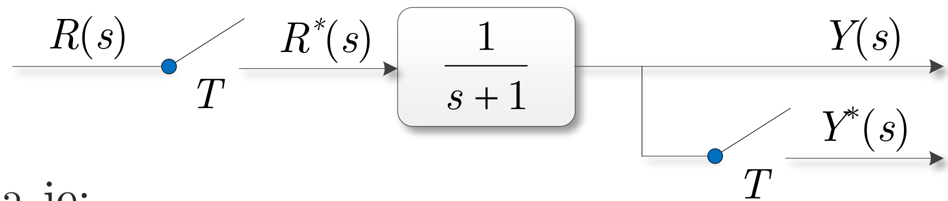
$$Y^*(s) = \left(\frac{1 - e^{-sT}}{s} G(s) \right)^* R^*(s) \rightarrow Y(z) = \underbrace{\left(1 - z^{-1}\right) \mathcal{Z}\left(\frac{G(s)}{s} \right)}_{ZOH \text{ ekvivalent sistema}} R(z).$$

Primjer – funkcija prenosa hibridnog sistema

U Simulinku simulirati sisteme prikazane na slici ispod. Odrediti funkciju diskretnog sistema. Perioda odabiranja je T=1s. Uporediti odzive kontinualnog i hibridnog sistema, ako je ulazni signal jednak $\sin(t)$. Za rekonstrukciju analognog signala se koristi ZOH kolo.

Napomena: Iako ZOH kolo nije skicirano, ono se podrazumijeva u svakoj tački blok dijagrama gdje se odabrani signal dovodi na ulaz kontinualnog sistema.





Funkcija diskretnog prenosa sistema je:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \mathcal{Z}\left\{G_{zoh}G(s)\right\} = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}.$$

Najprije treba odrediti impulsni odziv sistema $G(s)/s$, a zatim ga treba odbrati sa periodom T i odrediti njegovu Z-transformaciju. U tu svrhu se mogu koristiti tablice Z-transformacija. Na kraju, dobijenu funkciju prenosa treba pomnožiti sa 1-z^{1} (zbog ZOH kola), i na taj način ćemo dobiti ekvivalentnu funkciju diskretnog prenosa, odnosno ZOH ekvivalent sistema.

Primjer – funkcija prenosa hibridnog sistema

U ovom primjeru, ZOH ekvivalent ćemo odrediti pomoću ugrađene Matlab-ove funkcije `c2d`. Funkcija prenosa je jednaka:

$$G(z)=\frac{Y(z)}{R(z)}=(1-z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\}=\left(\frac{z-1}{z}\right)\frac{0.6321z}{z^2-1.368z+0.3679}=\frac{0.6321}{z-0.3679}.$$

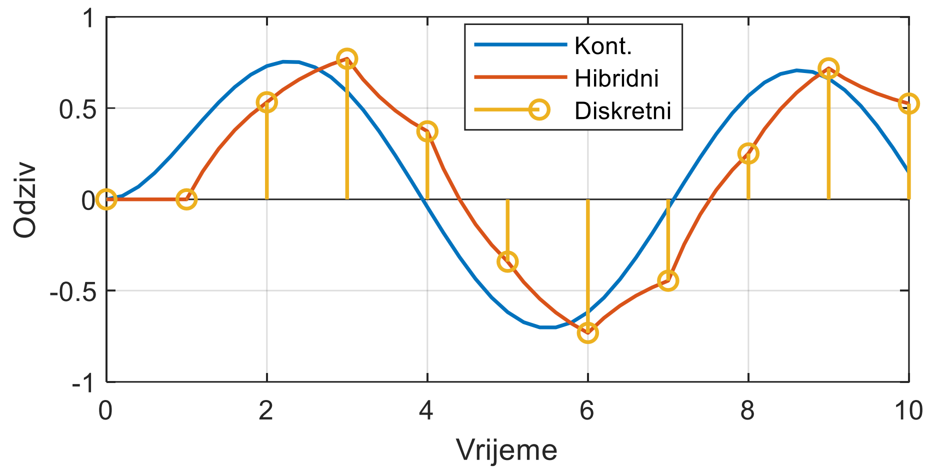
Funkcija *`Gd=c2d(G,T,'impulse')`* vraća Z-transformaciju odbiraka impulsnog odziva čija je Laplasova transformacija jednaka G, odabranih sa periodom T. Drugim riječima, ova funkcija kao izlaz daje funkciju diskretnog prenosa koju bi pročitali iz tablica. Pored opcije `'impulse'`, mogu se koristiti opcije `'ZOH'`, `'FOH'` kako bi direktno dobili ZOH ili FOH diskretni ekvivalent kontinualnog sistema.

