dok su svi minori reda $k+1$ jednaki nuli. Nezavisnost funkcija $f_1, \ldots, f_k$ sledi na osnovu dokazanog dela 1° teoreme, a iz dokaza Teoreme o rangu sledi

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = g_i(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n)), \quad i = k+1, \ldots, m,$$

gde su $g_i(y_1, \ldots .y_k)$ glatke funkcije u nekoj okolini tačke $(f_1(x_0), \ldots, f_k(x_0))$.

3.8. Površi u $\mathbb{R}^n$

(3.8.1) Definicija. Površ dimenzije k, $1 \leq k \leq n$, (ili mnogostrukost dimenzije k) u $\mathbb{R}^n$ je bilo koji skup $S \subset \mathbb{R}^n$ koji ima svojstvo: za svaku tačku $x_0 \in S$ postoji kugla $B[x_0, r)$ tako da je skup $B_S(x_0) = S \cap B[x_o, r)$ homeomorfan otvorenom jediničnom intervalu $I_k = \{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k : 0 < x_i < 1,\, i = 1, 2, \ldots, k\}$, tj. postoji preslikavanje $\psi : I_k \to B_S(x_0)$ koje je homeomorfizam.

Ako je $U(x_0)$ okolina tačke $x_0 \in S$, tada smo skup $U_S(x_0)$ nazvali okolinom tačke x_0 u S. Par $(U_S(x_0), \psi)$, gde je $\psi : I_k \mapsto U_S(x_0)$ homeomorfizam, naziva se *lokalnom kartom* površi S. Upotrebljavaćemo naziv lokalna karta i za okolinu $U_S(x_0)$. Homeomorfizam $\psi : I_k \mapsto U_S(x_0)$ naziva se *parametrizacijom lokalne karte* $U_S(x_0)$.

U gornjoj definiciji, otvoreni interval I_k može se zameniti bilo kojim njemu homeomorfnim skupom u $\mathbb{R}^k$, a da se klasa mnogostrukosti ne promeni. Ako je parametrizacija $\psi : I_k \to B_S(x_0)$, definisana sa $I_k \ni (t_1, \ldots, t_k) \longrightarrow x = \psi(t) \in B_S(x_0)$, koordinate $(t_1, \ldots, t_k)$ nazivaju se krivolinijskim (ili lokalnim) koordinatama na karti $B_S(x_0)$.

(3.8.2) Definicija. Familija karata $\{B_S(x_i), \psi_i\}$ na površi S, takva da je $\cup_i B_S(x_i) = S$, naziva se *atlas površi S*.

(3.8.3) Definicija. Površ S *je elementarna* ako se njen atlas sastoji od jedne karte, dakle, ako postoji homeomorfizam $\psi : I_k \mapsto S$.

(3.8.4) Definicija. Skup $S \subset \mathbb{R}^n$ je *površ dimenzije k klase m* (*glatka površ dimenzije k* ako je $m = 1$) ako za svaku tačku $x_0 \in S$ postoji okolina $B_S(x_0)$ u S i preslikavanje $\psi : I_k \overset{na}{\to} B_S(x_0)$, otvorenog jediničnog intervala I_k na $B_S(x_0)$, klase m, koje ima rang k u svakoj tački skupa I_k.

Dokažimo da je u tom slučaju preslikavanje lokalno homeomorfno, tj. za svaku tačku $t_0 \in I_k$ postoji okolina $O(t_0)$ takva da je $\psi : O(t_0) \to \psi(O(t_0))$ homeomorfizam; što znači da je ψ parametrizacija okoline $\psi(O(t_0))$.

Neka su

$$\begin{gathered} x_1 = \psi_1(t_1, \ldots, t_k) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \psi_n(t_1, \ldots, t_k) \end{gathered}$$

koordinatne funkcije preslikavanja ψ, i neka je, na primer,

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial t_1} & \dots & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial t_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial\psi_k}{\partial t_1} & \dots & \dfrac{\partial\psi_k}{\partial t_k} \end{vmatrix}(t) \neq 0,$$

za svako t koje pripada nekoj okolini tačke t_0.

Neka je

$$x^{'} = (x_1, \dots, x_k) = (\psi_1(t_1, \dots, t_k), \dots, \psi_k(t_1, \dots, t_k)) = \varphi(t).$$

Prema Teoremi o inverznoj funkciji, postoje okoline $O(t_0)$ i $O(\varphi(t_0))$ tačaka t_0 i $\varphi(t_0)$ tako da je $\varphi : O(t_0) \to O(\varphi(t_0))$ difeomorfizam klase $m.$ Neka je $t = \varphi^{-1}(x^{'})$ inverzno preslikavanje.

