4.6. Krivolinijski i površinski integral

(a) Orijentacija prostora $\mathbb{R}^n$.

Neka je $a = \{a_1, \ldots, a_n\}$ baza prostora $\mathbb{R}^n$. Ona generiše koordinatni sistem u $\mathbb{R}^n$. Naime, svaki element $x \in \mathbb{R}^n$ može se na jedinstven način predstaviti u obliku

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i a_i;$$

brojevi $x_1, \ldots, x_n$ nazivaju se koordinatama tačke x u odnosu na bazu a.

Neka je $a' = \{a'_1, \ldots, a'_n\}$ druga baza prostora $\mathbb{R}^n$. Označimo sa $\alpha_{1j}, \ldots, \alpha_{nj}$ koordinate vektora a'_j u odnosu na bazu a, tj. $a'_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} a_i$. Matrica $A_{\{a,a'\}} = [\alpha_{ij}]$ naziva se *matricom prelaza* sa baze a na bazu a'. Napomenimo da je uvek $\det A_{\{a,a'\}} \neq 0$.

Označimo sa $\mathcal{B}$ skup svih baza prostora $\mathbb{R}^n$. U skupu $\mathcal{B}$ definišimo binarnu relaciju $\sim$ na sledeći način:

$$(\forall a, a' \in \mathcal{B})\ (a \sim a' \iff \det A_{\{a,a'\}} > 0).$$

Lako se može pokazati da je $\sim$ relacija ekvivalencije. Postoje tačno dve klase ekvivalencije relacije $\sim$ koje se zovu *pozitivna* i *negativna orijentacija* prostora $\mathbb{R}^n$. Prostor $\mathbb{R}^n$ je *orijentisan* ako je izabrana jedna orijentacija, od dve moguće. *Pozitivna orijentacija* prostora $\mathbb{R}^n$ je ona orijentacija kojoj pripada standardna baza $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

I dalje ćemo koristiti oznaku $\sim$ za različite relacije ekvivalencije. Nadamo se da to neće stvarati poteškoće pri čitanju ove knjige.

(b) Orijentacija površi.

(1) Orijentacija površi parametrizacijom.

Neka je S glatka elementarna k-dimenziona površ u $\mathbb{R}^n$ i neka su

$$D \ni t \mapsto \phi(t) \in S \quad \text{i} \quad G \ni s \mapsto \psi(s) \in S$$

dve njene parametrizacije (D i G su oblasti u $\mathbb{R}^k$ homeomorfne otvorenom jediničnom intervalu I_k u $\mathbb{R}^k$).

Prelaz sa lokalnih koordinata $t = (t_1, \ldots, t_k)$ na lokalne koordinate $s = (s_1, \ldots, s_k)$ se realizuje jedinstvenim difeomorfizmom $s = \tau(t)$, i sa koordinata $(s_1, \ldots, s_k)$ na koordinate $(t_1, \ldots, t_k)$ njemu inverznim difeomorfizmom $t = \tau^{-1}(s)$. Ako je $\det \tau'(t) > 0$, $t \in D$, (jasno, tada je i $\det(\tau^{-1})'(s) > 0$, $s \in G$), kažemo da su parametrizacije ϕ i ψ saglasne, i pišemo $\phi \sim \psi$. Lako se proverava da je $\sim$ relacija ekvivalencije na klasi $\mathcal{K}$ svih parametrizacija površi S.

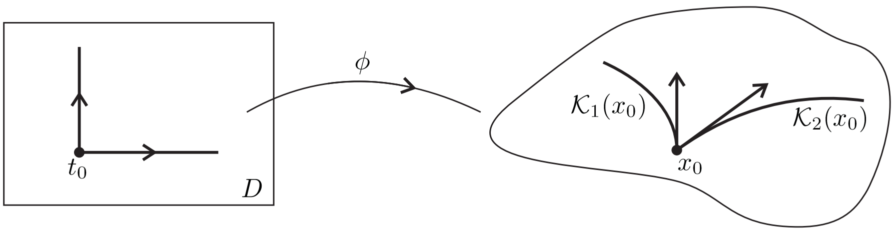
(4.6.1) Definicija. Klasa ekvivalencije u odnosu na relaciju $\sim$ naziva se *orijentišuća klasa* krivolinijskih koordinatnih sistema na površi S ili *orijentacija površi* S.

(4.6.2) Definicija. *Orijentisati* elementarnu površ S znači fiksirati jednu orijentišuću klasu krivolinijskih koordinatnih sistema na njoj, odnosno izabrati jednu njenu parametrizaciju.

(4.6.3) Primer. Skup $(0,1)$ je glatka kriva. Njene parametrizacije $t \mapsto \phi(t) = \sin t$ i $t \mapsto \psi(t) = \cos t$, $t \in (0, \pi/2)$, pripadaju suprotnim orijentacijama krive $(0,1)$.

(2) Neprekidno polje baza tangentnih prostora.

Neka je $\phi : D \mapsto U_S$ parametrizacija lokalne karte U_S glatke površi S. Dalje, neka je $t_0 = (t_1^0, \ldots, t_k^0) \in D$ i $x_0 = \phi(t_0)$. Krive
$\mathcal{K}_i(x_0) = \{\phi(t_1^0, \ldots, t_{i-1}^0, t_i, t_{i+1}^0, .., t_k^0) : (t_1^0, \ldots, t_{i-1}^0, t_i, t_{i+1}^0, \ldots, t_k^0) \in D\}$,
$i = 1, 2, \ldots, k$, nazivaju se *koordinatne krive* na karti U_S površi S.



Slika 4.6.1.

Ako je $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ koordinatno predstavljanje preslikavanja ϕ, vektori

$$\left(\frac{\partial \phi_1(t_0)}{\partial t_i}, \ldots, \frac{\partial \phi_n(t_0)}{\partial t_i}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

su vektori pravca tangenata koordinatnih krivih $\mathcal{K}_i$ i čine bazu tangentnog prostora TS_{x_0}. Koordinate $\frac{\partial \phi_j}{\partial t_i}$, $j = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, k$, su neprekidne u oblasti D, pa se kaže da parametrizacija na lokalnoj karti generiše *neprekidno polje baza (neprekidno polje baznih vektora)* tangentnih prostora TS_x, $x \in U_S$. Opštije, ako je u svakoj tački $x \in S$ definisana baza

$$a_1(x) = (a_1^1(x), \ldots, a_n^1(x)), \ \ldots, \ a_k(x) = (a_1^k(x), \ldots, a_n^k(x)),$$

tangentnog prostora TS_x, pri čemu su funkcije $a_i^j(x)$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, k$, neprekidne na S, kažemo da je time definisano neprekidno polje baza tangentnih prostora TS_x, $x \in S$.

Ako je S glatka elementarna površ, svaka njena parametrizacija definiše na celoj površi S neprekidno polje baznih vektora tangentnih prostora te površi.

(3) Orijentacija površi neprekidnim poljem baza tangentnih prostora (tangentna orijentacija).

Neka je S glatka elementarna površ. Označimo sa $\mathcal{B}_S$ skup svih neprekidnih polja baza tangentnih prostora površi S. U skupu $\mathcal{B}_S$ jedna relacija ekvivalencije, što se da lako proveriti, može se definisati sa:

dva neprekidna polja baza tangentnih prostora su u relaciji $\sim$ ako u svakoj tački $x \in S$ baze tangentnog prostora TS_x, koje pripadaju poljima baza, pripadaju istoj orijentišućoj klasi prostora TS_x.

Postoje tačno dve klase ekvivalencije relacije $\sim$. Na površi S je definisana *orijentacija* ako je izabrana jedna klasa ekvivalencije. Takva orijentacija površi S zove se *tangentna orijentacija.*

U odeljku (2) pokazali smo da svaka parametrizacija glatke elementarne površi S generiše na S neprekidno polje baza tangentnih prostora TS_x, $x \in S$. Može se lako dokazati da parametrizacije, koje pripadaju istoj orijetišućoj klasi krivolinijskih koordinatnih sistema, generišu polja baza tangentnih prostora koja pripadaju istoj klasi ekvivalencije relacije $\sim$, definisane u ovom odeljku.

Zbog toga se, po definiciji, smatra da parametrizacija površi S i bilo koje neprekidno polje baza tangentnih prostora TS_x, $x \in S$, definišu istu orijentaciju površi S (saglasni su) ako polje baza generisano parametrizacijom pripada istoj klasi ekvivalencije relacije $\sim$ kojoj pripada i neprekidno polje baza.

Kako je S povezan skup, njegova tangentna orijentacija je potpuno određena ako je u proizvoljnoj tački $x_0 \in S$ izabrana baza tangentnog prostora TS_{x_0}.

Razmotrimo sada slučaj površi koja ne mora biti elementarna.

(4.6.4) Definicija. Dve lokalne karte U_S i V_S površi S su *saglasne* ako je $U_S \cap V_S = \emptyset$ ili ako je $W_S = U_S \cap V_S \neq \emptyset$ i ako su $\phi : D \mapsto U_S$ i $\psi : G \mapsto V_S$ parametrizacije karata U_S i V_S, tada su njihove restrikcije na $\phi^{-1}(W_S)$ odnosno $\psi^{-1}(W_S)$ saglasne u smislu definicije date u odeljku (1).

(4.6.5) Definicija. Atlas $\mathcal{A}(S)$ naziva se *orijentišućim atlasom* površi S ako se sastoji od uzajamno saglasnih karata.

Površ S je *orijentabilna* ako postoji bar jedan njen orijentišući atlas. U protivnom je *neorijentabilna.*

Skup svih orijentišućih atlasa orijentabilne površi S možemo podeliti na tačno dve klase ekvivalencije, ako relaciju ekvivalencije, $\sim$, definišemo na sledeći način:

dva orijentišuća atlasa površi S su u relaciji $\sim$ ako je njihova unija orijentišući atlas površi S.

Dokaz prepuštamo čitaocu.

(4.6.6) Definicija. Klasa ekvivalencije relacije $\sim$ naziva se *orijentišućom klasom atlasa* površi S, ili *orijentacijom* površi S. Površ S se naziva *orijentisanom* površi ako je na njoj fiksirana orijentacija.

Može se lako pokazati da na povezanoj orijentisanoj površi postoje tačno dve orijentacije, koje nazivamo *uzajamno suprotnim* orijentacijama. Glatka površ je orijentišuća ako i samo ako na njoj postoji neprekidno polje baza njenih tangentnih prostora.

(4) Orijentacija krive.

Parametrizacijom krive određena su dva smera kretanja na njoj: jedan koji odgovara rašćenju parametra, i njemu suprotan. Dakle, orijentacija krive može se izvršiti i izborom smera njenog obilaska. Orijentacija krive parametrizacijom i orijentacija izabranim smerom obilaska krive su *saglasne* ako rašćenju parametra odgovara kretanje na krivoj.

(4.6.7) Primer. Neka je kriva $(0,1)$ orijentisana kretanjem od 0 ka 1. Parametrizacija $t \mapsto \sin t$, $t \in (0, \pi/2)$, je saglasna, a parametrizacija $t \mapsto \cos t$, $t \in (0, \pi/2)$ nije saglasna sa njenom orijentacijom.

(5) Transverzna orijentacija.

Površ dimenzije $n-1$ u prostoru $\mathbb{R}^n$ naziva se *hiperpovrš.* Orijentacija povezane hiperpovrši S može se zadati, pored dva opisana načina, i na još jedan način.

Neka je n_{x_0} jedinični vektor normale, povezane glatke hiperpovrši $S \subset \mathbb{R}^n$, u tački $x_0 \in S$. Svaka orijentisana baza $a = \{a_1, \ldots, a_n\}$ prostora $\mathbb{R}^n$, se može smatrati orijentišućom bazom $a_{x_0} = a$ prostora $T_{x_0}\mathbb{R}^n$. Neka je $\{b_1, \ldots, b_{n-1}\}$ baza prostora TS_{x_0} takva da baza $\{n_{x_0}, b_1, \ldots, b_{n-1}\}$ pripada onoj orijentišućoj klasi prostora $T_{x_0}\mathbb{R}^n$ kojoj pripada i baza a_{x_0}. Sve baze prostora TS_{x_0} sa tim svojstvom pripadaju istoj orijentišućoj klasi prostora TS_{x_0}. Dakle, fiksirajući vektor n_{x_0} mi fiksiramo jednu orijentišuću klasu tangentnog prostora TS_{x_0}, a time i orijentaciju površi S.

(4.6.8) Definicija. Ako je u svakoj tački $x \in S$ definisan vektor $(a_1(x), \ldots, a_n(x))$ kažemo da je na površi S definisano *vektorsko polje.* Ako su $a_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, neprekidne funkcije na S, polje nazivamo *neprekidnim vektorskim poljem.*

Postoji duboka veza između vektorskog polja jediničnih vektora normala površi i njene orijentabilnosti. Naime, važi sledeći stav.

(4.6.9) Stav. Na glatkoj hiperpovrši $S \subset \mathbb{R}^n$ postoji neprekidno polje baza tangentnih prostora te površi ako i samo ako postoji neprekidno polje jediničnih vektora normala te površi.

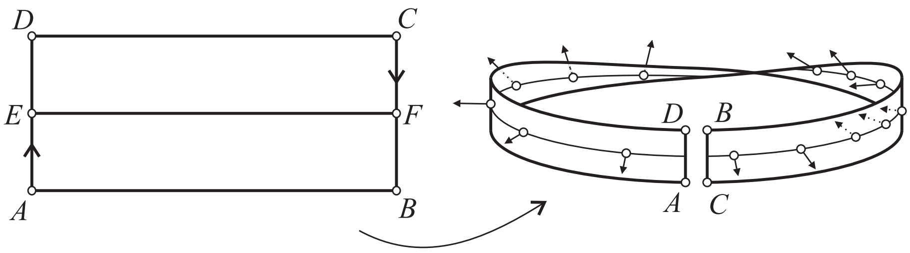
Dakle, povezana glatka hiperpovrš S na kojoj postoji neprekidno polje jediničnih vektora normala te površi je orijentabilna. Takva površ naziva se *dvostrana površ.* U protivnom, površ je *neorijentabilna* ili *jednostrana.*

Orijentisanje dvostrane glatke hiperpovrši vrši se izborom jediničnog vektora normale te površi u bilo kojoj njenoj tački (takva orijentacija naziva se *transverzna orijentacija*).