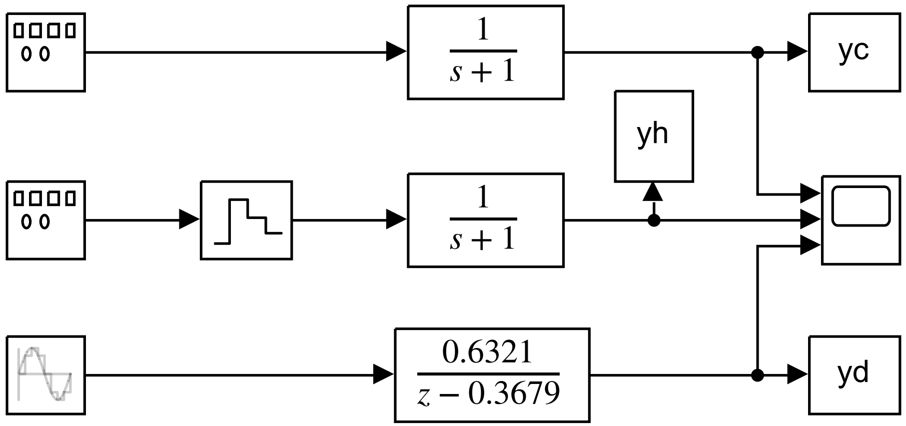
```
>> s=tf('s')
>> G=1/(s+1)
>> Gd=c2d(G/s,1,'impulse')
Gd =
        z
  ----------
  z - 0.3679
>> Gde=minreal((1-z^-1)*Gd,0.001)
Gde =
    0.6321
  ----------
  z - 0.3679
>> Gd=c2d(G,1,'zoh')
Gd =
    0.6321
  ----------
  z - 0.3679
```

Primjer – funkcija prenosa hibridnog sistema

Na slici je prikazan odziv kontin., hibridnog i diskretnog sistema. Odziv hibridnog sistema se u trenucima odabiranja poklapa sa odbircima diskretnog sistema. Međutim, odziv kontinualnog sistema dosta odstupa od odziva hibridnog sistema, iako je frekvencija odabiranja više od dva puta veća od maksimalne frekvencije ulaznog signala (1 rad/s).

Prilikom izlaganja teoreme o odabiranju matematički smo tretirali uticaj periode odabiranja na spektar signala. Međutim, potrebno je izvršiti i analizu efekata neidealne rekonstr. na odziv kontinualnog sistema i u skladu sa tim usvojiti vrijednost periode T, tako da odzivi kontinualnog i hibridnog sistema budu što sličniji.





Sistem sa povratnom spregom

Posmatrajmo sada sistem sa povratnom spregom, prikazan na slici ispod. Signal greške je jednak:

$$E(s) = R(s) - H(s)Y^*(s),$$

$$Y(s) = W(s)E^*(s).$$

Primjenom * operatora na prethodne jednačine se dobija:

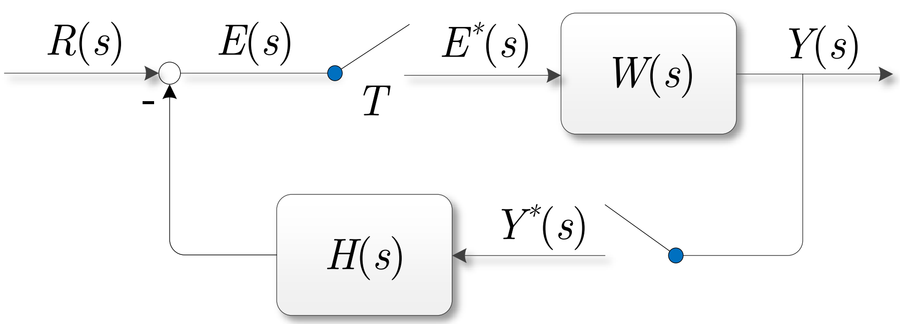
$$Y^*(s) = W^*(s)E^*(s),$$

$$E^*(s) = R^*(s) - H^*(s)W^*(s)E^*(s) \rightarrow E^*(s) = \frac{R^*(s)}{1 + H^*(s)W^*(s)},$$

$$Y^*(s) = W^*(s)E^*(s) = \frac{W^*(s)}{1 + H^*(s)W^*(s)} R^*(s).$$

U z-domenu možemo zapisati:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{W(z)}{1 + H(z)W(z)}.$$



Sistem sa povratnom spregom

Na sličan način se dolazi do ekvivalentne funkcije prenosa sistema sa povratnom spregom koji ima samo jedan odabirač:

$$E(s) = R(s) - H(s)Y(s) = R(s) - H(s)W(s)E^*(s),$$

$$Y(s) = W(s)E^*(s).$$

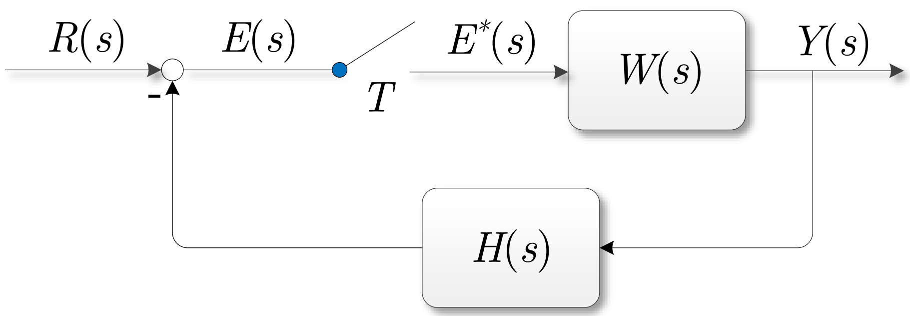
Primjenom * operatora na prvu jednačinu se dobija:

$$E^*(s) = R^*(s) - \left(H(s)W(s)\right)^* E^*(s) \to E^*(s) = \frac{R^*(s)}{1 + \left(H(s)W(s)\right)^*}.$$

$$Y^*(s) = W^*(s)E^*(s) = \frac{W^*(s)}{1 + \left(H(s)W(s)\right)^*} R^*(s).$$

U z-domenu možemo zapisati:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{W(z)}{1 + \mathcal{Z}\left(H(s)W(s)\right)}.$$



Blok dijagram bez ulaznog odabirača

Napomenimo da u nekim slučajevima nije moguće odrediti funkciju diskretnog prenosa. Takva dva primjera su prikazana na slici ispod.

U prvom slučaju izlazni signal je jednak:

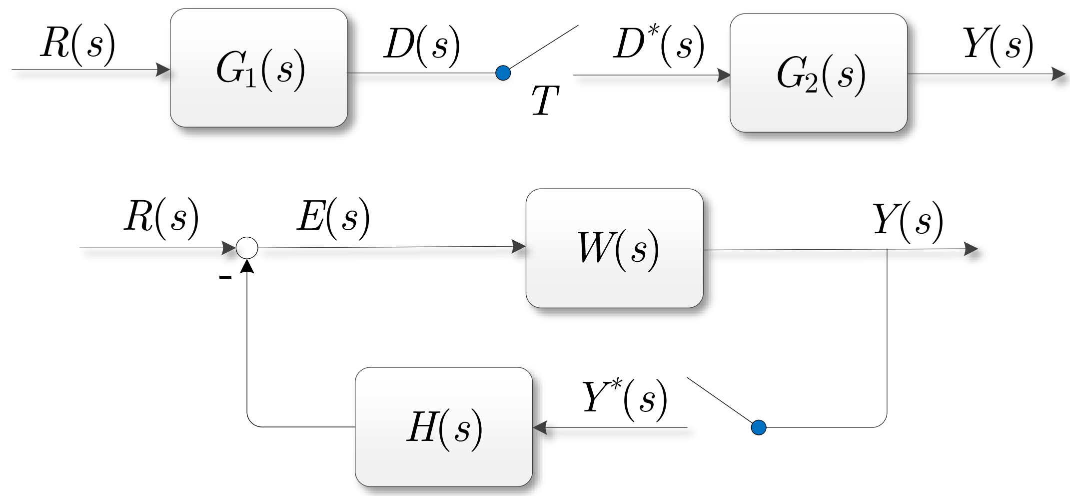
$$Y(s) = G_2(s)D^*(s) = G_2(s)\left(G_1R(s)\right)^*.$$

Laplasova trasformacija odabranog izlaznog signala je jednaka:

$$Y^*(s) = \left(G_2(s)D^*(s)\right)^* = G_2^*(s)\left(G_1R(s)\right)^*.$$

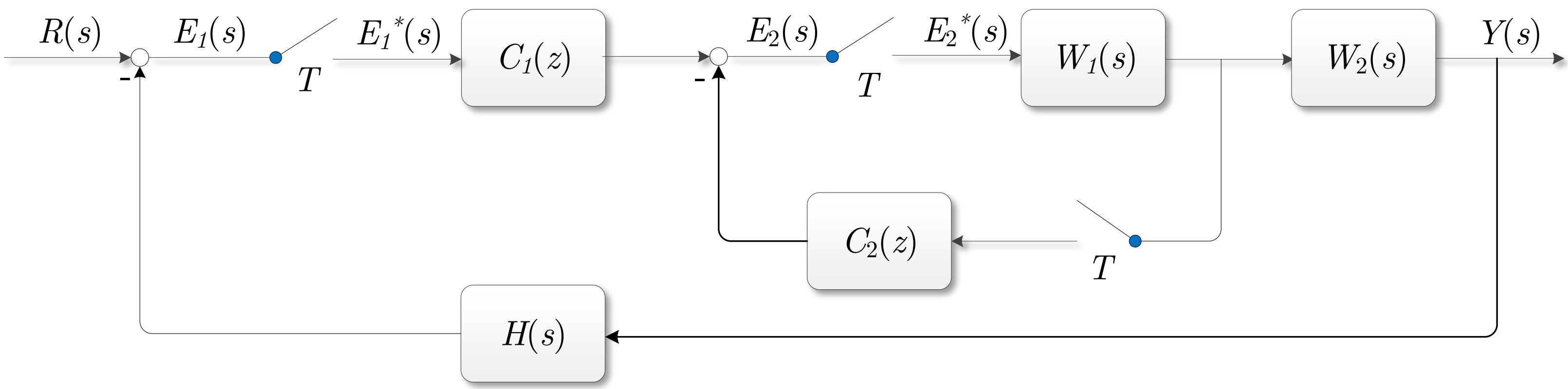
Iz prethodnog izraza nije moguće izdvojiti $R^*(s)$ i eksplicitno izraziti funkciju diskretnog prenosa.

Slično, ni kod sistema sa povratnom spregom koji je prikazan na drugoj slici ne može se odrediti funkcija diskretnog prenosa, jer referentni signal nije direktno odabran odabiračem.



Primjer – strukturni blok dijagram

Odrediti funkciju diskretnog prenosa SAU-a prikazanog na slici ispod.



Perioda odabiranja je T=1s. Funkcije prenosa blokova su:

$$C_1(z)=\frac{1+0.1z^{-1}}{1-0.1z^{-1}},\quad C_2(z)=\frac{1}{1+0.1z^{-1}},\quad W_1(s)=W_2(s)=\frac{1}{s+1},\quad H(s)=1.$$

U prvom koraku treba napisati jednačine za sve sabirače i izlazni signal:

$$E_1(s)=R(s)-H(s)Y(s)=R(s)-H(s)W_1(s)W_2(s)E_2^{\,*}(s),$$

$$E_2(s)=C_1^*(s)E_1^*(s)-C_2^*(s)\left(W_1(s)E_2^*(s)\right)^*$$

$$Y(s)=W_1(s)W_2(s)E^*(s).$$

Primjer – strukturni blok dijagram

Voditi računa o tome da su kontroleri $C_1(z)$ i $C_2(z)$ diskretni, odnosno da je njihova Laplasova transformacija $C_1^*(s)$ i $C_2^*(s)$. Takođe, signal $W_1(s)E_2^*(s)$ se prvo odabira, a zatim se njegovi odbirci dovode na ulaz sistema $C_2^*(s)$.

U drugom koraku treba proći * operatorom kroz prethodne jednačine:

$$E_1^*(s) = R^*(s) - \left(H(s)W_1(s)W_2(s)E_2^*(s)\right)^* = R^*(s) - HW_{12}^*(s)E_2^*(s),$$

$$E_2^*(s) = C_1^*(s)E_1^*(s) - C_2^*(s)W_1^*(s)E_2^*(s),$$

$$Y^*(s) = \left(W_1(s)W_2(s)\right)^* E_2^*(s).$$

$$\boxed{\left(G_1^*G_2^*\right)^* = G_1^*G_2^*}$$

U trećem koraku treba preći u z-domen i formirati sistem linearnih jednačina:

$$\begin{aligned} E_1(z) &= R(z) - HW_{12}(z)E_2(z),\\ E_2(z) &= C_1(z)E_1(z) - C_2(z)W_1(z)E_2(z) \rightarrow\\ Y(z) &= W_{12}(z)E_2(z). \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & HW_{12}(z) \\ -C_1(z) & 1 + C_2(z)W_1(z) \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} E_1(z) \\ E_2(z) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} R(z)$$

$$Y(z) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & W_{12}(z) \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} E_1(z) \\ E_2(z) \end{bmatrix}$$

Primjer – strukturni blok dijagram

Konačno, funkcija prenosa je jednaka:

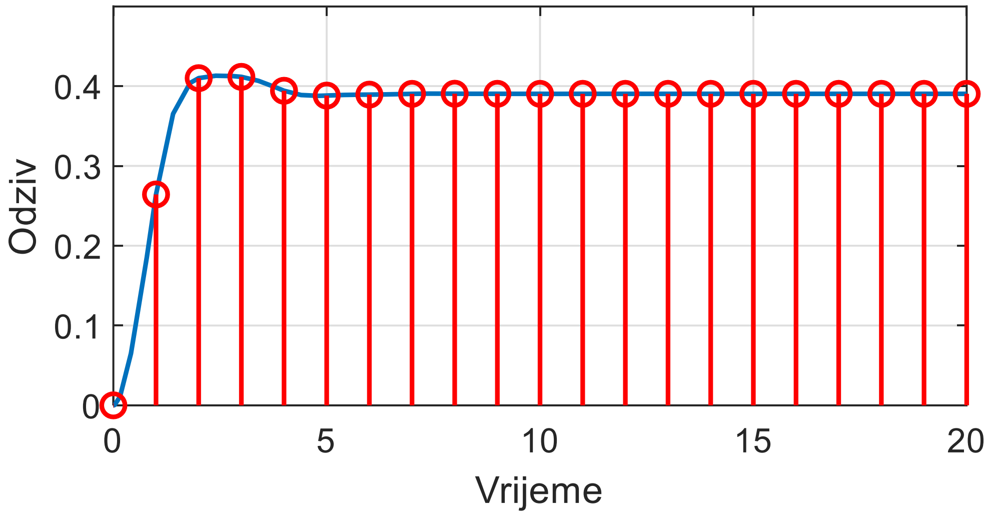
$$G(z) = CA^{-1}B = \frac{0.2642z^3 + 0.1882z^2 + 0.02971z + 0.001353}{z^4 + 0.1606z^3 + 0.01776z^2 + 0.06032z}$$

```
>> s=tf('s'); z=tf('z',1); % perioda odabiranja
>> C1=(1+0.1*z^-1)/(1-0.1*z^-1)
>> C2=1/(1+0.1*z^-1)
>> W1=1/(s+1)
>> W2=1/(s+1)
>> H=1;
>> HW12z=c2d(H*W1*W2,1,'zoh') % podrazumjevamo ZOH kolo zadrske..
>> W1z=c2d(W1,1) % zoh je inace default-na opcija, pa se ne mora navoditi
>> W2z=c2d(W2,1,'zoh') % moze se navesti i FOH, na primjer
>> W12z=c2d(W1*W2,1,'zoh')
>> A=[1 HW12z;-C1 1+C2*W1z]
>> B=[1;0]
>> C=[0 W12z]
>> G=minreal(C*inv(A)*B,0.001) %skracivanje istih polova i nula sa toleranc. 0.001
G =

      0.2642 z^3 + 0.1882 z^2 + 0.02971 z + 0.001353
  ------------------------------------------------------
  z^4 + 0.1606 z^3 + 0.01776 z^2 + 0.06032 z + 2.108e-18
```

Primjer – strukturni blok dijagram

Na slici ispod je prikazan odziv hibridnog sistema, koji je po svojoj prirodi kontinualan, kao i odziv ekvivalentnog diskretnog sistema. Kao što se može uočiti, vrijednosti odbiraka diskretnog sistema su jednake vrijednostima odziva hibridnog sistema u trenucima odabiranja. Upravo, svrha Z-transformacije je da se primjenom jednostavnog matematičkog aparata omogući analiza sistema u trenucima odabiranja. Z-transformacija, kao i Laplasova transformacija, posjeduje niz korisnih osobina koje omogućavaju analizu stacionarnog stanja, prelaznog procesa, stabilnosti, itd. Međutim, veoma je važno simulirati i odziv hibridnog sistema, jer se nekad mogu javiti takozvane „skrivene oscilacije“ odziva, koje se ne mogu uočiti posmatranjem odziva samo u trenucima odabiranja.



Primjer – strukturni blok dijagram

```
close all
plot(yc.time,yc.data,'linewidth',1.2)
hold
[yd t]=step(G,20);
stem(t,yd,'r','linewidth',1.2)
grid
xlabel('Vrijeme')
ylabel('Odziv')
set(gcf,'units','centimeters','position',[10 10 10 5])
```