Neka je

$$x^{''} = (x_{k+1}, \dots, x_n) = (\psi_{k+1}(t), \dots, \psi_n(t)) = \bar{\psi}(t).$$

Imamo da je $x^{''} = \bar{\psi} \circ \varphi^{-1}(x^{'})$, za $x^{'} \in O(\varphi(t_0))$. Znači da je skup $\psi(O(t_0)) = \{\, (x^{'}, x^{''}) = (x^{'}, \bar{\psi}\circ\varphi^{-1}(x^{'})) : x^{'} \in O(\varphi(t_0)) \,\}$, pa je preslikavanje $\psi : O(t_0) \to \psi(O(t_0))$ homeomorfizam. $\square$

Neka je $F = (F_1, \dots, F_m), 1 \leq m < n,$ glatka vektorska funkcija definisana u otvorenom skupu $A \subset R^n$, sa vrednostima u R^m i neka je neprazan skup $S \subset A$ definisan sistemom

$$\begin{aligned} F_1(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ F_m(x_1, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

tj. sa $F(x) = 0$. Ako je u svakoj tački $x_0 \in S$ rang preslikavanja F jednak m, tada je S površ dimenzije $n - m$.

Neka je, na primer,

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_{n-m+1}} & \dots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_{n-m+1}} & \dots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{vmatrix}(x_0) \neq 0, \quad x_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in S.$$

Prema Teoremi 3.3.1 (o implicitno datoj funkciji), postoji okolina $O = O(x_1^0, \ldots, x_{n-m}^0)$ tačke $(x_1^0, \ldots, x_{n-m}^0)$ i funkcije $\psi_{n-m+1}, \ldots, \psi_n$ klase C^1 u O, takve da je

$$
\begin{gathered}
F_1(x_1, \ldots, x_{n-m}, \psi_{n-m+1}(x_1, \ldots, x_{n-m}), \ldots, \psi_n(x_1, \ldots, x_{n-m})) = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
F_m(x_1, \ldots, x_{n-m}, \psi_{n-m+1}(x_1, \ldots, x_{n-m}), \ldots, \psi_n(x_1, \ldots, x_{n-m})) = 0,
\end{gathered}
$$

za $(x_1, \ldots, x_{n-m}) \in O$.
To znači da preslikavanje $\psi : O \to \mathbb{R}^n$ definisano sa

$$
\begin{aligned}
x_1 &= t_1 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{n-m} &= t_{n-m} \\
x_{n-m+1} &= \psi_{n-m+1}(t_1, \ldots, t_{n-m}) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n &= \psi_n(t_1, \ldots, t_{n-m})
\end{aligned}
$$

je glatko preslikavanje skupa O na skup $\psi(O) \subset S$ koje ima rang $n - m$ u svakoj tački skupa O.

(3.8.5) Primeri. (1) Nosač puta, definisanog sa

$$\Gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)), \quad t \in I = (0, 1),$$

gde su $x_i \in C^{(1)}(I, \mathbb{R})$, $i = 1, \ldots, n$, i u svakoj tački t, $\Gamma'(t) \neq 0$, je glatka jednodimenzionalna mnogostrukost. Obično, takva mnogostrukost naziva se glatka kriva.

(2) Nosač puta $\Gamma(t) = (t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$, nije glatka kriva jer je $\operatorname{rang} \Gamma'(0) = 0$.

(3) Graf funkcije $x_n = f(x_1, \ldots, x_{n-1})$, gde $f \in C^{(1)}(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R})$ je $n - 1$ dimenzionalna glatka površ u $\mathbb{R}^n$. U slučaju $n = 3$, dvodimenzionalna glatka površ obično se naziva glatka površ.

(4) Neka je $U \subset R^k$ otvoren skup i $\psi : U \to R^m$ glatka funkcija. Tada je grafik m-vektorske funkcije k promenljivih

$$\Gamma_\psi = \Gamma_\psi(U) = \{\, (\xi, \psi(\xi)) : \quad \xi \in U \,\}$$

glatka k-dimenzionalna površ.

3.9. Tangentni prostor

Ako je $x = x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, $t \in \mathbb{R}$, parametrizacija elementarne glatke krive l, tada je

$$x(t) - x(0) = x'(0)t + o(t), \quad \text{kad} \quad t \to 0.$$

Prava $x - x(0) = x'(0)t$ naziva se *tangenta krive l u tački $x(0)$*.