(4.6.10) Primer. Mebijusova traka S je glatka površ u $\mathbb{R}^3$ čiji se model može napraviti na sledeći način:

Naspramne stranice AD i BC pravougaonika $ABCD$ zalepe se tako da se tačka A poklopi sa tačkom C, a tačka D sa tačkom B. Tačka E, sredina duži AD, poklapi se sa tačkom F, sredinom duži BC.

Neka je M proizvoljna tačka krive EF na S i n_M jedinični vektor normale površi S u tački M. Ako se taj vektor neprekidno pomera duž krive EF, ostajući u svakoj tački vektor odgovarajuće normale površi S, onda se on posle "obilaska" krive EF vraća u tačku M, upravan na S u tački M, ali ima suprotan smer u odnosu na polazni vektor n_M. Time se, grubo govoreći, objašnjava činjenica da na Mebijusovoj traci ne postoji neprekidno polje jediničnih vektora normala, odnosno da je Mebijusova traka jednostrana površ.



Slika 4.6.2.

Nadalje razmatramo samo orijentabilne (dvostrane) površi!

Veza između orijentacije povezane glatke hiperpovrši S, definisane poljem jediničnih vektora normala, i orijentacije, definisane parametrizacijom, uspostavlja se na sledeći način: u tangentnom prostoru TS_{x_0}, u bilo kojoj tački $x_0 \in S$, konstruiše se baza $b_1, \ldots, b_{n-1}$, tog prostora generisana parametrizacijom. Ako $\{n_{x_0}, b_1, \ldots, b_{n-1}\}$ pripada pozitivno orijentišućoj klasi $T_{x_0}\mathbb{R}^n$, orijentacije definisane parametrizacijom i poljem jediničnih vektora normala su *saglasne*; u protivnom, te dve orijentacije su *suprotne.*

(4.6.11) Primer. Neka je glatka dvodimenziona povš S definisana sa $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$.

Jedinični vektor n_M normale površi S u tački $M(x,y,f(x,y))$ ima koordinate

$$n_M = \pm\big((\tfrac{\partial f(x,y)}{\partial x})^2 + (\tfrac{\partial f(x,y)}{\partial y})^2 + 1\big)^{-1/2}\big(\tfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \tfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}, -1\big)$$

koje su neprekidne funkcije lokalnih koordinata tačke M. Stoga, S je dvostrana površ.

Ako je γ ugao između vektora n_M i vektora $(0,0,1)$, onda je

$$\cos\gamma = \pm\big(1 + (\tfrac{\partial f(x,y)}{\partial x})^2 + (\tfrac{\partial f(x,y)}{\partial y})^2\big)^{-1/2}.$$

Ugao γ je oštar ugao ako je pred korenom uzet znak $-$, pa u tom slučaju kažemo da smo izabrali *gornju stranu* površi S; ugao γ je tup ako je pred korenom uzet znak $+$; u tom slučaju smo izabrali *donju stranu* površi S.

Izbor gornje strane površi $S: z = f(x,y)$ je orijentacija (transverzna) površi S saglasna sa orijentacijom određenom parametrizacijom površi S

(4.6.12) Primer. Parametrizacija

$$D \ni (u_1,u_2) \mapsto \phi(u_1,u_2) = (\phi_1(u_1,u_2), \phi_2(u_1,u_2), \phi_3(u_1,u_2)) \in S,$$

glatke površi S, i jedinični vektor normale

$$n_M = (A^2 + B^2 + C^2)^{-1/2}(A,B,C)$$

u proizvoljnoj tački $M \in S$, gde je

$$A = \frac{D(\phi_2,\phi_3)}{D(u_1,u_2)}, \quad B = \frac{D(\phi_3,\phi_1)}{D(u_1,u_2)}, \quad C = \frac{D(\phi_1,\phi_2)}{D(u_1,u_2)},$$

generišu na S istu orijentaciju.

Zaista, neka je

$$G \ni (v_1,v_2) \mapsto \psi(v_1,v_2) = (\psi_1(v_1,v_2), \psi_2(v_1,v_2), \psi_3(v_1,v_2)) \in S$$

druga proizvoljna parametrizacija površi S i neka je

$$n'_M = (A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)^{-1/2}(A_1,B_1,C_1)$$

jedinični vektor normale površi S u istoj tački M određen njome. Treba dokazati da ako su parametrizacije ϕ i ψ saglasne onda su vektori n_M i n'_M istog smera, a ako nisu saglasne da su onda ti vektori suprotnog smera.

Neka se funkcijom α realizuje prelaz sa koordinata (v_1,v_2) na koordinate (u_1,u_2). Tada je

$$\psi_j(v_1,v_2) = \phi_j(\alpha_1(v_1,v_2), \alpha_2(v_1,v_2)),\ j = 1,2,3.$$

Diferenciranjem nalazimo

$$\frac{\partial\psi_j(v_1,v_2)}{\partial v_i} = \frac{\partial\phi_j(\alpha(v_1,v_2))}{\partial u_1}\frac{\partial\alpha_1(v_1,v_2)}{\partial v_i} + \frac{\partial\phi_j(\alpha(v_1,v_2))}{\partial u_2}\frac{\partial\alpha_2(v_1,v_2)}{\partial v_i},$$

$j = 1,2,3$, $i = 1,2$, iz čega sledi da je

$$\frac{A_1}{A} = \frac{B_1}{B} = \frac{C_1}{C} = \det\alpha'.$$

Dakle, ako su ϕ i ψ saglasne parametrizacije, tj. ako je $\det \alpha' > 0$, vektori n_M i n'_M su istog smera, a ako je $\det \alpha' < 0$, ti vektori su suprotnog smera.

(c) Površ s krajem

(1) Površ (mnogostrukost) s krajem.

Neka je $H^k = \{x \in \mathbb{R}^k : x_1 \leq 0\}$ i $\partial H^k = \{x \in \mathbb{R}^k : x_1 = 0\}$. Skup H^k se obično naziva *poluprostor*. Podsetimo se da je ∂H^k hiperravan u $\mathbb{R}^k$.

(4.6.13) Definicija. Skup $S \subset \mathbb{R}^n$ naziva se *površ (mnogostrukost) dimenzije k s krajem* ako svaka tačka $x \in S$ ima okolinu $U_S(x)$ u S homeomorfnu sa $\mathbb{R}^k$ ili H^k.

Ako je $\phi : U_S(x) \mapsto H^k$ homeomorfizam, tada se tačke skupa $\phi^{-1}(\partial H^k)$ nazivaju *tačkama kraja površi S*. Skup svih tačaka kraja površi S naziva se *kraj površi S* i označava sa ∂S. Napomenimo da se sa ∂ označava i granica skupa.

(4.6.14) Primeri. (1) Poluprostor $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}$ je površ s krajem u $\mathbb{R}^n$ i njen kraj je $\partial \mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$. Skup

$$\operatorname{int} \mathbb{R}^n_+ = \{x \in R^n_+ : \quad x_n > 0\}$$

je mnogostrukost bez kraja.

(2) Polukružnica $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = \sqrt{1 - x_1^2},\, x_1 \in [-1, 1]\}$ je jednodimenziona mnogostrukost s krajem. Njen kraj je skup

$$\partial S = \{(-1, 0), (1, 0)\}.$$

(3) Polusfera $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2},\, x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ je dvodimenziona mnogostrukost s krajem u $\mathbb{R}^3$. Njen kraj $\partial S = \{(x_1, x_2, 0) : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ je kriva bez kraja.

Mnogostrukost $S \subset \mathbb{R}^n$ s krajem dimenzije k, $1 \leq k \leq n$, je *klase* $C^{(m)}$, $m \geq 1$, (*glatka mnogostrukost* ako je $m = 1$) ako postoji atlas $\mathcal{A}(S) = \{U_S(x)\}$ površi S takav da odgovarajuće lokalne parametrizacije $\phi_x : \mathbb{R}^k \mapsto U_S(x)$ ili $\psi_x : H^k \mapsto U_S(x)$ su preslikavanja klase $C^{(m)}$ ranga k u svakoj tački domena R^k, odnosno H^k.

Ako tačku proglasimo mnogostrukošću dimenzije nula proizvoljnog stepena glatkosti, onda krajevi svih mnogostrukosti, navedenih u prethodnim primerima, su takođe mnogostrukosti. To važi u opštem slučaju.

(4.6.15) Stav. Neka je $S \subset \mathbb{R}^n$ k–dimenziona mnogostrukost klase $C^{(m)}$ s krajem ∂S. Tada je ∂S $(k-1)$–dimenziona mnogostrukost klase $C^{(m)}$ bez kraja.

Ako je $\mathcal{A}(S) = \cup_i\{\phi_i(\mathbb{R}^k)\} \cup \cup_j\{\psi_j(H^k)\}$ atlas površi S s krajem ∂S, tada je $\mathcal{A}(\partial S) = \cup_j\{\psi_j(\partial H^k)\}$ atlas kraja ∂S, iste klase kao i atlas $\mathcal{A}(S)$.

(2) Deo po deo glatka mnogostrukost.

(4.6.16) Definicija. Tačka je nula dimenziona mnogostrukost klase $C^{(m)}$ za svako $m \in \mathbb{N}$. *Jednodimenziona deo po deo glatka mnogostrukost* u $\mathbb{R}^n$ je kriva S u $\mathbb{R}^n$ koja sadrži najviše prebrojiv skup tačaka S' takav da se skup $S \setminus S'$ sastoji od najviše prebrojivo mnogo glatkih krivih. Glatka mnogostrukost $S \subset \mathbb{R}^n$ dimenzije k se naziva *deo po deo glatka mnogostrukost* ako postoji najviše prebrojiv skup mnogostrukosti $S_i \subset S$ dimenzije manje ili jednake $k-1$, takvih da se skup $S \setminus \cup_i S_i$ sastoji od najviše prebrojivo mnogo k–dimenzionih glatkih mnogostrukosti s krajem ili bez kraja.

Dakle, kriva S u prostoru $\mathbb{R}^3$ je deo po deo glatka ako se iz nje može izbaciti najviše prebrojivo mnogo tačaka na takav način da je ostatak krive najviše prebrojiva unija glatkih krivih

Površ S u prostoru $\mathbb{R}^3$ je deo po deo glatka ako se iz nje može odstraniti najviše prebrojivo mnogo tačaka ili krivih tako da je ostatak najviše prebrojiva unija glatkih površi (dimenzije 2) s krajem ili bez kraja.

(3) Orijentacija glatke površi s krajem.

(4.6.17) Stav. Kraj ∂S glatke orijentabilne površi S je glatka orijentabilna površ.

Dokaz. Prema prethodnom stavu ∂S je površ. Ostaje da se dokaže orijentabilnost kraja ∂S. Zato je dovoljno proveriti da ako je $s = \psi(t)$ difeomorfizam okoline $U_{H^k}(t_0)$ u H^k tačke $t_0 \in \partial H^k$ na okolinu $V_{H^k}(s_0)$ tačke $s_0 = \psi(t_0) \in \partial H^k$ s pozitivnim jakobijanom, tada i preslikavanje $\psi|_{\partial U_{H^k}(t_0)}$, okoline $U_{\partial H^k}(t_0) = \partial U_{H^k}(t_0)$ u ∂H^k tačke t_0, na okolinu $V_{\partial H^k}(s_0) = \partial V_{H^k}(s_0)$ u ∂H^k tačke s_0, ima pozitivan jakobijan.

Primetimo da u proizvoljnoj tački $t = (0, t_2, \ldots, t_k) \in \partial H^k$, u kojoj je preslikavanje ψ definisano, jakobijan preslikavanja $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_k)$ ima oblik

$$J(t) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial t_1} & 0 & \ldots & 0 \\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial t_1} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial t_2} & \ldots & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial t_k} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \dfrac{\partial\psi_k}{\partial t_1} & \dfrac{\partial\psi_k}{\partial t_2} & \ldots & \dfrac{\partial\psi_k}{\partial t_k} \end{vmatrix}(t) = \frac{\partial\psi_1(t)}{\partial t_1} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\psi_2}{\partial t_2} & \ldots & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial t_k} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \dfrac{\partial\psi_k}{\partial t_2} & \ldots & \dfrac{\partial\psi_k}{\partial t_k} \end{vmatrix}(t)$$

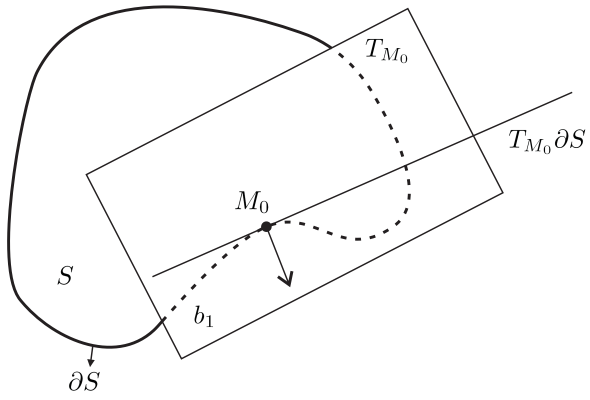
jer ako je $t_1 = 0$, tada je $s_1 = \psi_1(0, t_2, \ldots, t_k) \equiv 0$ (granične tačke pri difeomorfnom preslikavanju prelaze u granične tačke). Primetimo da, ako je $t_1 < 0$, tada je $s_1 = \psi_1(t_1, \ldots, t_k) < 0$. Stoga je $\frac{\partial \psi_1}{\partial t_1}(0, t_2, \ldots, t_k) \geq 0$. Prema pretpostavci, $J(t) > 0$, pa je i jakobijan preslikavanja $\psi\big|_{\partial U_{H^k}}(t_0) = \psi(0, t_2, \ldots, t_k)$ pozitivan. $\square$

(4.6.18) Definicija. Ako je $\mathcal{A}(S) = \{\phi_i(\mathbb{R}^k)\} \cup \{\psi_j(H^k)\}$ orijentišući atlas površi S, tada je $\mathcal{A}(\partial S) = \{\psi_j(\partial H^k)\}$ *orijentišući atlas* površi ∂S. Njime određena orijentacija površi ∂S saglasna je sa orijentacijom površi S određenom orijentišućim atlasom $\mathcal{A}(S)$.

Saglasnost orijentacije kraja površi sa orijentacijom površi uspostavlja se na sledeći način:

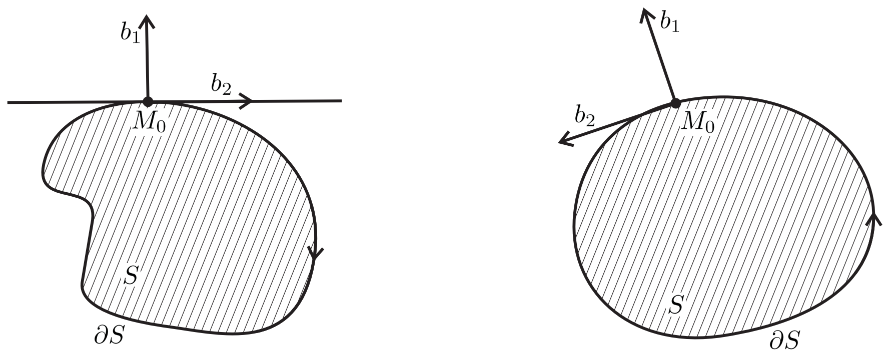
Neka je glatka površ S s krajem ∂S orijentisana neprekidnim poljem baza tangentnih prostora te površi. Dalje, neka je $x_0 \in \partial S$, TS_{x_0} tangentni prostor površi S u tački x_0 i $T\partial S_{x_0}$ tangentni prostor površi ∂S u tački x_0. Tada je $T\partial S_{x_0} \subset TS_{x_0}$. Neka je $b_{x_0} = \{b_1, \ldots, b_k\}$ orijentišuća ortogonalna baza prostora TS_{x_0} takva da njen prvi vektor b_1 ima pravac normale površi ∂S i usmeren je na stranu koja je spoljašnja u odnosu na ortogonalnu projekciju malog dela površi S oko tačke x_0 na prostor TS_{x_0}. Tada $\{b_2, \ldots, b_k\}$ generiše orijentaciju prostora $T\partial S_{x_0}$, odnosno površi ∂S, saglasnu sa orijentacijom površi S.

(4.6.19) Primer. Neka je S orijentisana površ u R^3 sa krajem ∂S, pri čemu se njena orijentacija definiše neprekidnim poljem baza tangentnih ravni i neka $M_0 \in \partial S$. Neka je $\{b_1, b_2\}$ ona baza tangentne ravni $T_{M_0}S$ koja pripada pomenutom polju, pri čemu je vektor b_1 ortogonalan na tangentu $T_{M_0}\partial S$ i usmeren na stranu koja je spoljašnja u odnosu na projekciju na ravan $T_{M_0}S$ malog dela površi S oko tačke M_0. Ne umanjujući opštost , možemo smatrati da vektor b_2 "leži" na tangenti $T_{M_0}\partial S$. Tada upravo taj vektor definiše, kada tačka M_0 prolazi krivom ∂S, neprekidno polje baznih vektora tangenti krive ∂S koje na toj krivoj generišu orijentaciju, saglasnu sa orijentacijom površi S.



Slika 4.6.3.

Na slikama (videti sliku 39 u Lažetić) ilustrovan je postupak usaglašavanja orijentacija ravne površi S i njenog kraja ∂S (tj. površi koja pripada nekoj ravni α u R^3). Primetimo da je u ovom slučaju $T_xS = \alpha$ za svaku tačku $x \in S$.



Slika 4.6.4.

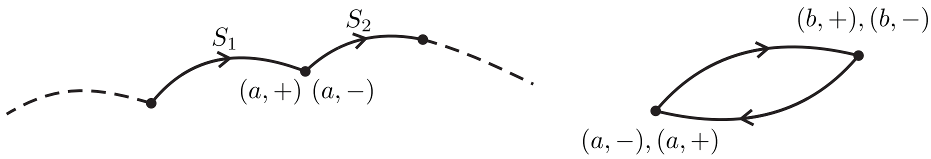
(4) Orijentacija deo po deo glatke površi.

Tačka se orijentiše tako što joj se dodeli + ili −.

Ako je kriva S s krajevima u tačkama a i b, onda se tački a dodeljuje −, tački b +, i smatra se da je kraj $\partial S = \{a, b\}$ orijentisan saglasno orijentaciji krive S.

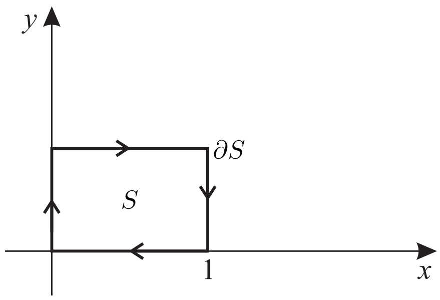
Neka je S deo po deo glatka kriva i neka su S_1 i S_2 dve orijentisane glatke krive koje su deo krive S i čiji je presek $\{a\}$ ili $\{a, b\}$.

Tada se na svakoj tački preseka javljaju dve orijentacije koje su saglasne sa orijentacijama krivih S_1 i S_2 respektivno. Ako su te dve orijentacije suprotne, onda se kaže da su orijentacije krivih S_1 i S_2 *uzajamno saglasne*.



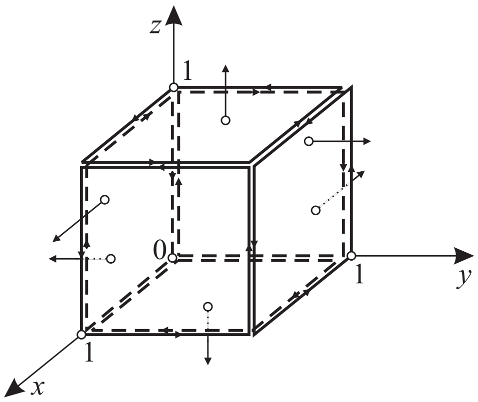
Slika 4.6.5.

Deo po deo glatka kriva naziva se *orijentabilnom* ako se sastoji od konačno mnogo glatkih krivih takvih da svake dve od tih krivih, sa nepraznim presekom, imaju uzajamno saglasne orijentacije.



Slika 4.6.6.

Neka je $S = \cup S_i$ deo po deo glatka dvodimenziona površ. Ako je $l \subset \partial S_i \cap \partial S_j$, tada se na krivoj l javljaju dve orijentacije saglasne sa orijentacijama površi S_i i S_j. Ako su te dve orijentacije suprotne, i to važi za svaku krivu $l \subset \partial S_i \cap \partial S_j$, orijentacije površi S_i i S_j nazivaju se *uzajamno saglasnim* orijentacijama.



Slika 4.6.7.

Deo po deo glatka dvodimenziona površ S se naziva *orijentabilnom* ako se ostatak te površi, posle odstranjivanja konačnog broja deo po deo glatkih krivih ili tačaka, sastoji od glatkih orijentabilnih površi S_i na kojima postoje uzajamno saglasne orijentacije. Nastavljajući postupak, definiše se orijentacija deo po deo glatke površi bilo koje dimenzije k.

(d) Površina površi u $\mathbb{R}^n$.

Neka su $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$. Označimo sa $h_j = x_{j+1} - x'_{j+1}$, $j = 1, \dots, n-1$, gde je x'_{j+1} projekcija vektora x_{j+1} na potprostor $\mathcal{L}(x_1, \dots, x_j)$, skup svih linearnih kombinacija vektora $x_1, \dots, x_j$. Poznato je da se zapremina paralelopipeda nad vektorima $x_1, \dots, x_k$, $1 \le k \le n$, definiše rekurentno sa $V_k = V_{k-1}||h_{k-1}||$, $k = 2, \dots, n$, gde je $V_1 = ||x_1||$.

Odredimo jedan drugi oblik zavisnosti veličine V_k od $x_1, \dots, x_k$.

Prema definiciji je $V_1^2 = (x_1, x_1)$. Kako je $h_1 = x_2 - \alpha_1 x_1$, iz uslova ortogonalnosti, nalazimo $0 = (h_1, x_1) = (x_2, x_1) - \alpha_1(x_1, x_1)$, iz čega sledi da je $||h_1||^2 = (x_2, x_2) - \dfrac{(x_2, x_1)^2}{(x_1, x_1)}$, pa je

$$V_2^2 = ||x_1||^2||h_1||^2 = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) \end{vmatrix}.$$

Na ovaj način može se zaključiti da je

$$V_k^2 = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & \cdots & (x_1, x_k) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ (x_k, x_1) & \cdots & (x_k, x_k) \end{vmatrix}.$$

Poslednju determinantu ćemo označiti sa $\Gamma(x_1, \dots, x_k)$, pa je onda $V_k = \sqrt{\Gamma(x_1, \dots, x_k)}$.

Neka je $\phi : D \mapsto S$ parametrizacija elementarne k–dimenzione površi $S \subset \mathbb{R}^n$ klase $C^{(1)}(\overline{D}, \mathbb{R}^n)$ i $t_0 = (t_1^0, \dots, t_k^0) \in D$. Izaberimo dovoljno male pozitivne brojeve $h_1, \dots, h_k$ takve da paralelopiped I konstruisan nad vektorima $t_0 + h_1 e_1, \dots, t_0 + h_k e_k$, pripada oblasti D. Njegova slika $I_S = \phi(I)$ naziva se *krivolinijski paralelopiped* na površi S. Neka je $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ koordinatno predstavljanje preslikavanja ϕ. Kako je

$$\begin{aligned}\phi(t_1^0, .., t_{i-1}^0, t_i^0 + h_i, t_{i+1}^0, .., t_k^0) - \phi(t_1^0, .., t_k^0) &= \left[\frac{\partial \phi_1(t_0)}{\partial t_i}, .., \frac{\partial \phi_n(t_0)}{\partial t_i}\right] h_i \\ &\quad + o(h_i), \quad i = 1, \dots, k,\end{aligned}$$

to se krivolinijski paralelopiped I_S, za male vrednosti h_i, malo razlikuje od paralelopipeda generisanog vektorima

$$\left[\frac{\partial \phi_1(t_0)}{\partial t_i}, \dots, \frac{\partial \phi_n(t_0)}{\partial t_i}\right] h_i \in T_{\phi(t_0)} S, \quad i = 1, \dots, k,$$

pa je njegova zapremina ΔV približno jednaka

$$\Delta V^2 \approx \Gamma\Big((\frac{\partial\phi_1(t_0)}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial\phi_n(t_0)}{\partial t_1}), \dots, ((\frac{\partial\phi_1(t_0)}{\partial t_k}),$$
$$\dots, (\frac{\partial\phi_n(t_0)}{\partial t_k})\Big)\Big(\Delta t_1 \cdots \Delta t_k\Big)^2,$$

gde je $\Delta t_j = h_j$, $j = 1, \dots, k$.

Zapremina ΔV zove se *element zapremine na površi* S.

Neka je P proizvoljna podela prostora $\mathbb{R}^k$ i $P_D = \{I_k\}$ intervali podele P koji se nalaze u D. Zapremina oblasti D je približno jednaka zbiru zapremina intervala familije P_D, pri čemu se tačnost aproksimacije povećava ako $\lambda(P) \to 0$. Zbir zapremina krivolinijskih paralelopipeda $\phi(I_k)$, $I_k \in P_D$, je približno jednak zapremini mnogostrukosti S.

Ovo razmatranje motiviše nas da definišemo zapreminu k–dimenzione elementarne površi.

(4.6.20) Definicija. Neka je $\phi : D \mapsto S$ parametrizacija glatke k–dimenzione elementarne površi $S \subset \mathbb{R}^n$, čije koordinatno predstavljanje je $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$. Njena *$k$–dimenziona zapremina* je

$$V_k(S) = \int\limits_D \Big[\Gamma\Big((\frac{\partial\phi_1(t)}{\partial t_1}, .., \frac{\partial\phi_n(t)}{\partial t_1}), .., (\frac{\partial\phi_1(t)}{\partial t_k}, .., \frac{\partial\phi_n(t)}{\partial t_k}\Big)\Big]^{1/2} .$$
$$\cdot\, dt_1 \cdots dt_k,$$

ako taj integral postoji.

Integral postoji, na primer, ako je $\phi \in C^{(1)}(\overline{D}, \mathbb{R}^n)$.

(4.6.21) Primeri. (1) Ako je S glatka jednodimenziona mnogostrukost definisana sa $(a, b) \ni t \mapsto (\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)) \in S$, tada je

$$\Gamma\big((\phi_1'(t), \dots, \phi_n'(t))\big) = {\phi_1'}^2(t) + \cdots + {\phi_n'}^2(t)$$

i $V_1(S) = \int\limits_a^b \big[{\phi_1'}^2(t) + \cdots + {\phi_n'}^2(t)\big]^{1/2} dt.$

Zapremina $V_1(S)$ zove se u tom slučaju *dužina krive* S; uobičajeno je da se označava sa $l(S)$.

Izračunajmo dužinu krive $S : x = e^{-t}\cos t,\ y = e^{-t}\sin t,\ z = e^{-t}$, $0 < t < \infty$. Na osnovu gornjeg je

$$l(S) = \int\limits_0^\infty \sqrt{3e^{-2t}}dt = \sqrt{3}.$$

(2) Neka je S glatka dvodimenziona površ definisana sa

$$D \ni (u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in S.$$

Označimo sa $E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$, $G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$ i $F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$. Tada je

$$\Gamma\left((\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}), (\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}) \right) = EG - F^2,$$

pa je, stoga, $V_2(S) = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2} dudv.$

Uobičajeno je da se $V_2(S)$ naziva *površina* površi S i označava sa $P(S)$.

Primenjujući dobijenu formulu, nalazimo da je površina površi $S : x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = v;\ D : 0 < u < a,\ 0 < v < 2\pi$, jednaka $P(S) = \int\limits_D \sqrt{1+u^2} dudv = 2\pi \int\limits_0^a \sqrt{1+u^2} du = \pi\big[a\sqrt{1+a^2} + \ln(a + \sqrt{1+a^2})\big].$

(3) Ako je glatka elementarna površ definisana sa $z = f(x,y); (x,y) \in D$, tada je

$$\Gamma\left((1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}), (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}) \right) = 1 + (\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2,$$

pa je u tom slučaju površina površi S jednaka

$$P(S) = \iint\limits_D \sqrt{1 + (\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2} dxdy.$$

Na primer, naći površinu dela površi $S : az = xy$ koja se nalazi u cilindru $x^2 + y^2 = a^2$. Primenjujući gornji obrazac dobija se $P(S) = 2\pi a^2(2\sqrt{2} - 1)/3$.

(4) Ako je $k = n$ i $\phi : D \mapsto S$, glatka u $\overline{D}$, parametrizacija glatke elementarne n–dimenzione površi S u $\mathbb{R}^n$, tada je

$$V_n(S) = \int\limits_D \left[\Gamma\left((\frac{\partial \phi_1(t)}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial \phi_n(t)}{\partial t_1}), \ldots, (\frac{\partial \phi_1(t)}{\partial t_n}, \ldots, \frac{\partial \phi_n(t)}{\partial t_n}) \right) \right]^{1/2} \cdot$$

$$\cdot\, dt_1 \cdots dt_n = \int\limits_D |\det \phi'(t)| dt_1 \cdots dt_n = \int\limits_S 1 \cdot dx,$$

tj. $V_n(S)$ je Žordanova mera površi S.

(4.6.22) Definicija. Neka je S deo po deo glatka k–dimenziona površ u $\mathbb{R}^n$ koja se, posle odstranjivanja najviše prebrojivog skupa deo po deo glatkih mnogostrukosti dimenzije manje ili jednake $k-1$, može predstaviti kao najviše prebrojiva unija $S = \cup_j S_j$, glatkih elementarnih mnogostrukosti (piše se $S \approx \{S_j\}$). Tada, po definiciji je $V_k(S) = \sum\limits_j V_k(S_j)$.

(4.6.23) Definicija. Skup E, podskup deo po deo glatke k–dimenzione mnogostrukosti S, je *k–dimenzione mere nula* (ili *površine nula u Lebegovom smislu*) ako za svaki pozitivan broj ϵ postoji najviše prebrojiv skup $S_1, S_2, \dots$, površi $S_j \subset S$, takvih da je $E \subset \cup_j S_j$ i $\sum_j V_k(S_j) < \epsilon$.

Slično kao u Lemi 4.4.1, može se pokazati da ako je $\phi : D \mapsto S$ glatka parametrizacija k–dimenzione površi $S \subset \mathbb{R}^n$, tada skup $E \subset S$ je k–dimenzione zapremine nula ako i samo ako je skup $\phi^{-1}(E)$ k–dimenzione mere nula u $\mathbb{R}^k$ u Lebegovom smislu. To znači, da ako je skup S' dobijen odstranjivanjem skupa E, k–dimenzione mere nula, iz deo po deo glatke k–dimenzione površi S, tada je $V_k(S) = V_k(S')$.

(4.6.24) Primeri. (1) Izračunati obim kruga $k : x^2 + y^2 = R^2$. Preslikavanje $(0, 2\pi) \ni t \mapsto (R\cos t, R\sin t)$ je glatka parametrizacija skupa $k' = k \setminus \{(R, 0)\}$. Kako je tačka u $\mathbb{R}^2$ dužine nula, to je

$$l(k') = l(k) = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}dt = 2R\pi.$$

(2) Parametarske jednačine torusa, koji nastaje rotacijom kružnice

$$(y-b)^2 + z^2 = a^2,\ 0 < a \le b,$$

oko z ose su:

$$T : x = (b + a\cos\psi)\cos\phi;\ y = (b + a\cos\psi)\sin\phi;\ z = a\sin\psi.$$

Oblast $D = \{(\phi, \psi) : 0 < \phi < 2\pi, 0 < \psi < 2\pi\}$ se difeomorfno preslikava na T' koji se dobija kad se iz T odstrane dve koordinatne linije $\phi = 2\pi$ i $\psi = 2\pi$ koje su površine nula. Zbog toga je

$$\begin{aligned} P(T) = P(T') &= \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{EG - F^2}d\psi \\ &= \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{2\pi} a(b + a\cos\psi)d\psi = 4\pi^2 ab \end{aligned},$$

jer je $E = (b + a\cos\psi)^2$, $G = a^2$ i $F = 0$.

(e) Krivolinijski i površinski integrali I vrste.

Neka je S elementarna glatka orijentisana k–dimenziona površ u $\mathbb{R}^n$ definisana sa

$$D \ni t = (t_1, \ldots, t_k) \mapsto (\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t)) = \phi(t) \in S$$

i neka je $f : S \mapsto \mathbb{R}$ ograničena funkcija.

(4.6.25) Definicija. Ako integral

$$\int\limits_D f(\phi(t))dV(t) = \int\limits_D f(\phi(t))\Big[\Gamma\Big((\frac{\partial\phi_1(t)}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial\phi_n(t)}{\partial t_1}), \ldots, (\frac{\partial\phi_1(t)}{\partial t_k}, \ldots, \frac{\partial\phi_n(t)}{\partial t_k})\Big]^{1/2} dt$$

postoji, naziva se *integralom funkcije f po površi S* i označava sa $\int\limits_S f(x)\,dS$.

Integral postoji, ako je, na primer, $\phi \in C^{(1)}(\overline{D}, \mathbb{R}^n)$ i $f \in C(\overline{S})$.

(4.6.26) Teorema. Integral funkcije po površi ne zavisi od parametrizacije niti od orijentacije površi.

Dokaz. Navedimo dokaz u slučaju jedno i dvodimenzionih površi. Analogan dokaz može se izvesti i u ostalim slučajevima.

Pretpostavimo da je S jednodimenziona površ. Neka su $I \ni t \mapsto \phi(t) \in S$ i $J \ni t \mapsto \psi(t) \in S$ glatke parametrizacije površi S i neka integral $I_1 = \int\limits_I f(\phi(t))|\phi'(t)|dt$ postoji. Dokažimo da integral $J_1 = \int\limits_J f(\psi(\tau))|\psi'(\tau)|d\tau$ postoji i da je $J_1 = I_1$.

Preslikavanje $J \ni \tau \mapsto \alpha(\tau) = t \in I$,određeno sa $\phi(\alpha(\tau)) = \psi(\tau), \tau \in J$, je difeomorfizam. Smenom $t = \alpha(\tau)$ u integralu I_1 dobija se

$$(1) \qquad I_1 = \int\limits_J f(\psi(\tau))|\phi'(\alpha(\tau))|\,|\alpha'(\tau)|d\tau.$$

Ako je $\phi = (\phi_1, \ldots, \phi_n)$ i $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$, tada je

$$\psi_j(\tau) = \phi_j(\alpha(\tau)) \text{ za svako } j,\ 1 \le j \le n,$$

pa se diferenciranjem dobija $\psi_j'(\tau) = \phi_j'(\alpha(\tau))\alpha'(\tau)$, što znači da je $|\psi'(\tau)| = |\phi'(\alpha(\tau)|\,|\alpha'(\tau)|$. Stoga je $J_1 = I_1$.

Time smo dokazali da integral po jednodimenzionoj površi ne zavisi od parametrizacije.

Parametrizacije ϕ i ψ su saglasne ako je $\alpha'(\tau) > 0$, za svako $\tau \in J$, a generišu suprotne orijentacije ako je $\alpha'(\tau) < 0$, za svako $\tau \in J$. Iz (1) se vidi da vrednost integrala funkcije f po površi S ne zavisi od znaka funkcije $\alpha'(\tau)$, što znači da ne zavisi od orijentacije površi S.

Slučaj $k = 2$. Skica dokaza. Neka su

$$G \ni (v_1, v_2) \mapsto (\psi_1(v_1, v_2), \ldots, \psi_n(v_1, v_2)) = \psi(v_1, v_2) \in S$$

i

$$D \ni (u_1, u_2) \mapsto (\phi_1(u_1, u_2), \ldots, \phi_n(u_1, u_2)) = \phi(u_1, u_2) \in S$$

dve parametrizacije elementarne glatke dvodimenzione površi S i neka integral

$$I_1 = \int\limits_D f(\phi(u_1, u_2)) \left[\Gamma\left((\frac{\partial \phi_1}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial \phi_n}{\partial u_1}), (\frac{\partial \phi_1}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial \phi_n}{\partial u_2}) \right)\right]^{1/2} du_1 du_2$$

funkcije $f : S \mapsto \mathbb{R}$ po površi S postoji.

Preslikavanje

$$G \ni (v_1, v_2) \mapsto (u_1 = \alpha_1(v_1, v_2), u_2 = \alpha_2(v_1, v_2)) = \alpha(v_1, v_2)$$

definisano sa

$$\psi_j(v_1, v_2) = \phi_j(\alpha_1(v_1, v_2), \alpha_2(v_1, v_2)),\ j = 1, \ldots, n \tag{2}$$

je difeomorfizam oblasti G i D.

Ako se izvrši smena $u_1 = \alpha_1(v_1, v_2)$, $u_2 = \alpha_2(v_1, v_2)$ u integralu I_1, i iskoristi da je

$$\frac{\partial \psi_j(v_1, v_2)}{\partial v_i} = \frac{\partial \phi_j}{\partial u_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial v_i} + \frac{\partial \phi_j}{\partial u_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial v_i},$$

(diferenciranjem dobijeno iz (2)) dobija se da je integral I_1 jednak

$$J_1 = \int\limits_G f(\psi(v_1, v_2)) \left[\Gamma\left((\frac{\partial \psi_1}{\partial v_1}, \ldots, \frac{\partial \psi_n}{\partial v_1}), (\frac{\partial \psi_1}{\partial v_2}, \ldots, \frac{\partial \psi_n}{\partial v_2}) \right)\right]^{1/2} dv_1 dv_2.$$

Orijentacija površi S zavisi od znaka funkcije $\det \alpha'$, a integral I_1, očigledno, ne. $\square$

Integral funkcije po jednodimenzionoj površi zove se *krivolinijskim integralom prve vrste*, a po dvodimenzionoj površi *površinski integral prve vrste*.

Definicija integrala funkcije po elementarnoj glatkoj površi uopštava se na slučaj deo po deo glatke površi analogno proširenju definicije zapremine k–dimenzione površi u $\mathbb{R}^n$ što je razmatrano u prethodnom odeljku.

(4.6.27) Primeri. (1) Ako je $(a, b) \ni t \mapsto (\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t)) \in l$ glatka elementarna kriva, tada je

$$\int\limits_l f(x_1, \ldots, x_n) dl = \int\limits_a^b f(\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t)) \left[\phi_1'^2(t) + \cdots + \phi_n'^2(t)\right]^{1/2} dt.$$

(2) Izračunati $\int_l xy\,dl$, gde je l četvrtina elipse $a^{-2}x^2 + b^{-2}y^2 = 1$ koja pripada prvom kvadrantu.

Rešenje.

Neka je $a \neq b$. Jedna od parametrizacija krive l je $(0, \pi/2) \ni t \mapsto (a\cos t, b\sin t) \in l$, pa je, na osnovu primera (1),

$$\int_l xy\,dl = \int_0^{\pi/2} ab\sin t\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt$$

$$= ab\int_0^1 z\sqrt{a^2z^2 + b^2(1 - z^2)}dz = 3^{-1}ab(a^2 + ab + b^2)/(a + b).$$

Rezultat važi i za $a = b$.

(3) Izračunati $\int_l (x^2+y^2)e^z(2+z^2)^{-1/2}\,dl$, gde je l deo krive $l : x = t\cos t$; $y = t\sin t$; $z = t$, koji se nalazi u paraboloidu $x^2 + y^2 = 2z$.

Rešenje.

Kriva l leži na konusnoj površi $x^2 + y^2 = z^2$, koja seče paraboloid $x^2 + y^2 = 2z$ po krugu $x^2 + y^2 = 4$, $z = 2$. Znači, kriva l se nalazi u paraboloidu za $t \in [0, 2]$. Kako je $\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}dt = \sqrt{2 + t^2}dt$, to je

$$I = \int_0^2 t^2e^t\frac{1}{\sqrt{2 + t^2}}\sqrt{2 + t^2}dt = \int_0^2 t^2e^t dt = 2(e^2 - 1).$$

(4) Izračunati $\int_l (x^2 + y^2)^{-3/2}dl$, gde je l odsečak spirale $\rho\theta = 1$ (polarne koordinate), određen uslovima $\sqrt{3} \leq \theta \leq 2\sqrt{2}$.

Rešenje.

Parametarizacija krive l je $[\sqrt{3}, 2\sqrt{2}] \ni \theta \mapsto (\theta^{-1}\cos\theta, \theta^{-1}\sin\theta) \in l$, pa je $dl = \theta^{-2}\sqrt{1 + \theta^2}d\theta$. Sada se, na osnovu primera (1), dobija $I = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \theta\sqrt{1 + \theta^2}d\theta = 19/3$.

Ako je kriva definisana u polarnim koordinatama ρ i θ sa $\rho = \rho(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, tada je

$$\int_l f(x, y)\,dl = \int_\alpha^\beta f(\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta)\sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}d\theta.$$

(5) Ako je $D \ni (x,y) \mapsto (x,y,z(x,y)) \in S$ parametrizacija glatke dvodimenzione površi S u $\mathbb{R}^3$, i $f : S \mapsto \mathbb{R}$, tada je

$$\int\limits_S f(x,y,z)\,dS = \int\limits_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}dxdy.$$

(6) Izračunati integral $I = \int\limits_S (y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)\,dS$, gde je S deo konusne površi $z = \sqrt{x^2+y^2}$ koji je isečen cilindrom $x^2+y^2 = 2x$.

Rešenje.

Kako je $D \ni (x,y) \mapsto (x,y,\sqrt{x^2+y^2}) \in S$ parametrizacija površi S, gde je $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 2x\}$, to je na osnovu primera (5), uz prelazak na polarne koordinate r i θ

$$I = \int\limits_D \left[(x^2+y^2)^2+x^2y^2\right]\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy$$

$$= \sqrt{2}\int\limits_D \left[(x^2+y^2)^2+x^2y^2\right]dxdy = 2\sqrt{2}\int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^{2\cos\theta} r^5(1+\sin^2\theta\cos^2\theta)dr.$$

Poslednji integral može se izračunati primenom rekurentnih formula, i dobija se $I = 29\sqrt{2}\pi/8$.

(7) Ako je glatka površ S definisana sa

$$D \ni (u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in S \text{ i } f : S \mapsto \mathbb{R},$$

tada je

$$\int\limits_S f(x,y,z)\,dS = \int\limits_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{A^2+B^2+C^2}dudv,$$

gde je $A = \dfrac{D(y,z)}{D(u,v)}$, $B = \dfrac{D(z,x)}{D(u,v)}$, i $C = \dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}$.

(8) Izračunati $\int\limits_S z^2\,dS$, gde je S deo površi konusa $S : x = r\cos\phi\sin\alpha$, $y = r\sin\phi\sin\alpha$, $z = r\cos\alpha$; $0 \le r \le a$, $0 \le \phi \le 2\pi$, α konstanta ($0 < \alpha < \pi/2$).

Rešenje.

Parametrizacija površi S je data pomoću parametara r i ϕ. pa je: $A = \dfrac{D(y,z)}{D(r,\phi)} = -r\cos\phi\cos\alpha\sin\alpha$; $B = \dfrac{D(z,x)}{D(r,\phi)} = -r\sin\phi\cos\alpha\sin\alpha$; $C =$

$\dfrac{D(x,y)}{D(r,\phi)} = r\sin^2\alpha$, odnosno $\sqrt{A^2+B^2+C^2} = r\sin\alpha$. Prema primeru (7) dobijamo

$$I = \int\limits_D r^2\cos^2\alpha \cdot r\sin\alpha\, d\phi dr = \sin\alpha\cos^2\alpha \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^a r^3 dr$$
$$= 2^{-1}\pi a^4 \sin\alpha\cos^2\alpha.$$

(f) Krivolinijski integral II vrste.

Neka je l glatka elementarna kriva u $\mathbb{R}^n$ orijentisana svojom parametrizacijom $I = (a,b) \ni t \mapsto x = \phi(t) = (\phi_1(t), \ldots, \phi_n(t)) \in l$ i neka $F : l \mapsto \mathbb{R}^n$ funkcija čija koordinatna preslikavanja $F_1, \ldots, F_n$ su ograničene funkcije na $l = \phi((a,b))$. Neka je $\tau(x) = |\phi'(t)|^{-1}\phi'(t)$ jedinični vektor tangente u tački $x = \phi(t)$.

(4.6.28) Definicija. Ako krivolinijski integral $\int\limits_l (F(x), |\phi'(t)|^{-1}\phi'(t))dl$ postoji, naziva se *krivolinijski integral druge vrste* funkcije F na orijentisanoj krivoj l i označava se $\int\limits_l F_1(x)dx_1 + \cdots + F_n(x)dx_n$.

Dakle, koristeći definiciju krivolinijskog integrala I vrste, nalazimo

$$\int\limits_l F_1(x)dx_1 + \cdots + F_n(x)dx_n = \int\limits_a^b \big[F_1(\phi(t))\phi_1'(t) + \cdots + F_n(\phi(t))\phi_n'(t)\big]dt.$$

Primetimo da se promenom orjentacije krive l menja znak integrala. Drugim rečima, ako je $J \ni \tau \mapsto x = \psi(\tau) \in l$ parametrizacija krive l nesaglasna sa orijentacijom određenom parametrizacijom $I \ni t \mapsto x = \phi(t) \in l$, tada je

$$I_1 = \int\limits_l (F(x), |\phi'(t)|^{-1}\phi'(t))dl = -\int\limits_l (F(x), |\psi'(\tau)|^{-1}\psi'(\tau))dl = -J_1.$$

Zaista, ako u integralu $I_1 = \int\limits_I (F(\phi(t)), |\phi'(t)|^{-1}\phi'(t))|\phi'(t)|dt$, izvršimo smenu $t = \alpha(\tau)$,gde je $\psi(\tau) = \phi(\alpha(\tau))$, dobijamo

$$I_1 = \int\limits_J (F(\psi(\tau)), \phi'(\alpha(\tau)))|\alpha'(\tau)|d\tau.$$

Kako je $\psi'(\tau) = \phi'(\alpha(\tau))\alpha'(\tau)$, to u slučaju da su parametrizacije saglasne, tj. ako je $\alpha'(\tau) > 0$, nalazimo da je $I_1 = J_1$, a ako nisu, tj. ako je $\alpha'(\tau) < 0$, dobijamo da je $I_1 = -J_1$.

Ako je $l \approx \{l_j\}$, deo po deo glatka orijentisana kriva, tada, po definiciji imamo

$$\int_l (F(x), \tau(x))dl = \sum_j \int_{l_j} (F(x), \tau(x))dl.$$

(4.6.29) Primeri. (1) Ako je glatka kriva $l \subset \mathbb{R}^2$ definisana sa $[a, b] \ni t \mapsto (x(t), y(t), z(t)) \in l$, i ako je $F = (P, Q, R)$ tada je

$$\int_l P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \pm \int_a^b \big[P(x(t), y(t), z(t))x'(t)$$
$$+ Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)\big]dt,$$

gde se znak + uzima ako rašćenju parametra t odgovara smer kretanja na krivoj, a – ako rašćenje parametra nije saglasno sa orijentacijom krive.

(2) Izračunati integral $\int_l ydx+zdy+xdz$, gde je l presek sfere $x^2+y^2+z^2 = 1$ i ravni $x + z = 1$, orijentisan pozitivno ako se posmatra iz tačke $(x, 0, 0)$, $x > 1$.

Rešenje.

Kako je projekcija krive l na ravan Oxy elipsa $2x^2 - 2x + y^2 = 0$, ili u parametarskom obliku: $x = \frac{1}{2}(1 + \cos t)$; $y = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin t$, $t \in [0, 2\pi]$, to je parametrizacija krive l data sa

$$[0, 2\pi] \ni t \mapsto \big(\tfrac{1}{2}(1 + \cos t), \tfrac{\sqrt{2}}{2} \sin t, \tfrac{1}{2}(1 - \cos t)\big) \in l.$$

Rašćenju parametra t odgovara orjentacija krive, pa je na osnovu primera (1),

$$I = \int_0^{2\pi} \Big[-\frac{\sqrt{2}}{4} \sin^2 t + \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - \cos t) \cos t + \frac{1}{4}(1 + \cos t) \sin t\Big]dt$$
$$= -\frac{\sqrt{2}}{4} \int_0^{2\pi} dt = -\pi\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(3) Izračunati $\int_\gamma (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$, gde je γ presek sfere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ i ravni $y = x \tan \alpha$ orijentisan pozitivno ako se posmatra sa pozitivnog dela x ose.

Rešenje.

Lako se vidi da je jedna parametrizacija krive data sa

$$\gamma : x = a \cos\phi \cos\alpha,\ y = a \cos\phi \sin\alpha,\ z = a \sin\phi;\ 0 \le \phi \le 2\pi,$$

pa se neposrednim računom dobija $I = 2\sqrt{2}a^2 \sin(\frac{\pi}{4} - \alpha)$.

(g) Površinski integral II vrste.

Neka je na glatkoj elementarnoj dvostranoj površi $S \subset \mathbb{R}^3$, transverzno orijentisanoj jediničnim vektorima normale $n = n(x, y, z)$, definisana funkcija $F = (F_1, F_2, F_3)$ čije su komponente ograničene na S.

(4.6.30) Definicija. Ako integral $\int_S (F, n)\, dS$ postoji, naziva se *površinski integral II vrste* funkcije F po orijentisanoj površi S i označava se

$$\int_S F_1 dydz + F_2 dzdx + F_3 dxdy.$$

Primetimo da se promenom orijentacije površi S menja i znak površinskog integrala II vrste.

Ako je $S \approx \{S_j\}$ povezana deo po deo glatka orijentisana površ, tada se površinski integral II vrste funkcije $F = (F_1, F_2, F_3)$ sa ograničenim koordinatama, definiše sa

$$\int_S F_1 dx_2 dx_3 + F_2 dx_3 dx_1 + F_3 dx_1 dx_2 = \sum_j \int_{S_j} F_1 dx_2 dx_3 + F_2 dx_3 dx_1 + F_3 dx_1 dx_2.$$

Ako je glatka elementarna površ $S \subset \mathbb{R}^3$ orijentisana svojom parametrizacijom

$$D \ni (u, v) \mapsto \phi(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)) \in S,$$

tada je jedinični vektor normale površi S, izabran tako da je njime određena transverzna orijentacija saglasna orijentaciji određenoj parametrizacijom, jednak

$$n(x_1, x_2, x_3) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} e_1 + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} e_2 + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} e_3 = \cos\alpha_1 e_1 + \cos\alpha_2 e_2 + \cos\alpha_3 e_3,$$

gde su $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ uglovi koje vektor n gradi sa pozitivnim delom x_1, x_2, x_3 ose respektivno.

U tom slučaju dobijamo

$$\int\limits_S F_1 dx_2 dx_3 + F_2 dx_3 dx_1 + F_3 dx_1 dx_2 = \int\limits_S (F_1 \cos\alpha_1 + F_2 \cos\alpha_2$$

$$+ F_3 \cos\alpha_3) dS = \int\limits_D (F_1(\phi(u,v))A + F_2(\phi(u,v))B + F_3(\phi(u,v))C) du dv.$$

U specijalnom slučaju, kada je površ S definisana sa $D \ni (x,y) \mapsto (x,y,z(x,y)) \in S$, imamo

$$\int\limits_S F_1 dydz + F_2 dzdx + F_3 dxdy = \int\limits_D \Big[-\frac{\partial z(x,y)}{\partial x} F_1(x,y,z(x,y)) \tag{3}$$
$$-\frac{\partial z(x,y)}{\partial y} F_2(x,y,z(x,y)) + F_3(x,y,z(x,y)) \Big] dxdy.$$

(4.6.31) Primeri. (1) Izračunati $I = \int\limits_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, po spoljašnjoj strani sfere $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$.

Izračunajmo integral $I_1 = \iint\limits_S z^2 dxdy$. Neka je $S^+ = \Phi_1(D)$ i $S^- = \Phi_2(D)$, gde je $\Phi_1(x,y) = (x, y, c + \sqrt{r^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2})$, $\Phi_2(x,y) = (x, y, c - \sqrt{r^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2})$ i $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2 + (y-b)^2 \le r^2\}$.

Kraj ∂S^+ površi S^+ je kružnica $(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2$, $z = c$, pozitivno orijentisana, a kraj ∂S^- površi S^- je ista kružnica, ali negativno orijentisana. Stoga je atlas $\mathcal{A}(S) = \{S^+ \setminus \partial S^+, S^- \setminus \partial S^-\}$ površi S orijentisan, odnosno površ S je orijentisana.

Prema (3) je

$$\int\limits_{S^+} z^2 dxdy = \int\limits_D (c + \sqrt{r^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2})^2 dxdy,$$

$$\int\limits_{S^-} z^2 dxdy = -\int\limits_D (c - \sqrt{r^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2})^2 dxdy,$$

jer se drugi integral računa po donjoj strani površi S^-. Sabiranjem dobijamo

$$I_1 = \int\limits_{S^+} z^2 dxdy + \int\limits_{S^-} z^2 dxdy = 4c \int\limits_D \sqrt{r^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2} dxdy.$$

Prelaskom na polarne koordinate $x = a + \rho\cos\phi$, $y = b + \rho\sin\phi$, $0 \le \phi \le 2\pi, 0 \le \rho \le r$, dobija se

$$I_1 = 4c \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^r \rho\sqrt{r^2 - \rho^2} d\rho = \frac{8}{3}\pi c r^3.$$

Analogno se dobija $\int\limits_S y^2 dzdx = \frac{8}{3}\pi b r^3$ i $\int\limits_S x^2 dydz = \frac{8}{3}\pi a r^3$.

Sabiranjem dobijamo rezultat $I = 8\pi r^3(a+b+c)/3$.

(2) Izračunati integral $\int\limits_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, gde je S spoljašnja strana konusne površi $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \le z \le h$.

Rešenje.

Površ S je definisana sa $D \ni (x,y) \mapsto (x, y, \sqrt{x^2+y^2}) \in S$, gde je $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le h^2\}$. Na osnovu (3), vodeći računa da se radi o donjoj strani površi S, dobijamo

$$\begin{aligned} I &= -\int\limits_D \left(-x^2\frac{\partial z}{\partial x} - y^2\frac{\partial z}{\partial y} + (x^2+y^2)\right)dxdy \\ &= \int\limits_D \left(\frac{x^3+y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} - (x^2+y^2)\right)dxdy. \end{aligned}$$

Prelaskom na polarne koordinate r, θ, imamo

$$I = \int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^h r^2(\cos^3\theta + \sin^3\theta - 1) r\, dr = -\frac{\pi h^4}{2}.$$

(3) Izračunati integral $\int\limits_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, gde je S deo ravni $x + y + z = a$, $a > 0$, u prvom oktantu, orijentisan normalom na onu stranu gde nije tačka $(0,0,0)$.

Rešenje.

Primenom relacije (3), gde je $z = a - x - y$, a $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le a - x\}$, i kako se radi o gornjoj strani površi S, to je

$$I = \int\limits_D (x + y + a - x - y) dxdy = a\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{a-x} dy = \frac{a^3}{2}.$$

4.7. Osnovne integralne formule analize

U ovom odeljku ćemo dokazati Grinovu i Stoksovu formulu, kao i Gaus-Ostrogradskijevu formulu, koje se zbog svojih velikih primena, smatraju osnovnim integralnim formulama analize.

(a) Grinova formula.

(4.7.1) Teorema (Grinova formula). Neka je $D \subset \mathbb{R}^2$ ograničena oblast takva da je ∂D deo po deo glatka kriva. Ako su P i Q glatke funkcije u $\overline{D}$, tada je

$$\int\limits_{\partial D} Pdx + Qdy = \int\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy,$$

pri čemu je kriva ∂D pozitivno orijentisana.

Dokaz. Dokažimo prvo Grinovu formulu za slučaj da je

$$D = D_y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b,\ \phi_1(x) < y < \phi_2(x)\},$$

gde su ϕ_1 i ϕ_2 glatke funkcije na odsečku $[a,b]$.

U tom slučaju, je

$$\begin{aligned} \int\limits_{D_y} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy &= \int\limits_a^b dx \int\limits_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dy \\ &= \int\limits_a^b \big[P(x,\phi_2(x)) - P(x,\phi_1(x)\big] dx = -\int\limits_{\partial D_y} P(x,y)dx. \end{aligned} \tag{1}$$

Analogno, ako je

$$D = D_x = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \psi_1(y) < x < \psi_2(y),\ c < y < d\},$$

gde su ψ_1 i ψ_2 glatke funkcije na intervalu $[c,d]$, tada je

$$\int\limits_{D_x} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int\limits_{\partial D_x} Q(x,y)dy.$$

Pretpostavimo da se oblast D može razrezati na konačan broj oblasti D_y.

Zbog aditivnosti integrala, sledi

$$\int\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \sum_i \int\limits_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy.$$

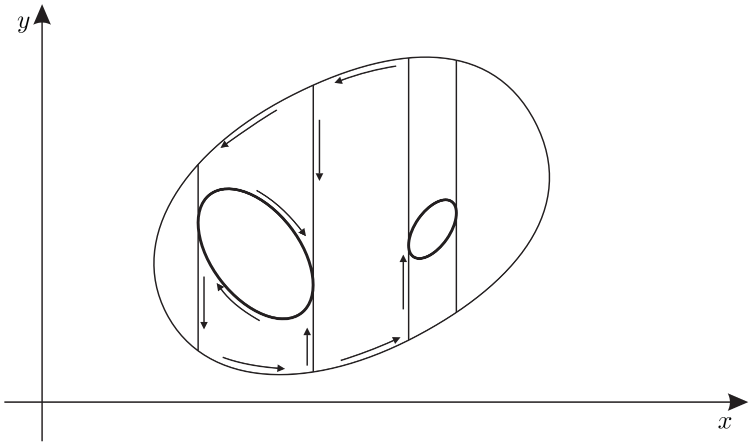
Prema dokazanom je $\int\limits_{D_i} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int\limits_{\partial D_i} P(x,y)dx$. Na zajedničkim granicama delova D_i javljaju se suprotne orjentacije, pa je zbog toga

$$\sum_i \int\limits_{D_i} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy = -\int\limits_{\partial D} P(x,y)dx.$$

Analogno, ako oblast D dopušta razbijanje na oblasti tipa D_x, nalazimo

$$\int\limits_D \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dxdy = \int\limits_{\partial D} Q(x,y)dy.$$

Oblast, koja dopušta razbijanja oba tipa zove se *prosta oblast.* Dakle, za proste oblasti dokazali smo da važi Grinova formula.



Slika 4.7.1.

Neka je $I = (0,1)\times(0,1)$, G oblast u D sa deo po deo glatkom granicom i $\phi : \overline{I} \mapsto \overline{G}$ difeomorfizam klase $C^{(2)}$, sa pozitivnim jakobijanom, čija su koordinatna preslikavanja ϕ_1 i ϕ_2. Tada je

$$\int\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int\limits_I \left(\frac{\partial Q(\phi(u,v))}{\partial x} - \frac{\partial P(\phi(u,v))}{\partial y}\right) \cdot \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial u}\frac{\partial \phi_2}{\partial v} - \frac{\partial \phi_1}{\partial v}\frac{\partial \phi_2}{\partial u}\right) dudv$$

i

$$\int\limits_{\partial G} Pdx + Qdy = \int\limits_{\partial I} \left(P(\phi(u,v))\frac{\partial \phi_1}{\partial u} + Q(\phi(u,v))\frac{\partial \phi_2}{\partial u}\right) du + \left(P(\phi(u,v))\frac{\partial \phi_1}{\partial v} + Q(\phi(u,v))\frac{\partial \phi_2}{\partial v}\right) dv.$$

Kako je I prosta oblast, primenom Grinove formule za takve oblasti, zaključujemo da su integrali na desnoj strani prethodnih jednakosti jednaki. Na gore opisan način, dokazuje se Grinova teorema za oblasti koje se mogu razbiti na konačan broj oblasti istih svojstava kao i oblast G. Na kraju, primetimo da oblast D ima to svojstvo.

(4.7.2) Primeri. (1) Ako se u Grinovoj formuli uzme da je $P(x,y) = -y$ i $Q(x,y)=0$, ili $P(x,y)=0$ i $Q(x,y)=x$, dobijamo površinu oblasti D

$$P(D) = \int\limits_{\partial D} -y\,dx = \int\limits_{\partial D} x\,dy,$$

odakle, sabiranjem, nalazimo

$$P(D) = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial D} -ydx + xdy.$$

(2) Izračunati površinu oblasti D u prvom kvadrantu ograničenu krivom l: $(x^2+y^2)^3 = 4a^2x^2y^2$.

Rešenje.

Ako se uvedu polarne koordinate r i θ, dobija se jednačina krive l u obliku $r = a\sin 2\theta$, odnosno parametarske jednačine: $x = a\sin 2\theta\cos\theta$; $y = a\sin 2\theta \sin\theta$, $0 \le \theta \le \pi/2$. Na osnovu primera (1) dobija se

$$P(D) = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 2\theta d\theta = \frac{\pi a^2}{8}.$$

(b) Gaus–Ostrogradskijeva formula.

Gaus–Ostrogradskijeva formula, kao i Stoksova formula, koju ćemo navesti u sledećem odeljku, izvode se analogno Grinovoj formuli.
Dokazaćemo njeno važenje za proste oblasti

(4.7.3) Teorema (Gaus–Ostrogradskijeva formula). Neka je $D \subset \mathbb{R}^3$ ograničena oblast takva da je ∂D deo po deo glatka površ, i neka su P, Q, R glatke funkcije u $\overline{D}$, tada je

$$\int\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \int\limits_{\partial D} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy,$$

gde je površ ∂D orijentisana poljem spoljašnjih jediničnih vektora normala.

Dokaz. Neka je

$$D_z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in G, \phi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\},$$

gde je G oblast u $\mathbb{R}^2$ i ϕ i ψ glatke funkcije u G. Primenom Fubinijeve teoreme, nalazimo da je

$$\int\limits_{D_z} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \int\limits_G dxdy \int\limits_{\phi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \int\limits_G \big(R(x,y,\psi(x,y))$$
$$- R(x,y,\phi(x,y))\big)dxdy.$$

Neka su površi S_1 i S_2 definisane respektivno sa

$$G \ni (x,y) \mapsto (x,y,\phi(x,y)) \in S_1 \quad \text{i} \quad G \ni (x,y) \mapsto (x,y,\psi(x,y)) \in S_2.$$

Spoljašnji vektor normale određuje na površi S_1 donju stranu, a na S_2 gornju stranu. Zbog toga je

$$-\int\limits_G R(x,y,\phi(x,y))dxdy = \int\limits_{S_1} R(x,y,z)dxdy,$$
$$\int\limits_G R(x,y,\psi(x,y))dxdy = \int\limits_{S_2} R(x,y,z)dxdy.$$

Neka je $S_3 = \partial D_z \setminus (S_1 \cup S_2)$. Tada je $\int\limits_{S_3} Rdxdy = \int\limits_{S_3} R\cos\gamma dS_3 = 0$, jer je $\cos\gamma \equiv 0$.
Dakle,

$$\int\limits_{D_z} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz = \int\limits_{\partial D_z} R(x,y,z)dxdy.$$

Slično, za analogno definisane oblasti D_x i D_y, važi

$$\int\limits_{D_x} \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \int\limits_{\partial D_x} P(x,y,z)dydz,$$
$$\int\limits_{D_y} \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \int\limits_{\partial D_y} Q(x,y,z)dydz.$$

Ako je oblast D prosta, tj. ako se može razbiti na konačan broj oblasti tipa D_x, D_y i D_z, tada, sabiranjem dobijenih jednakosti, zaključujemo da, za takvu oblast D, važi Gaus–Ostrogradskijeva formula.

(4.7.4) Primeri. (1) Neka je sfera $S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = a^2\}$ orjentisana spoljašnjim vektorom normale. Izračunati integral

$$I = \int\limits_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy.$$

Rešenje. Primenom Gaus–Ostrogradskijeve formule dobija se

$$I = 3\int\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz,$$

gde je V lopta ograničena površi S. Prelaskom na sferne koordinate dobijamo

$$I = 3\int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\phi \int\limits_0^{a} \rho^4 \sin\theta\, d\rho = \frac{12a^5\pi}{5}.$$

(2) Izračunati integral $I = \int\limits_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)dS$, gde je S deo konusne površi $x^2+y^2=z^2$, $0\le z\le h$, a $n=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ jedinični vektor spoljašnje normale na S.

Rešenje. Kako površ S nije granica ograničene oblasti D, to se ne može direktno primeniti Gaus–Ostrogradskijeva formula. U ovakvim slučajevima koristi se nova površ S_1, koja zajedno sa površi S daje zatvorenu površ $S+S_1$, a zatim se na nju primeni pomenuta formula. Jasno je, da površinski integral po površi S_1 treba na neki način (često je to neposredno) izračunati. Na primer, neka je S_1 gornja strana površi $\{(x,y,h)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le h^2\}$. Površ $S+S_1$ je deo po deo glatka i ograničava konačnu oblast $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2}\le z\le h\}$. Na osnovu Teoreme 4.7.3 i prelaskom na cilindrične koordinate r, θ, z, sledi

$$\int\limits_{S+S_1}(x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)dS = 2\int\limits_V (x+y+z)dxdydz$$

$$= 2\int\limits_0^{2\pi} d\theta \int\limits_0^{h} dr \int\limits_r^{h} (r(\cos\theta+\sin\theta)+z)dz = \pi h^4/2.$$

Kako je

$$\int\limits_{S_1}(x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)dS_1 = h^2\int\limits_{S_1} dS_1 = h^2 \int\limits_{x^2+y^2\le h^2} dxdy = \pi h^4,$$

to je $I = -\pi h^4/2$.

(c) Stoksova formula.

(4.7.5) Teorema (Stoksova formula). Neka je $S\subset\mathbb{R}^3$ orijentisana ograničena površ klase $C^{(2)}$ sa krajem ∂S orijentisanim saglasno orijentaciji površi S. Ako su P, Q i R glatke funkcije na S, tada je

$$\int\limits_{\partial S} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{S} \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$
$$= \int\limits_{S} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

Dokaz. Neka je površ $S \setminus \partial S$ definisana parametrizacijom

$$D \ni (u,v) \mapsto \phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in S,$$

klase $C^{(2)}$, pri čemu je D ograničena oblast čija granica ∂D je definisana sa

$$[\alpha,\beta] \ni t \mapsto (u(t), v(t)) = \psi(t) \in \partial D.$$

Tada je kraj ∂S površi S definisan sa

$$[\alpha,\beta] \ni t \mapsto \phi(\psi(t)) \in \partial S,$$

pa je

$$\int\limits_{\partial S} Pdx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P(\phi(\psi(t)))\left(\frac{\partial x}{\partial u}u'(t) + \frac{\partial x}{\partial v}v'(t)\right)dt$$
$$= \int\limits_{\partial D} P[\phi(u,v)]\frac{\partial x}{\partial u}du + P[\phi(u,v)]\frac{\partial x}{\partial v}dv.$$

Primenom Grinove formule, nalazimo da je poslednji integral jednak

$$\int\limits_{D} \left[\left(\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v} - \left(\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u}\right]dudv$$
$$= \int\limits_{D} \left[-\frac{\partial P}{\partial y}\left(-\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right) + \frac{\partial P}{\partial z}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\right]dudv.$$

Poslednji integral je jednak

$$\int\limits_{S} -\frac{\partial P}{\partial y}dxdy + \frac{\partial P}{\partial z}dxdz,$$

stoga je $\int\limits_{\partial S} Pdx = \int\limits_{S} -\frac{\partial P}{\partial y}dxdy + \frac{\partial P}{\partial z}dxdz.$

Na sličan način se razmatraju integrali $\int\limits_{\partial S} Qdy$ i $\int\limits_{\partial S} Rdz$.

(4.7.7) Primeri. (1) Izračunati integral $I = \int\limits_{\partial S} ydx + zdy + xdz$, gde je S spoljašnja strana polusfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ koja je sa one strane ravni

$x + y + z = 0$, sa koje je i tačka $(1, 1, 1)$. Orijentacija krive ∂S je saglasna sa orijentacijom površi S.

Rešenje.

Stoksovu formulu mogli bi primeniti na površ S, međutim lakše je to uraditi u odnosu na površ S_1, deo ravni $x + y + z = 0$ koji ograničava kriva ∂S. Ako se orijentacija površi S_1 definiše njenim jediničnim vektorom normale $n_1 = 3^{-1/2}(1, 1, 1)$, onda je ta orijentacija saglasna sa orijentacijom krive ∂S, tj. $\partial S = \partial S_1$. Primenom Stoksove formule (normalni vektor je n_1), dobija se

$$I = \int\limits_{S_1} (-\cos\alpha - \cos\beta - \cos\gamma) dS_1 = -\pi\sqrt{3}.$$

(2) Neka je S deo polusfere $z = \sqrt{2Rx - x^2 - y^2}$ koji se nalazi u cilindru $x^2 + y^2 = 2rx$, $0 < r < R$, orijentisan spoljašnjim vektorom normale. Izračunati

$$I = \int\limits_{\partial S} (y^2 + z^2)dx + (x^2 + z^2)dy + (x^2 + y^2)dz,$$

gde je ∂S orjentisani kraj površi S, saglasno orjentaciji površi S.

Rešenje. Primenom Stoksove formule, nalazimo da je

$$I = 2\int\limits_{S} \big[(y - z)\cos\alpha + (z - x)\cos\beta + (x - y)\cos\gamma\big] dS.$$

Kako je $\cos\alpha = \dfrac{-(R - x)}{z}(1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2)^{-1/2}$, $\cos\beta = \dfrac{y}{z}(1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2)^{-1/2}$, $\cos\gamma = (1 + {z'_x}^2 + {z'_y}^2)^{-1/2}$, to je

$$\begin{aligned} I &= 2 \int\limits_{x^2+y^2\le 2rx} \left[\frac{-(y - z)(R - x) + (z - x)y}{z} + (x - y)\right] dxdy \\ &= 2R \int\limits_{x^2+y^2\le 2rx} (1 - yz^{-1})dxdy = 2\pi R r^2. \end{aligned}$$

(d) Nezavisnost krivolinijskog integrala od puta integracije.

Neka su P i Q neprekidne funkcije u oblasti $D \subset \mathbb{R}^2$ i neka su A i B tačke u D. Ako je γ deo po deo glatka kriva u D, sa početkom u tački A i krajem u tački B, integral $\int\limits_{\gamma} Pdx + Qdy$, u opštem slučaju, zavisi od krive γ. Na primer, ako je $D = \mathbb{R}^2$, $P = y$, $Q = 0$, $A = (1,0)$, $B = (-1,0)$,

$\gamma_1 = \{(t,0) : 1 \geq t \geq -1\}$ i $\gamma_2 = \{(\cos t, \sin t) : 0 \leq t \leq \pi\}$, tada je $\int\limits_\gamma Pdx + Qdy = \int\limits_\gamma ydx$ i $\int\limits_{\gamma_1} ydx = 0 \neq -\pi/2 = \int\limits_{\gamma_2} ydx$.

Prirodno se postavlja pitanje koji uslovi, koje zadovoljavaju funkcije P i Q, su neophodni i dovoljni da integral $\int\limits_\gamma Pdx + Qdy$, po deo-po-deo glatkoj krivoj γ, s početkom u A i krajem u B, ne zavisi od krive γ već samo od tačaka A i B. Za prosto povezane oblasti odgovor će biti dat u sledećoj teoremi.

(4.7.8) Definicija. Oblast $D \subset \mathbb{R}^2$ je prosto povezana ako bilo koja oblast ograničena zatvorenom krivom u D pripada oblasti D.

(4.7.9) Teorema. Neka je D ograničena prosto povezana oblast u $\mathbb{R}^2$ i neka funkcije P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$ i $\frac{\partial Q}{\partial x}$ neprekidne u $\overline{D}$. Tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:

(i) Krivolinijski integral $\int\limits_\gamma Pdx + Qdy$, po proizvoljnoj zatvorenoj deo po deo glatkoj krivoj $\gamma \subset D$, jednak je nuli.

(ii) Krivolinijski integral $\int\limits_\gamma Pdx + Qdy$, po proizvoljnoj deo po deo glatkoj krivoj $\gamma \subset D$ čiji je početak u tački $A \in D$ i kraj u tački $B \in D$, ne zavisi od krive γ, nego samo od tačaka A i B.

(iii) Postoji funkcija $u \in C^{(1)}(D, \mathbb{R})$, takva da je $\frac{\partial u}{\partial x} = P$ i $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$.

(iv) Za svako $(x,y) \in D$ važi $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$.

Dokaz. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Neka su γ_1 i $\gamma_2$dva deo po deo glatka puta u D koji spajaju date tačke A i B u oblasti D. Označimo sa γ_2^- krivu γ_2 sa orijentacijom od B ka A. Tada je $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2^-$ zatvorena orijentisana kriva u D, pa je

$$\begin{aligned} 0 = \int\limits_\gamma Pdx + Qdy &= \int\limits_{\gamma_1} Pdx + Qdy + \int\limits_{\gamma_2^-} Pdx + Qdy \\ &= \int\limits_{\gamma_1} Pdx + Qdy - \int\limits_{\gamma_2} Pdx + Qdy, \end{aligned}$$

što znači da važi (ii).

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Neka je (x_0, y_0) fiksirana tačka u D i $(x,y) \in D$ proizvoljna tačka. S obzirom da važi (ii), sa

$$u(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(t,s)dt + Q(t,s)ds, \quad (x,y) \in D, \tag{1}$$

gde $\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}$ označava krivolinijski integral po proizvoljnoj deo po deo glatkoj krivoj $\gamma \subset D$ s početkom u (x_0, y_0) i krajem u (x, y), definisana je funkcija u D. Dokažimo da je $\frac{\partial u}{\partial x} = P$ i $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$ u D. Dokazaćemo prvu jednakost, druga se dokazuje analogno.

Skup D je otvoren, pa postoji $\delta > 0$ tako da, ako je $|h| < \delta$, tada je duž s krajevima $(x+h, y)$ i (x, y) u D . Označimo je sa γ_1. Neka je $\gamma_2 = \gamma \cup \gamma_1$. Tada je

$$u(x+h, y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x+h,y)} P(t,s)dt + Q(t,s)ds, \tag{2}$$

gde je $\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x+h,y)}$ integral po krivoj γ_2. Iz (1) i (2) nalazimo da je

$$u(x+h, y) - u(x, y) = \int\limits_{(x,y)}^{(x+h,y)} P(t,s)dt + Q(t,s)ds = \int\limits_{(x,y)}^{(x+h,y)} P(t,y)dt, \tag{3}$$

jer su ove integracije po duži γ_1.

Prema teoremi o srednjoj vrednosti, je

$$\int\limits_{(x,y)}^{(x+h,y)} P(t,y)dt = hP(x+\theta h, y), \text{ za neko } \theta \in (0,1). \tag{4}$$

Koristeći (3) i (4), kao i neprekidnost funkcije P u tački (x, y), nalazimo

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h,y) - u(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} P(x+\theta h, y) = P(x,y).$$

(iii) $\Longrightarrow$ (iv). Diferenciranjem jednakosti

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \quad \text{i} \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = Q(x,y)$$

dobijamo

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

Kako su, prema pretpostavci, $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ i $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ neprekidne funkcije u D, to je

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y \partial x} \text{ (Teorema 2.8.2)},$$

odnosno $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$.

(iv) $\Longrightarrow$ (i). Neka je γ zatvorena deo po deo glatka kriva u D. Pošto je D prosto povezana oblast, to oblast G, deo prostora $\mathbb{R}^2$ koji je ograničen krivom γ, pripada oblasti D. Funkcije P, Q, $\frac{\partial P}{\partial y}$ i $\frac{\partial Q}{\partial x}$ su neprekidne u $\overline{G}$, pa je prema Grinovoj formuli

$$\int_{\gamma} Pdx + Qdy = \iint_{G} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0.$$

Primetimo, da ako su ispunjeni uslovi Teoreme, tada je

$$\begin{aligned}\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(t,z)dt + Q(t,z)dz &= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{\partial u(t,z)}{\partial t}dt + \frac{\partial u(t,z)}{\partial z}dz \\ &= u(x,y) - u(x_0,y_0).\end{aligned}$$

(4.7.10) Primeri. (1) Funkcije $P(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ i $Q(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ispunjavaju uslove prethodne teoreme u bilo kojoj oblasti $D \subset \mathbb{R}^2$ takvoj da $(0,0) \notin \overline{D}$,jer je $\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = -xy(x^2+y^2)^{-3/2}$.

Na primer, ako γ, unija duži s krajevima $(1,0)$ i $(x,0)$ i duži s krajevima $(x,0)$ i (x,y), pripada oblasti D, tada je

$$\int_{\gamma} \frac{tdt + zdz}{\sqrt{t^2+z^2}} = \int_1^x dt + \int_0^y \frac{zdz}{\sqrt{x^2+z^2}} = x - 1 + \sqrt{x^2+y^2} - x = \sqrt{x^2+y^2} - 1.$$

Zaključujemo da ako je l bilo koja deo po deo glatka kriva u D, s početkom u $(1,0)$ i krajem $(6,8)$, tada je

$$\int_{l} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{6^2+8^2} - \sqrt{1^2+0^2} = 9.$$

(2) Funkcije $P(x,y) = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ zadovoljavaju uslove teoreme u oblasti $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : x^2+y^2 < \frac{1}{4}\}$, jer je

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}, \text{ za svako } (x,y) \in D.$$

Krivolinijski integral $I = \int\limits_{\gamma} Pdx + Qdy$, po krugu $\gamma : x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$,$a > \frac{1}{2}$, jednak je

$$I = \int_0^{2\pi} \left(\frac{-a \sin t}{a^2} (-a \sin t) + \frac{a \cos t}{a^2} a \cos t \right) dt = 2\pi.$$

Rezultat ne protivureči teoremi jer oblast D nije prosto povezana.

(4.7.11) Definicija. Oblast $V \subset \mathbb{R}^3$ je *površinski prosto povezana* ako bilo koji deo prostora $\mathbb{R}^3$, ograničen povezanom deo po deo glatkom površi u V, pripada oblasti V.

Sledeća teorema, kojom su okarakterisani krivolinijski integrali oblika $\int_\gamma Pdx + Qdy + Rdz$ koji ne zavise od puta γ, dokazuje se analogno kao i prethodna teorema, pa je navodimo bez dokaza.

(4.7.12) Teorema. Neka je $V \subset \mathbb{R}^3$ površinski prosto povezana ograničena oblast u $\mathbb{R}^3$. Ako su P, Q, R, $\frac{\partial P}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial R}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ i $\frac{\partial Q}{\partial z}$ neprekidne funkcije u $\overline{V}$, tada su sledeća tvrđenja ekvivalentna:

(i) Ako je γ zatvorena deo po deo glatka kriva u V, tada je $\int_\gamma \Omega = 0$, gde je $\Omega = Pdx + Qdy + Rdz$.

(ii) $\int_\gamma \Omega$ po deo-po-deo glatkoj krivoj $\gamma \subset V$, s početkom u tački $A \in V$ i krajem u tački $B \in V$, ne zavisi od γ, nego samo od tačaka A i B.

(iii) Postoji funkcija $u \in C^{(1)}(V, \mathbb{R})$, tako da je $\frac{\partial u}{\partial x} = P$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$, $\frac{\partial u}{\partial z} = R$, u svakoj tački oblasti V.

(iv) Za svaku tačku $M \in V$, je $\frac{\partial P(M)}{\partial y} = \frac{\partial Q(M)}{\partial x}$, $\frac{\partial Q(M)}{\partial z} = \frac{\partial R(M)}{\partial y}$ i $\frac{\partial R(M)}{\partial x} = \frac{\partial P(M)}{\partial z}$.

Pri dokazu implikacije (iv) $\Longrightarrow$ (i) koristi se Stoksova teorema umesto Grinove.

(4.7.13) Primeri. (1) Proveriti da integral $I = \int_\gamma (15x^2y + 3z^2)dx + (5x^3 - 2yz)dy + (6xz - y^2)dz$ ne zavisi od puta, a zatim ga izračunati ako je $A = (1, 0 - 2)$ početak a $B = (-1, 2, 1)$ kraj puta γ.

Rešenje.

Kako su funkcije $P(x, y, z) = 15x^2y + 3z^2$, $Q(x, y, z) = 5x^3 - 2yz$, $R = 6xz - y^2$ neprekidne zajedno sa svojim izvodima i $\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} = 15x^2 = \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x}$, $\frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z} = -2y = \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial y}$, $\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial x} = 6z = \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}$, prema Teoremi 4.7.12, integral ne zavisi od krive. Tako se integral, na primer, može izračunati po krivoj γ, koja se satoji redom od duži AC, CD, DB, gde je $C = (-1, 0, -2)$, $D = (-1, 2, -2)$. Neposredno se dobija $\int\limits_{AC} = \int\limits_1^{-1} P(x, 0, -2)dx =$

-24, $\int\limits_{CD} = \int\limits_{0}^{2} Q(-1, y, -2)dy = -2$, $\int\limits_{DB} = \int\limits_{-2}^{1} R(-1, 2, z)dz = -3$, pa je integral I jednak zbiru ova tri integrala, tj. $I = -29$.

(2) Izračunati krivolinijski integral

$$I = \int\limits_{M_1}^{M_2} \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

gde je tačka $M_1 = (a_1, b_1, c_1)$ na sferi $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, a tačka $M_2 = (a_2, b_2, c_2)$ na sferi $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$.

Kako funkcije $P(x, y, z) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, $Q(x, y, z) = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ i $R(x, y, z) = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ zadovoljavaju uslove prethodne teoreme u oblasti V, $(0, 0, 0) \notin \overline{V}$, to dati integral ne zavisi od krive u V po kojoj se integracija vrši. Slično, kao u Primeru 4.7.10(1), nalazimo funkciju u, takvu da je $\frac{\partial u}{\partial x} = P$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$ i $\frac{\partial u}{\partial z} = Q$. Dobija se

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int\limits_{a_1}^{x} \frac{\xi d\xi}{\sqrt{\xi^2 + b_1^2 + c_1^2}} + \int\limits_{b_1}^{y} \frac{\zeta d\zeta}{\sqrt{x^2 + \zeta^2 + c_1^2}} + \int\limits_{c_1}^{z} \frac{\eta d\eta}{\sqrt{x^2 + y^2 + \eta^2}} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}. \end{aligned}$$

Tako dobijamo $I = u(a_2, b_2, c_2) - u(a_1, b_1, c_1) = b - a$.

4.8. Zadaci

(1) Promeniti poredak integracije u integralima:

a) $\displaystyle\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)dy$ b) $\displaystyle\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y)\, dy$, $a > 0$.

(2) Izračunati dvojni integral

$$\int_a^b dx \int_{a/2}^{x/2} (x - 2y)^{-1/2} dy \qquad (b > a > 0)$$

(3) Izračunati

$$\int_D \sqrt{|y - x^2|}\, dxdy, \text{ gde je } D = \{(x, y) \in R^2 : |x| \le 1, 0 \le y \le 2\}.$$

(4) a) Odrediti Jakobijan uopštenih polarnih koordinata:

$$x = ar\cos^\alpha\theta,\ y = br\sin^\alpha\theta; \quad 0 < r < \infty, \quad 0 < \theta < 2\pi.$$

b) Izračunati površinu petlje: $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3 = \frac{xy}{ab},\ a,b>0.$

(5) Izračunati

$$\int_G \frac{dxdy}{(x^2+4y^2)^2},$$

gde je G oblast u ravni Oxy:

$$G = \{(x,y) : 4x \le x^2+4y^2 \le 8x, x \le 2y \le 2x\}.$$

(6) U uv-ravni dat je četvorougao s temenima $A(1,1)$, $B(2,1)$, $C(2,3)$, $D(1,3)$. Preslikavanje uv-ravni u xy-ravan dato je jednačinama (1): $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$.

1° Naći sliku četvorougla $ABCD$ u xy-ravni.

2° Izračunati integral $\int_D xy\,dxdy$, koristeći smenu (1), gde je $D = \{(x,y) \in R^2 : x^2+y^2 \le 1\}$.

(7) Izračunati

$$\int_{x^2+y^2\le 4} sgn\,(x^2-y^2+2)dxdy.$$

(8) Naći površinu oblasti ograničenu krivama: $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $y = x$, $y = 2x$, $x > 0$, $y > 0$.

(9) Izračunati

$$\int_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz,$$

gde je D unutrašnjost sfere $x^2+y^2+z^2-z=0$.

(10) Izračunati

$$\int_D |\cos(x+y+z)|\,dxdydz, \text{ ako je } D = [0,\pi/2]^3.$$

(11) a) Izračunati zapreminu oblasti D koja se nalazi između površi: $z = x^2-2x+2y^2+4y-2$ i $z = 4x^2-2x+5y^2+4y-14$.

b) Izračunati $\int_D (4x^2+y^3-1)\,dxdydz$.

(12) a) Odrediti Jakobijan uopštenih sfernih koordinata:

$$x = ar\sin^\alpha\varphi\cos^\beta\theta,\ y = br\sin^\alpha\varphi\sin^\beta\theta,\ z = cr\cos^\alpha\varphi;$$

$0 < r < \infty$, $0 < \theta < 2\pi$, $0 < \varphi < \pi$.

b) Naći zapreminu tela ograničenog površi $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^4}{c^4} = 1$.

(13) Naći zapreminu tela ograničenog površi

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},\ a, b.c > 0.$$

(14) Izračunati zapreminu tela kojeg ograničava površ

$$\sqrt[3]{\frac{x}{a}} + \sqrt[3]{\frac{y}{b}} + \sqrt[3]{\frac{z}{c}} = 1,\ \ x, y, z > 0.$$

.

(15) Date su površi $S_1 : z = xy$, $S_2 : y = x^2$ i ravan $S_3 : x + y = 2$. Naći zapreminu tela ograničenog sa strane površima S_2 i S_3, odozgo površi S_1 i odozdo ravni $z = 0$.

(16) Izračunati zapreminu onog dela lopte $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 \leq 1$ koji iseca ravan $z = x$ i koji se nalazi iznad te ravni.

(17) Izračunati zapreminu tela ograničenog površima:

$$z = 2x^2 + 3y^2,\ 2x^2 + 3y^2 = y,\ 2x^2 + 3y^2 = 2y,\ z = 0$$

.

(18) Izračunati zapreminu tela određenog sa: $z^2 \leq x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \geq y$, $x^2 + y^2 \leq 2y$, $|x| \leq y\sqrt{3}$.

(19) Izračunati zapreminu tela

a) T: $x \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2x$, $\sqrt{y^2 + z^2} \leq x\sqrt{3}$

b) T: $0 \leq z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 \leq 2x \leq 3$.

(20) Izračunati integral $\displaystyle\int_T z\, e^{-2x^2 - y^2}\, dxdydz$, gde je

$$T = \{(x, y, z) \in R^3 : z^2 \leq 2x^2 + y^2 \leq 2z^2,\ z \geq 0\}$$

.

(21) Izračunati površinu onog dela paraboloida $x^2 + y^2 = 6z$ koji se nalazi u unutrašnjoj oblasti cilindrične površi $(x^2 + y^2)^2 = 9(x^2 - y^2)$, $x > 0$.

(22) Izračunati površinu onog dela površi $z = 1/\sqrt{x^2+y^2}$ koja se nalazi između cilindričnih površi $\Gamma_1:\ x^2+y^2=1$ i $\Gamma_2:\ x^2+y^2=\sqrt{3}$.

(23) Izračunati površinu tela omeđenog konusnom površi $\Gamma:\ z=\sqrt{x^2+y^2}$, cilindričnom površi $\Pi:\ (x^2+y^2)^2=18xy,\ x,y\geq 0$, i ravni $\alpha:\ z=0$.

(24) Izračunati dužinu luka zavojnice $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, od tačke $t=0$ do tačke $t=2\pi$ $(a,b>0)$.

(25) Izračunati $\displaystyle\int_l y^2dx+(x^2-2xy)dy$, gde je l pozitivno orjentisana granica manjeg dela kruga $K:\ x^2+y^2\leq 1$ koji je određen presekom prave $x+y=1$ i kruga K. Rezultat proveriti primenom Grinove teoreme.

(26) Izračunati $\displaystyle\int_l (y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$, gde je l najkraći luk sfere $x^2+y^2+z^2=25$ koji spaja tačke $M(3,4,0)$ i $N(0,0,5)$.

(27) Izračunati $\displaystyle\int_l (z^2-x^2)dx+(x^2-y^2)dy+(y^2-z^2)dz$, gde je $l:\ x^2+y^2=1,\ z=2$, pozitivno orijentisan krug ako se posmatra iz tačke $(0,0,3)$.

(28) Izračunati $\displaystyle\int_l (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$, gde je l luk parabole $y=x^2$ od tačke $A(-1,1)$ do tačke $B(1,1)$.

(29) Izračunati $\displaystyle\int_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$, gde je L krug: $x^2+y^2+z^2=a^2$, $y=x\tan\alpha$, $-\pi/2<\alpha<\pi/2$, pri tome je smer krive suprotan kretanju kazaljke na časovniku ako se gleda iz tačke $(1,0,0)$.

(30) Izračunati $\displaystyle\int_{S^+} \frac{x}{x^2+y^2+1}dydz+\frac{y}{x^2+y^2+1}dzdx+2zdxdy$, gde je S^+ spoljašnja strana omotača valjka $x^2+y^2\leq 1,\ |z|\leq 1$.

(31) Izračunati $\displaystyle\int_{S^+} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, gde je S^+ spojlašnja strana omotača konusa $H\geq z\geq\sqrt{x^2+y^2}$.

(32) Izračunati $\displaystyle\int_{S^+} (z^2-y^2)dydz+(x^2-y^2)dzdx+(y^2-x^2)dxdy$, gde je S^+ spoljašnja strana polusfere $x^2+y^2+z^2=R^2,\ z\geq 0$.

(33) Izračunati $\overrightarrow{v} = \operatorname{grad} f = P\overrightarrow{i}+Q\overrightarrow{j}+R\overrightarrow{k}$, gde je $f(x,y,z)=z^2+\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+1)$, a zatim naći $\displaystyle\int_{S^+} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$, ako je$S^+$ spoljašnja strana valjka $x^2+y^2\leq 1,\ |z|\leq 1$.

(34) Izračunati $\int_{S^-} xz^2\sqrt{x^2+y^2}dydz + yz^2\sqrt{x^2+y^2}dzdx - x^2y^2dxdy$, gde je S^- donja strana dela površi $z=\sqrt{x^2+y^2}$ koji se nalazi u cilindru $x^2+y^2=2x$.

(35) Izračunati $\int_\Gamma xdydz + \frac{1}{y}dzdx + zdxdy$, gde je Γ spoljašnja strana površi $\Gamma :\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1$.

(36) Izračunati $\int_{S^+}(x^3-yz)dydz+(y^3-xz)dzdx+(z^3-xy)dxdy$, gde je S^+ spoljašnja strana sfere $x^2+y^2+z^2=2z$.

(37) Date su površi $S_1 :\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ i $S_2 :\ z=\sqrt{a^2x^2+b^2y^2}$.

a) Naći $\int_{S_1^+}\frac{1}{x}dydz+\frac{1}{y}dzdx+\frac{1}{z}dxdy$, gde je S_1^+ spoljašnja strana površi S_1.

b) Naći površinu onog dela površi S_1 koji iseca površ S_2, ako je $a=b=c=1/2$.

(38) Izračunati

$$\int_C 2(x-y+z)dx - 2(x-y+z)dy + 3(x-y+z)dz,$$

gde je C pozitivno orijentisana kriva $C_1 \cup C_2$,ako se posmatra iz tačke $(0,0,4)$, pri čemu je $C_1 :\ x^2+y^2=1,\ x\geq\sqrt{3}/2,\ x+y+z=3;$ $C_2 :\ (x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2),\ x\geq\sqrt{3}/2,\ x+y+z=3.$

(39) Data su skalarna polja $f(x,y,z)=xyz$ i $g(x,y,z)=xy+yz+zx$.

1° Formirati vektorska polja $\overrightarrow{a}=\operatorname{grad} f$, $\overrightarrow{b}=\operatorname{grad} g$ i ispitati prirodu vektorskog polja $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$.

2° Izračunati $\int_C(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot d\overrightarrow{r}$, gde je C duž koja spaja tačke $O(0,0,0)$ i $B(1,2,3)$.

(40) Izračunati površinu i zapreminu tela ograničenog površima $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=2-z,\ x^2+y^2=3-z$.

(41) Date su površi $S_1 :\ x^2+y^2+z^2=2az, a>0$ i $S_2 :\ x^2+y^2=z^2$.

a) Izračunati zapremine tela koje iseca površ S_2 iz površi S_1.

b) Izračunati $\int_{S^+}xdydz+ydzdx+zdxdy$, gde je S^+ spoljašnja strana onog dela površi S_1 koja se nalazi unutar površi S_2.

(42) Izračunati:

1° $\int_l 2x^2dx+3y^2dy+z^2dz$, gde je l najkraći luk sfere $x^2+y^2+z^2=1$ koji spaja tačke $A(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0)$ i $B(0,0,1)$.

2° $\int_{\partial T^+} 2x^2dydz + 3y^2dzdx + z^2dxdy$, gde je ∂T^+ spoljašnja strana omotača tela

$$\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{2R^2 - x^2 - y^2}.$$

(43) Izračunati zapreminu i površinu tela

$$T: \ 0 \le z \le 2 - \sqrt{x^2+y^2}, \ x^2+y^2 \le 2y.$$

(44) Date su površi $\Gamma_1: \ z = 4 - x^2 - y^2$ i $\Gamma_2: \ z = x^2$.

a) Izračunati

$$\int_C (y+z)dx + x(4x^2+2y^2)dy + e^{x^2+y^2}dz$$

duž presečne krive C površi Γ_1 i Γ_2, orijentisane pozitivno ako se gleda iz tačke $(0,0,4)$.

b) Izračunati $\int_{\partial T^+}(x+z)dydz + (x+y)dzdx + (y+z)dxdz$, gde je ∂T^+ spoljašnja strana omotača tela T omeđenog površima Γ_1 i Γ_2.

(45) Izračunati

$$\int_{S^+} (x^2+y^2+yz)dydz + (2xy+xz)dzdx + xydxdy,$$

gde je S^+ spoljašnja strana površi $\Gamma: \ x^2+y^2+z^2 = x$.

(46) Date su površi $\Gamma_1: z = 3x^2+y^2$, $\Gamma_2: x^2+y^2 = y$ i $\Gamma_3: x^2+y^2 = 2y$.

a) Izračunati zapreminu tela ograničenog datim površima i ravni $z = 0$.

b) Izračunati površinu dela površi Γ_3 između površi Γ_1 i ravni $z = 0$.

(47) Izračunati

$$\int_l (2x(y^2+z^2)+yz)dx + (2y(z^2+x^2)+zx)dy + (2z(x^2+y^2)+xy)dz,$$

gde je l duž koja spaja tačke $M_1(1,0,1)$ i $M_2(-2,1.-1)$ i orijentisana je od M_1 do M_2.

(48) Izračunati

$$\int_l 2xydx + (y^2-x^2-z^2)dy + 2yzdz.$$

gde je l kriva: $x+y+z = 1$, $z = x^2+y^2$, pozitivno orijentisana ako se gleda iz tačke $(0,0,2)$.

(49) Data je površ $\Gamma:\ x+y^2+z=4,\ x,y,z\geq 0$. Izračunati $\int_l xdx+ydy+zdz$, gde je l rub površi Γ, orijentisan pozitivno ako se gleda iz tačke $(100,0,0)$. Proveriti dobijeni rezultat primenom Stoksove teoreme.

(50) Date su površi $S_1:\ x^2+y^2=-3z$ i $S_2:\ x^2+y^2-4z^2+1=0$.

a) Izračunati površinu ograničenog dela paraboloida S_1 koji hiperboloid S_2 iseca od S_1.

b) Izračunati $\int_l y^3dx+x^3dy-z^3dz$, gde je l kriva kojoj se seku površi S_1 i S_2, orijentisana pozitivno ako se gleda iz tačke $O(0,0,0)$.

(51) Izračunati:

a)

$$\int_l 4xy^2dx+x^2ydy+z^3/3dz,$$

gde je l kriva $x^2+4y^2+z^2-4z=0,\ x^2+4y^2=z^2/3$ orijentisana pozitivno kada se gleda iz tačke $(0,0,5)$.

b)

$$\int_{\partial T^+} 4xy^2dydz+x^2ydzdx+z^3/3dxdy,$$

gde je ∂T^+ spoljašnja strana omotača tela $T:\ x^2+4y^2+z^2\leq 4z,\ x^2+4y^2\leq z^2/3$.

(52) Date su površi $\Gamma_1:\ x^2+y^2=5-2z$ i $\Gamma_2:\ x^2+y^2=2z+1$.Neka je telo T omeđeno površima Γ_1 i Γ_2.

a) Izračunati

$$\int_{\partial T^+}(2x-y)dydz+(3y+z)dzdx+(x-2z)dzdx,$$

gde je ∂T^+ spoljašnja strana omotača tela T.

b) Izračunati površinu zajedničkog dela površi Γ_2 i ∂T.