Neka je sa $x_3 = x_3(x_1, x_2)$ definisana glatka površ S u $\mathbb{R}^3$ (Primer 3.8.5(3)), pri čemu $(x_1, x_2) \in D$, gde je D oblast u $\mathbb{R}^2$. Neka $(x_1^0, x_2^0) \in D$. Tada je

$$\begin{aligned} x_3(x_1, x_2) - x_3(x_1^0, x_2^0) = {} & \frac{\partial x_3(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^0) + \frac{\partial x_3(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^0) \\ & + o(\sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2}, \quad \begin{matrix} x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0 \end{matrix} \end{aligned}$$

Ravan

$$x_3 - x_3(x_1^0, x_2^0) = \frac{\partial x_3(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^0) + \frac{\partial x_3(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^0)$$

naziva se *tangentna ravan površi S u tački* $(x_1^0, x_2^0, x_3(x_1^0, x_2^0))$.

Površ S može se definisati i sa:

$$(t_1, t_2) \to x(t_1, t_2) = (x_1(t_1, t_2), x_2(t_1, t_2), x_3(t_1, t_2)),$$

gde je

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + t_1 \\ x_2 &= x_2^0 + t_2 \\ x_3 &= x_3(x_1^0 + t_1, x_2^0 + t_2). \end{aligned}$$

Jakobijeva matrica ovog preslikavanja, u nuli, je

$$x'(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \dfrac{\partial x_3(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial x_3(x_1^0, x_2^0)}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

i jednačina tangentne ravni može se napisati u obliku

$$x - x(0) = x'(0) \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} .$$

Prethodna dva primera mogu da posluže kao motiv da se definiše tangentni prostor površi dimenzije k, koji se u specijalnim slučajevima, napred navedenim, svodi na tangentu glatke krive odnosno tangentnu ravan glatke površi.

(3.9.1) Definicija. Neka je $x = x(t)$, $t \in \mathbb{R}^k$, parametrizacija glatke mnogostrukosti S dimenzije k u nekoj okolini tačke $x(0) = x_0$. *Tangentni prostor glatke mnogostrukosti S u tački $x(0)$*, u oznaci TS_{x_0} (ili $T_{x_0}S$), definiše se sa

$$x - x(0) = x'(0)\begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_k \end{bmatrix}.$$

Ako su $x_1 = x_1(t_1, \ldots, t_k), \ldots, x_n = x_n(t_1, \ldots, t_k)$ koordinatna preslikavanja funkcije $x = x(t)$, tada je TS_{x_0} definisan sa

$$\begin{array}{c} x_1 - x_1(0) = \dfrac{\partial x_1(0)}{\partial t_1} t_1 + \cdots + \dfrac{\partial x_1(0)}{\partial t_k} t_k \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n - x_n(0) = \dfrac{\partial x_n(0)}{\partial t_1} t_1 + \cdots + \dfrac{\partial x_n(0)}{\partial t_k} t_k. \end{array}$$

Neka je glatka površ S dimenzije k definisana sistemom (1) (odeljak 3.8) i neka je u nekoj okolini tačke $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_{n-m}^0, x_{n-m+1}^0, \ldots, x_n^0) \in S$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_{n-m+1}} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_{n-m+1}} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{vmatrix}(x) \neq 0.$$

Tada postoje okoline O_1 i O_2 tačaka

$$x_{01} = (x_1^0, \ldots, x_{n-m}^0) \quad \text{i} \quad x_{02} = (x_{n-m+1}^0, \ldots, x_n^0)$$

i glatko preslikavanje

$$\begin{array}{c} x_{n-m+1} = \varphi_{n-m+1}(x_1, \ldots, x_{n-m}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = \varphi_n(x_1, \ldots, x_{n-m}) \end{array} \tag{1}$$

okoline O_1 na okolinu O_2 tako da je

$$\begin{array}{c} F_1(x_1, \ldots, x_{n-m}, \varphi_{n-m+1}(x_1, \ldots, x_{n-m}), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_{n-m})) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_m(x_1, \ldots, x_{n-m}, \varphi_{n-m+1}(x_1, \ldots, x_{n-m}), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_{n-m})) = 0 \end{array}$$

za svaku tačku $(x_1,\dots,x_{n-m})\in O_1$.

Dakle (1) je parametrizacija neke okoline tačke x_0 površi S. Stoga, tangentni prostor TS_{x_0} definisan je sa

$$
\begin{aligned}
x_{n-m+1}-x^0_{n-m+1} = {} & \frac{\partial\varphi_{n-m+1}(x_{01})}{\partial x_1}(x_1-x_1^0)+\cdots+\\
& \frac{\partial\varphi_{n-m+1}(x_{01})}{\partial x_{n-m}}(x_{n-m}-x^0_{n-m})\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_n-x_n^0 = {} & \frac{\partial\varphi_n(x_{01})}{\partial x_1}(x_1-x_1^0)+\cdots+\\
& \frac{\partial\varphi_n(x_{01})}{\partial x_{n-m}}(x_{n-m}-x^0_{n-m}).
\end{aligned}
$$

Kako je, na osnovu Teoreme 3.3.1 ,

$$
\begin{bmatrix}
\dfrac{\partial F_1(x_0)}{\partial x_{n-m+1}} & \cdots & \dfrac{\partial F_1(x_0)}{\partial x_n}\\
\vdots & \vdots & \vdots\\
\dfrac{\partial F_m(x_0)}{\partial x_{n-m+1}} & \cdots & \dfrac{\partial F_m(x_0)}{\partial x_n}
\end{bmatrix}
\cdot
\begin{bmatrix}
\dfrac{\partial\varphi_{n-m+1}(x_{01})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_{n-m+1}(x_{01})}{\partial x_{n-m}}\\
\vdots & \vdots & \vdots\\
\dfrac{\partial\varphi_n(x_{01})}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_n(x_{01})}{\partial x_{n-m}}
\end{bmatrix}
$$

$$
+\begin{bmatrix}
\dfrac{\partial F_1(x_0)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1(x_0)}{\partial x_{n-m}}\\
\vdots & \vdots & \vdots\\
\dfrac{\partial F_m(x_0)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m(x_0)}{\partial x_{n-m}}
\end{bmatrix}=0,
$$

to je tangentni prostor TS_{x_0} definisan sa

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F_1(x_0)}{\partial x_1}(x_1-x_1^0)+\cdots+\frac{\partial F_1(x_0)}{\partial x_n}(x_n-x_n^0)&=0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\\
\frac{\partial F_m(x_0)}{\partial x_1}(x_1-x_1^0)+\cdots+\frac{\partial F_m(x_0)}{\partial x_n}(x_n-x_n^0)&=0.
\end{aligned}
$$

Dokažimo da se tangentni prostor TS_{x_0} $n-m$-dimenzione mnogostrukosti S sastoji od tangenata glatkih krivih u S u tački x_0.

Neka je površ S u okolini tačke $x_0\in S$ definisana sistemom (1) (odeljak 3.8) koji možemo kraće zapisati: $F(x)=0$, gde je $F=(F_1,\dots,F_m)$, $x=(x_1,\dots,x_n)$. Dalje, neka je $\Gamma: I\to S$ proizvoljni glatki put čiji je nosač u S, gde je $I=(-1,1)$ i neka je $\Gamma(0)=x_0$. Dakle, pretpostavljamo da je

$$F(\Gamma(t))=0,\quad t\in I.$$

Diferenciranjem nalazimo

$$F'_x(\Gamma(t)) \cdot \Gamma'(t) = 0$$

specijalno, za $t = 0$, dobijamo

$$F'_x(x_0) \cdot \Gamma'(0) = 0$$

što znači da tangenta glatke krive $\Gamma(I)$ u tački x_0 pripada TS_{x_0}.

Obrnuto, neka je $F'_x(x_0) \cdot \xi = 0$, gde je $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Neka je sa

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_1^0 + \xi_1 t \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{n-m} &= x_{n-m}^0 + \xi_{n-m} t \\
x_{n-m+1} &= \varphi_{n-m+1}(x_1^0 + \xi_1 t, \ldots, x_{n-m}^0 + \xi_{n-m} t) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n &= \varphi_n(x_1^0 + \xi_1 t, \ldots, x_{n-m}^0 + \xi_{n-m} t)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

definisana glatka kriva koja pripada površi S; dakle važi

$$
\begin{aligned}
&F_1(x_1^0 + \xi_1 t, \ldots, x_{n-m}^0 + \xi_{n-m} t, \varphi_{n-m+1}(x_1^0 + \xi_1 t, \ldots, x_{n-m}^0 + \xi_{n-m} t), \ldots, \\
&\varphi_n(x_1^0 + \xi_1 t, \ldots, x_{n-m}^0 + \xi_{n-m} t)) = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&F_m(x_1^0 + \xi_1 t, \ldots, x_{n-m}^0 + \xi_{n-m} t, \varphi_{n-m+1}(x_1^0 + \xi_1 t, \ldots, x_{n-m}^0 + \xi_{n-m} t), \ldots, \\
&\varphi_n(x_1^0 + \xi_1 t, \ldots, x_{n-m}^0 + \xi_{n-m} t)) = 0.
\end{aligned}
$$

Diferenciranjem nalazimo

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F_1(x_0)}{\partial x_1}\xi_1 + \cdots + \frac{\partial F_1(x_0)}{\partial x_{n-m}}\xi_{n-m} + \\
&\frac{\partial F_1(x_0)}{\partial x_{n-m+1}}\overline{\xi_{n-m+1}} + \cdots + \frac{\partial F_1(x_0)}{\partial x_n}\overline{\xi_n} = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\frac{\partial F_m(x_0)}{\partial x_1}\xi_1 + . + \frac{\partial F_m(x_0)}{\partial x_{n-m}}\xi_{n-m} + \\
&\frac{\partial F_m(x_0)}{\partial x_{n-m+1}}\overline{\xi_{n-m+1}} + . + \frac{\partial F_m(x_0)}{\partial x_n}\overline{\xi_n} = 0,
\end{aligned}
$$

gde je $\overline{\xi_j} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-m} \frac{\partial \varphi_j(x_{01})}{\partial x_i}\xi_i$, $j = n-m+1, \ldots, n$. Dakle, ako definišemo $\overline{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-m}, \overline{\xi_{n-m+1}}, \ldots \overline{\xi_n})$, na osnovu prethodnih jednakosti zaključujemo da je $\overline{\xi}$ vektor pravca tangente na krivu (2) u tački x_0. Dakle $F'_x(x_0) \cdot \xi = 0$ i $F'_x(x_0) \cdot \overline{\xi} = 0$. Kako je

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1(x_0)}{\partial x_{n-m+1}} & \cdots & \dfrac{\partial F_1(x_0)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m(x_0)}{\partial x_{n-m+1}} & \cdots & \dfrac{\partial F_m(x_0)}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0,$$

zaključujemo da je $\xi = \overline{\xi}$. $\square$

3.10. Uslovni ekstremum

(3.10.1) Primer. Posmatrajmo funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definisanu sa $f(x,y) = x^2 + 4y^2$. Odredimo najmanju vrednost funkcije pod uslovom da je $x + 2y = 2$. Iz $y = 1 - x/2$ sledi da je $f(x, 1 - x/2) = 2x^2 - 4x + 4$. Minimalna vrednost dobijenog izraza je 2 i postignuta je za $x = 1$ ($y = 1/2$). Primetimo da sama funkcija f ima u svakoj okolini tačke $(1, 1/2)$ i vrednosti manjih od 2; inače njena najmanja vrednost na $\mathbb{R}^2$ je 0.

Razmatrani problem je specijalan slučaj jednog opštijeg problema.

Neka je data funkcija $f : A \to \mathbb{R}$, definisana na otvorenom skupu $A \subset \mathbb{R}^n$. Ponekad se, umesto ekstremnih vrednosti na skupu A, traži da se odrede ekstremne vrednosti restrikcije $f|_S$ funkcije f sa skupa A na skup $S \subset A$, takozvane uslovne ekstremne vrednosti. Najčešće skup S je $n - m$ dimenzionalna površ ($1 \leq m < n$) definisana sa

$$\begin{aligned} &\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ (1) \qquad &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\varphi_m(x_1, \ldots, x_n) = 0, \end{aligned}$$

pri čemu $\varphi_i \in C^{(1)}(A, \mathbb{R})$, $i = 1, 2 \ldots, m$ i rang $\left[\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}\right](x) = m$, za svako $x \in A$. Tada se ekstremne vrednosti $f|_S$ na skupu S zovu ekstremne vrednosti funkcije f pri uslovima (1) (otuda naziv uslovne ekstremne vrednosti). Preciznije, kažemo da funkcija f ima uslovnu ekstremnu vrednost: uslovni maksimum, strogi uslovni maksimum, uslovni minimum, strogi uslovni minimum u tački $x_0 \in S$ ako postoji okolina $B_S(x_0)$ tačke x_0 u S takva da za svako $x \in B_S(x_0)$ važi $f(x) \leq f(x_0)$, odnosno $f(x) < f(x_0)$, $f(x) \geq f(x_0)$, $f(x) > f(x_0)$.

Na isti način definiše se uslovni ekstremum na skupu $S \subset A$ koji ne mora biti površ. Ako je S površ definisana jednačinama (1), prema Teoremi o implicitnoj funkciji, nekih m od promenljivih $x_1, \ldots, x_n$ iz datog sistema (1) mogu se lokalno izraziti pomoću ostalih. Na primer to mogu biti $x_1, \ldots, x_m$: