

MATEMATIČKI MODEL ELEMENATA I SAU

Klasične metode formalnog opisa linearnih sistema koje se najčešće koriste su:

**metod funkcije prenosa,
metod impulsnog odziva,
blok dijagrami,
metod teorije grafova, i mnoge druge.**

Opisivanje ovih sistema vrši se ulazno – izlaznim relacijama. Opisivanjem funkcijama prenosa, zanemaruje se postojanje početnih uslova. No i pored toga funkcije prenosa pogodne su za analizu u frekventnom domenu i za analizu stabilnosti sistema.

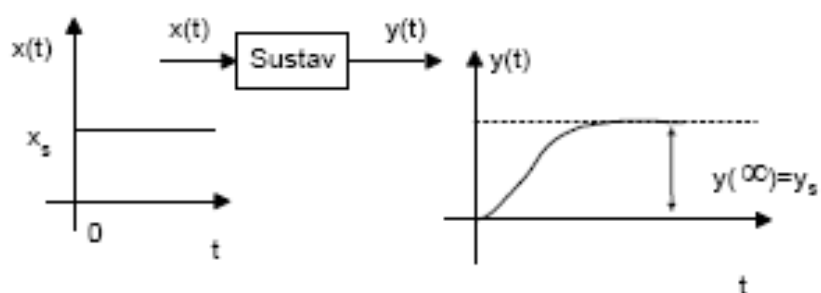
Alternativni metod opisivanja linearnih, nelinearnih i nestacionarnih sistema je metod prostora stanja.

- Identifikacija objekta upravljanja ili sistema upravljanja znači rješavanje problema izgradnje matematičkog modela dinamičkih sistema bazirano na razmatranjima podataka o i iz sistema.
- Modeli mogu biti više ili manje formalne prirode, ali njihova osnovna karakteristika je da oni omogućavaju da se opservacije o njima organizuju i strukturiraju u neki skup podataka u vidu parametara ili stanja sistema.
- Cilj je da se iznesu osnovne metode i alati identifikacije objekta / procesa upravljanja kako bi se objekat upravljanja identifikovao (struktura, parametri, varijable stanja...), a za potrebe projektovanja SAU.

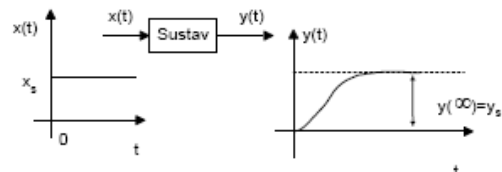
- Kada se identifikuje objekat upravljanja, njemu se pridružuju odgovarajući senzori i mjerni pretvarači varijabli stanja i smetnji i biraju se odgovarajući izvršni organi i aktuatori za promjenu upravljanih veličina.
- Upravljačka struktura se onda projektuje i sintetizuje tako da se zadovolje određene tehničke specifikacije i funkcionalne karakteristike.

- Jednom kada se identifikuje objekat upravljanja odaberu se senzori i aktuatori, jedini stepen slobode koji ostaje da se poprave performanse SAU, je na upravljačkoj strukturi ili regulatoru.

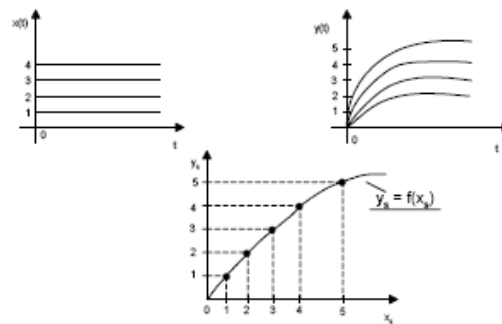
STATIČKE KARAKTERISTIKE



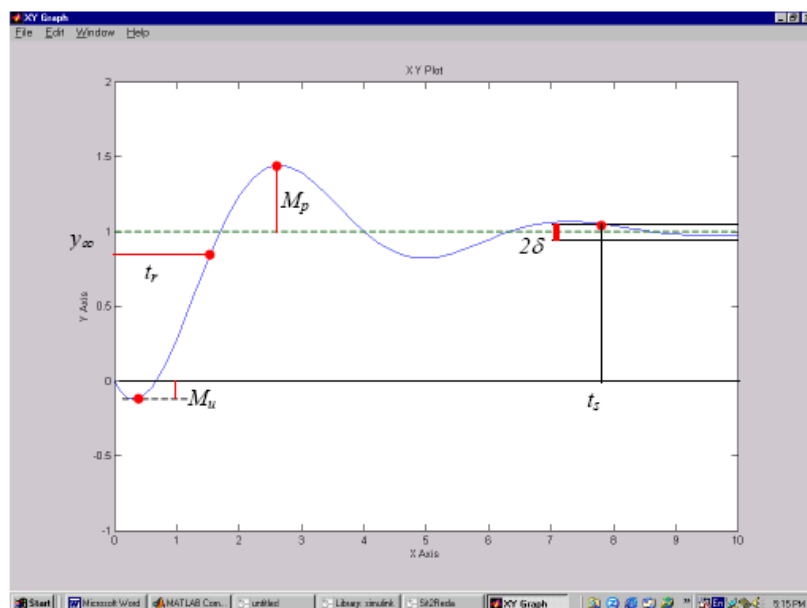
STATIČKE KARAKTERISTIKE



Za različite vrijednosti $x_s = \text{konst.}$ imamo:



DINAMIČKE KARAKTERISTIKE



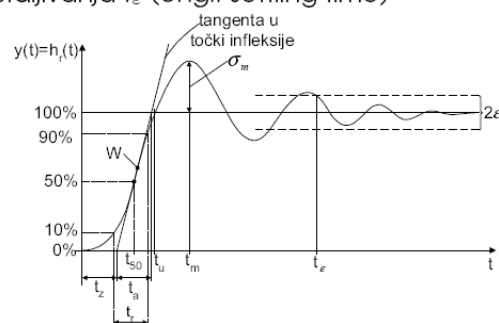
Vrijeme uspona t_r je ono vrijeme koje protekne dok odskočni odziv prvi put dostigne vrijednost $k_r y_\infty$, gdje k_r varira između 0.9 i 1.

Preskok (eng. overshoot) M_p je maksimalna trenutna vrijednost za koju odskočni odziv prelazi svoju konačnu vrijednost.

Podbačaj (eng. undershoot) M_u je maksimalna (apsolutna) vrijednost za koju odskočni odziv pada ispod nule (za koju se odskočni odziv mijenja u suprotnu stranu od $y(\infty)$).

Vrijeme smirenja t_s je vrijeme potrebno da odskočni odziv uđe i ostane u granicama $\pm \delta$ oko svoje konačne vrijednosti. Ova devijacija δ se često izražava u postocima od konačne vrijednosti (naprimjer, 1% do 5%).

- Za opis prijelazne funkcije $h_r(t)$ koriste se sljedeći pojmovi (neposredni pokazatelji kvalitete):
 - maksimalno nadvišenje σ_m (engl. peak, overshoot)
 - vrijeme prvog maksimuma t_m (engl. time to maximum overshoot)
 - vrijeme porasta t_r (engl. rise time)
 - vrijeme ustaljivanja t_ε (engl. settling time)



- ANALIZA I SINTEZA SAU
- Pod analizom SAU podrazumijeva se postupak s kojim se određuju njegove bitne karakteristike ponašanja.
- Analizom se dolazi do odgovarajućih zaključaka u pogledu ponašanja sistema u stacionarnom i prelaznom režimu, te se na taj način utvrđuje da li je dinamičko ponašanje zadovoljavajuće ili nije.

- Pod sintezom (ili projektovanjem) SAU podrazumijeva se postupak ostvarivanja takvih dinamičkih i statičkih karakteristika sistema, koje pri zadatim ograničenjima na najbolji mogući način odgovaraju postavljenim zahtevima.
- Uvijek se teži da se postavljeni cilj kod sinteze realizuje na najjednostavniji način.

Svrha matematičkog modela (1)

- Matematički modeli su matematički objekti koji se koriste za opis raznorodnih procesa (sistema) čija se stanja vremenom mijenjaju

Primjeri matematičkih modela:

- modeli tehničkih sistema
- modeli za finansijska i ekonomska predviđanja
- modeli za medicinske dijagnoze
- ...

Glavna svrha modeliranja u automatici je:

- analiza sistema upravljanja
- sinteza sistema upravljanja

Za uspješno projektovanje sistema upravljanja (regulatora) i njegovu analizu i sintezu neophodno je dobro poznavanje ponašanja procesa kao dinamičkih sistema

• Ponašanje procesa matematički se izražava matematičkim modelom:

• **stacioniranim** - opisuje ponašanje sistema u stacionarnom (ustaljenom, ravnoteženom) stanju

• **dinamičkim** - opisuje ponašanje sistema pri prelazu iz jednog stanja u drugo stanje, tj. pri prelazu iz jedne radne tačke u drugu; brzina prelaza zavisi od karakteristika sistema (broju i veličini skladišta energije) i od pobudnog signala koji djeluje na ulaz procesa

• Matematički modeli procesa (čest je sinonim: proces = sistem) mogu imati i širu primjenu, npr.:

• obuka operatera za vođenje složenih postrojenja (nuklearnih elektrana, brodova, letjelica) za što se koriste trenažeri zasnovani na matematičkim modelima procesa u postrojenjima

• nadzor i dijagnostika postrojenja i procesa (monitoring); monitoring je često sastavni dio savremenih rješenja sistema automatizacije složenih postrojenja i procesa

Nadalje, matematički modeli sistema mogu poslužiti i za:

- simulaciju hipotetičkih situacija u koje bi stvarni sistem bilo opasno dovesti ("eksperimentisanje" na matematičkom modelu, umjesto na stvarnom sistemu); matematički model je "surogat stvarnog sistema “
- predikciju (predviđanje) budućih stanja sistema (npr. sistema iz ekonomske sfere)

Dva pristupa posmatranju sistema

Ponašanje sistema može se posmatrati kroz dva pristupa:

- **pristup koji posmatra unutrašnje djelovanje sistema**
- **pristup koji posmatra sistem spolja**

- Matematički modeli zasnovani na prvom pristupu nazivaju se unutrašnjim modelima, modelima stanja ili modelima bijele kutije (**engl. white box**)

- u ovu kategoriju spadaju modeli prikazani pomoću diferencijalnih jednačina i modeli prikazani u prostoru stanja, dakle modeli u vremenskom području

- ovi modeli predstavljaju nasljeđe iz mehanike, povezano sa Johannesom Keplerom i Isaacom Newtonom

Dva pristupa posmatranju sistema

Ponašanje sistema može se posmatrati kroz dva pristupa:

- pristup koji posmatra unutrašnje djelovanje sistema
 - pristup koji posmatra sistem spolja
- Matematički modeli zasnovani na drugom pristupu nazivaju se spoljašnjim modelima, ulazno-izlaznim modelima ili modelima crne kutije (**engl. black box**)
 - u ovu kategoriju spadaju modeli prikazani pomoću prenosnih funkcija i modeli prikazani pomoću frekvencijskih karakteristika, dakle modeli u području kompleksne promjenljive odnosno u frekvencijskom području
 - ovi modeli predstavljaju nasleđe iz elektrotehnike

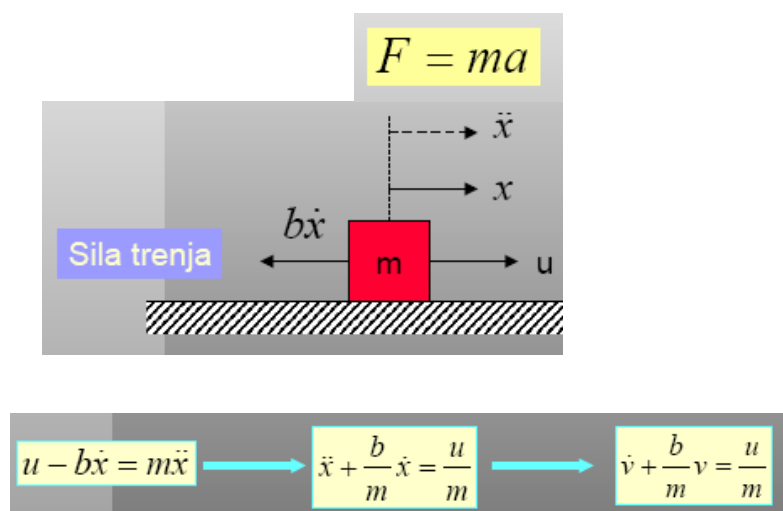
Složenost matematičkog modela

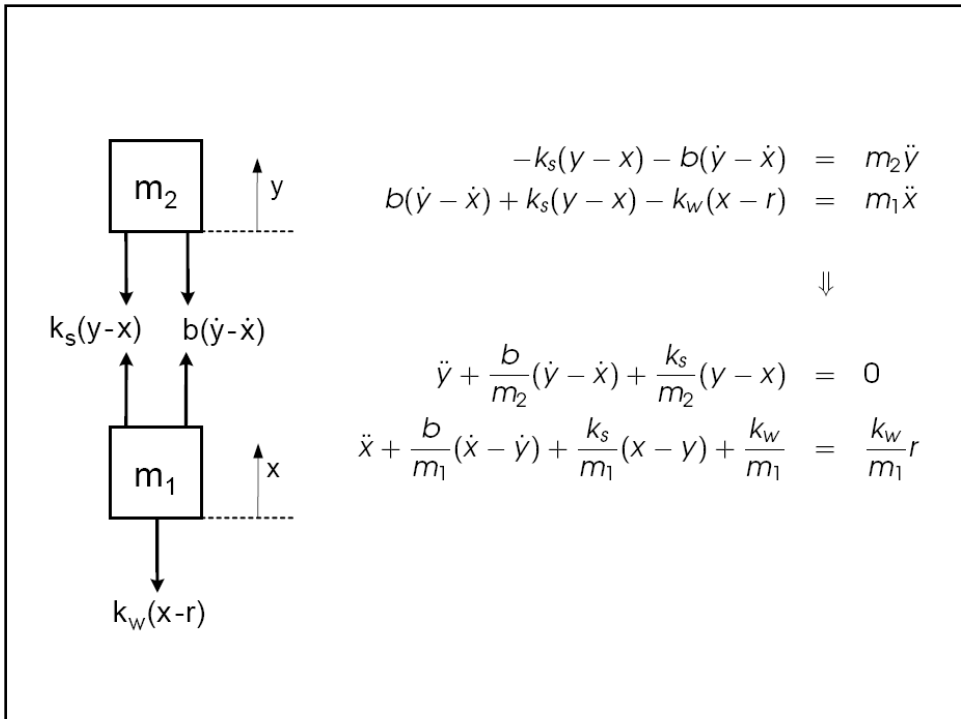
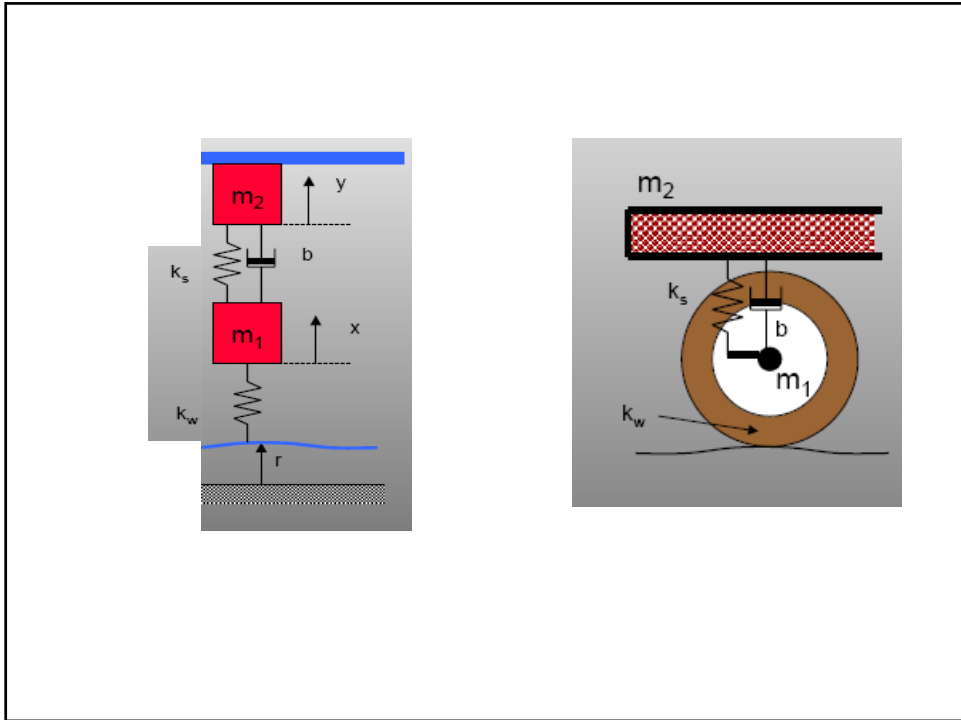
- Složenost matematičkog modela procesa zavisi od svrhe matematičkog modela
- Matematički modeli koji se koriste u svrhu sinteze i analize sistema upravljanja u pravilu su jednostavnije strukture (opisuju dominantna stanja sistema, a pri tome se zanemaruju nedominantna stanja sistema - govorimo o nemodeliranoj dinamici sistema)
- Dakle, iz praktičnih razloga koriste se jednostavniji (redukovani) modeli procesa u svrhe analize i sinteze sistema upravljanja
- Modeli koji se koriste u svrhu simulacijskih istraživanja samih procesa u pravilu su složenije strukture
- Takođe su složeniji modeli koji se koriste u svrhu monitoringa

Modeliranje pomoću diferencijalnih jednačina

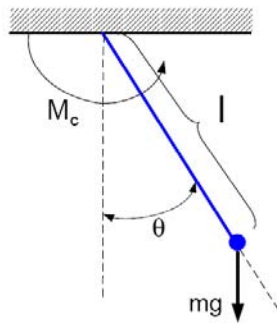
- **Linearni sistemi s koncentrisanim parametrima** modeliraju se pomoću običnih **linearnih diferencijalnih jednačina**
- **Sistemi s raspodijeljenim parametrima** modeliraju se pomoću **parcijalnih diferencijalnih jednačina** (koje mogu biti linearne ili nelinearne, zavisno od toga da li je sistem linearan ili nelinearan)
- **Fizički zakoni** su polazište pri postavljanju matematičkog modela procesa (dinamičkog modela procesa)

DINAMIKA MEHANIČKIH SISTEMA





KLATNO



$$M_c - mgl \sin \theta = ml^2 \ddot{\theta}$$

↓

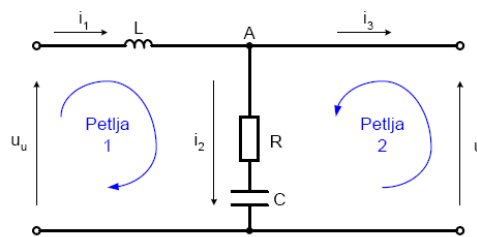
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = \frac{M_c}{ml^2}$$

• Nelinearni matematički model

$$\sin \theta \cong \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = \frac{M_c}{ml^2}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

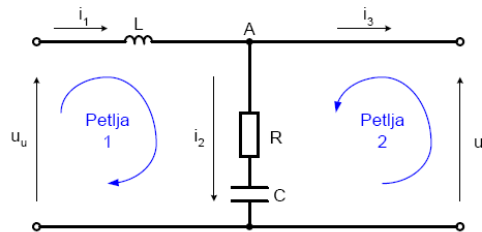
ELEKTRIČNI SISTEM



$$u_u(t) = L \frac{di_1}{dt} + Ri_2 + \frac{1}{C} \int_0^t i_2(\tau) d\tau + u_c(0)$$

$$u_i(t) = Ri_2 + \frac{1}{C} \int_0^t i_2(\tau) d\tau + u_c(0)$$

$$i_1 - i_2 - i_3 = 0; i_3 = 0 \Rightarrow i_1 = i_2 = i$$



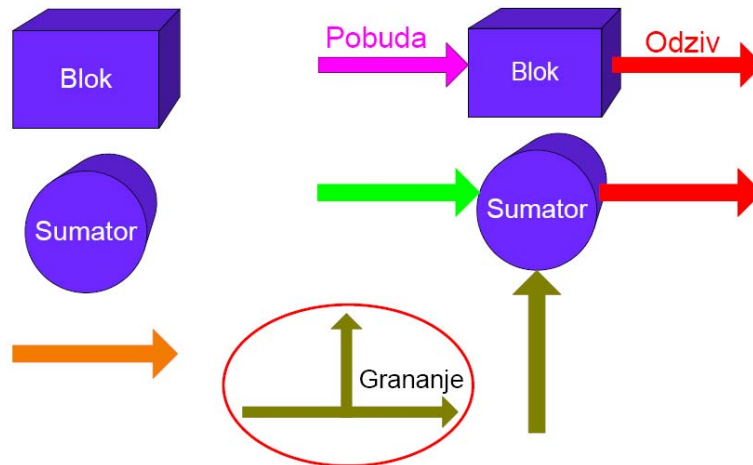
$$T_2^2 \frac{d^2 u_i}{dt^2} + T_1 \frac{du_i}{dt} + u_i = T_1 \frac{du_u}{dt} + u_u$$

gdje je $T_1 = RC$ i $T_2 = \sqrt{LC}$

Zašto formalni prikaz SAU?

- Sistemi automatskog upravljanja iz raznih tehničkih oblasti često su veliki i složeni sa stajališta razumijevanja, analize i projektovanja
- Zahvaljujući konceptu povratne veze i uvođenjem formalnih (apstraktnih) prikaza pomoću prikladnih šema, složeni sistemi iz raznih tehničkih oblasti mogu se posmatrati na jedinstven način
- Češće korišteni šematski prikaz je blokovski prikaz (dijagram) koji prikazuje tok signala u sistemu, zanemarujući tehnološke detalje sistema
- Blok dijagramom prikazuje se uzročno-posljedična zavisnost u elementima sistema i sistema u cjelini (pobuda → odziv)

Osnovne komponente blok dijagrama

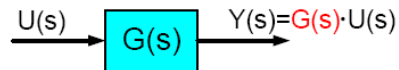


Šta prikazuje blok dijagram?

- Blok dijagram prikazuje tok signala (u smjeru strelice) kroz sistem te međusobnu vezu komponenata koje grade sistem.
- Grafički simboli blok dijagrama omogućuju da se opišu komponente sistema na nedvosmislen i jednostavan način
- Prikaz djelovanja sistema pomoću blok dijagrama predstavlja prvi korak u matematičkoj analizi sistema upravljanja
- U automatici se blok dijagram koristi za prikaz sistema odnosno komponenata koji grade sistem upravljanja, te signala koji prolaze kroz sistem (tok informacija)
- Blok dijagram je apstraktni prikaz sistema koji ne prikazuje fizičku strukturu sistema, energetske izvore i energetske tokove kao ni tokove materijala

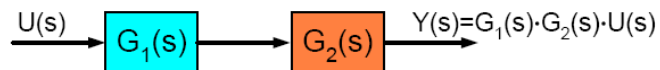
Načini povezivanja blokova (1)

- Blok

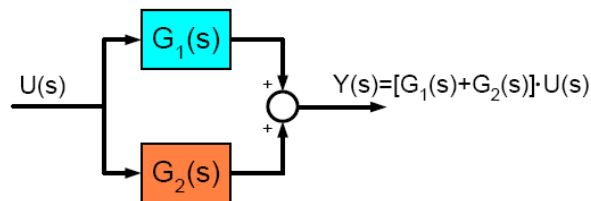


$G(s)$ je operator koji preslikava pobude na odzive

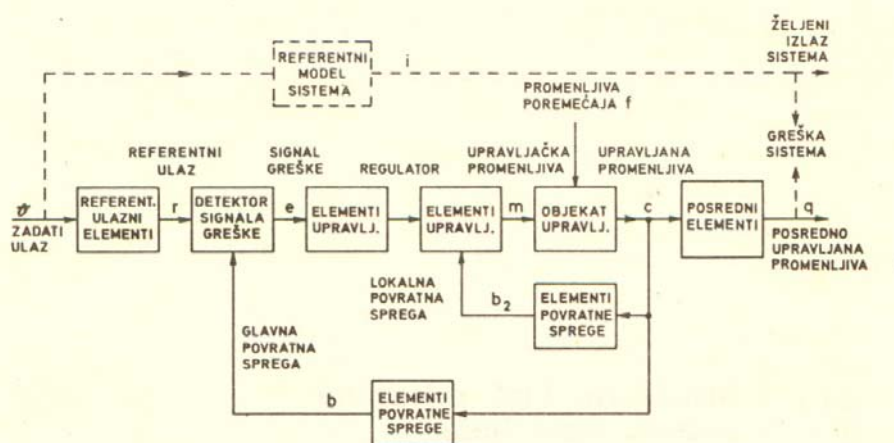
- Serijska veza

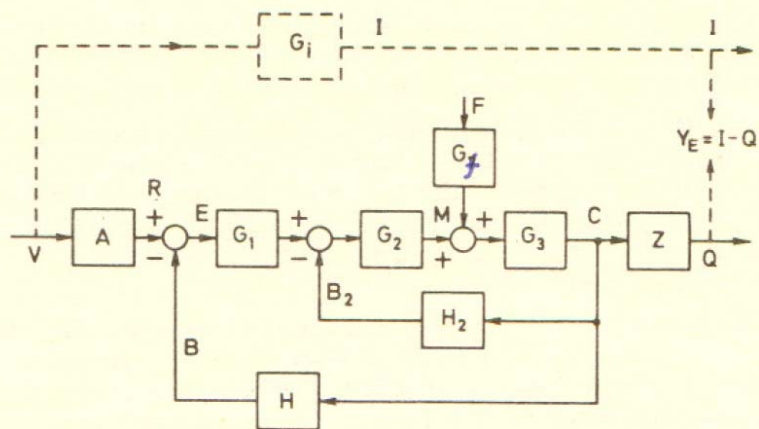


- Paralelna veza



STRUKTURNI BLOK DIJAGRAM SISTEMA AUTOMATSKOG UPRAVLJANJA





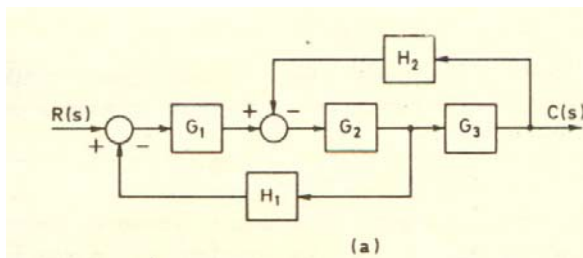
Sl. 4.2. Opšti strukturalni blok dijagram sistema sa jednom upravljanoj promenljivom

TABLICA 4.1.

Najvažnija pravila algebre funkcija prenosa

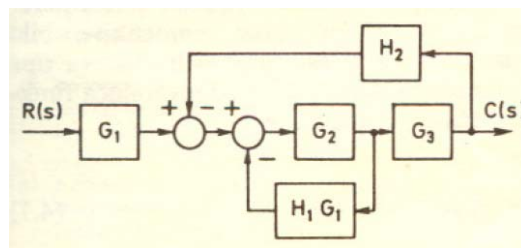
Pravilo	Prvobitni dijagram	Ekvivalentni dijagram	Jednačina
a) kombinovanje serijski vezanih elemenata			$M_2 = G_2 G_1 M_1$
b) svodjenje povratnog kola			$M_2 = \frac{G}{1 \pm GH} M_1$
c) svodjenje direktnog kola			$M_2 = (G_1 \pm G_2) M_1$
d) premeštanje bloka iz povratnog kola			$M_2 = \frac{G}{1 \pm GH} M_1$
e) premeštanje bloka iz direktnog kola			$M_2 = (G_1 \pm G_2) M_1$

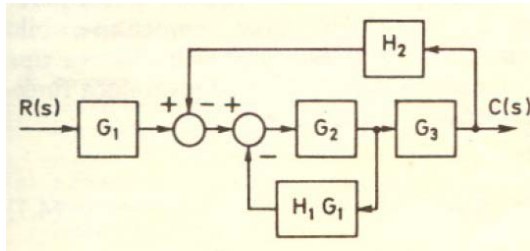
f) pomeranje povratne sprege ispred bloka			$M_2 = GM_1$
g) pomeranje povratne sprege iza bloka			$M_2 = GM_1$
h) pomeranje diskriminatora ispred bloka			$M_2 = GM_1 \pm M_3$
i) pomeranje diskriminatora iza bloka			$M_2 = G(M_1 \pm M_3)$
j) pomeranje povratne sprege ispred diskrim.			$M_2 = M_1 \pm M_3$
k) pomeranje povratne sprege iza diskrim.			$M_2 = M_1 \pm M_3$
l) komutacija promenljivih			$M_2 = M_1 \pm M_3 \pm M_4$



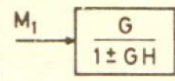
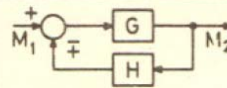
PRIMJER 1

i) pomeranje diskriminatora iza bloka			$M_2 = G(M_1 \pm M_3)$
---------------------------------------	--	--	------------------------

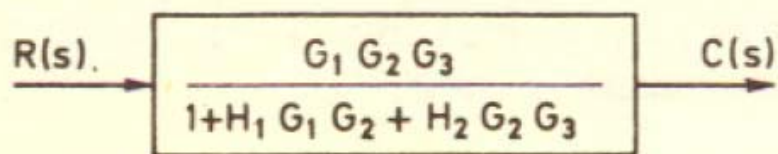
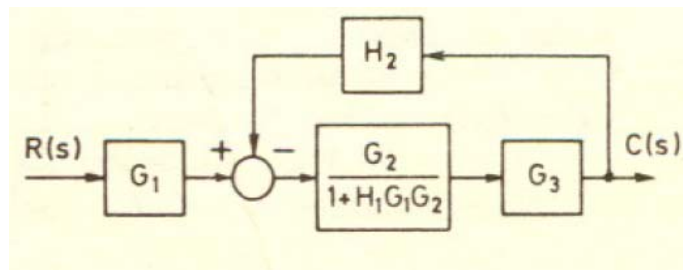
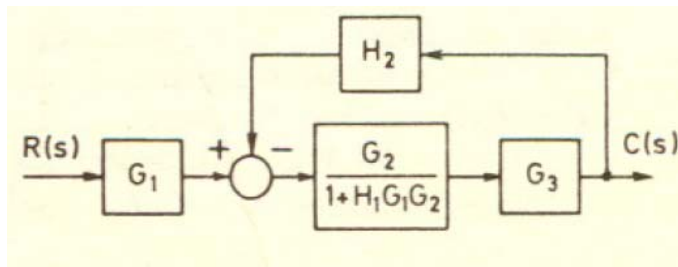




b) svodjenje povratnog kola

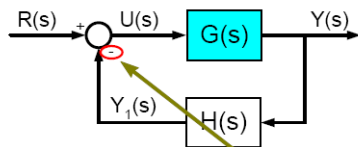


$$M_2 = \frac{G}{1 \pm GH} M_1$$



Načini povezivanja blokov (2)

- Povratna veza



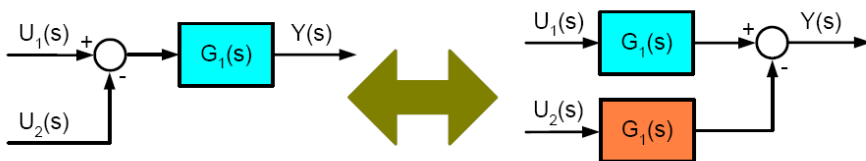
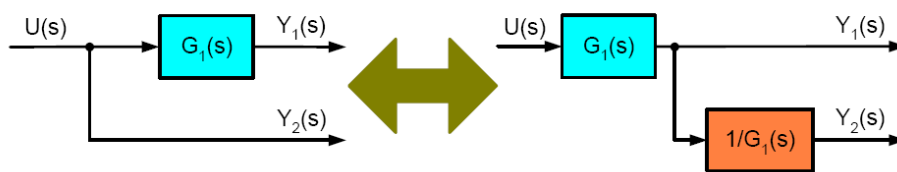
$$U(s) = R(s) - Y_1(s) \quad (4-1)$$

$$Y_1(s) = G(s) \cdot H(s) \cdot U(s) \quad (4-2)$$

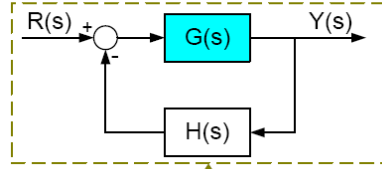
$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) \quad (4-3)$$

$$Y = \frac{G(s)}{1 + G(s) \cdot H(s)} R(s) \quad (4-4)$$

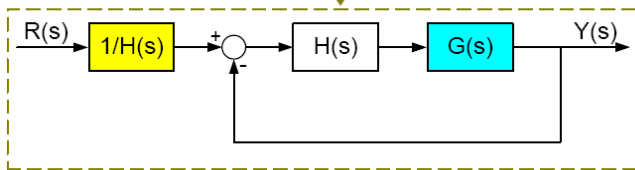
Blokovski diagram - algebra (1)



- Svođenje na jediničnu povratnu vezu

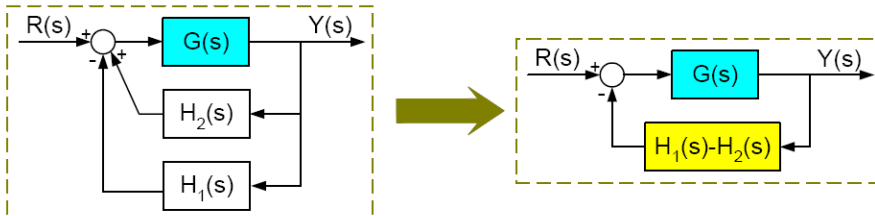
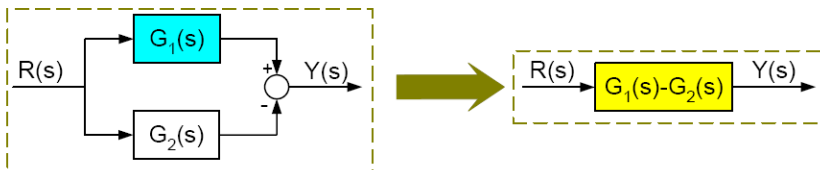


$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

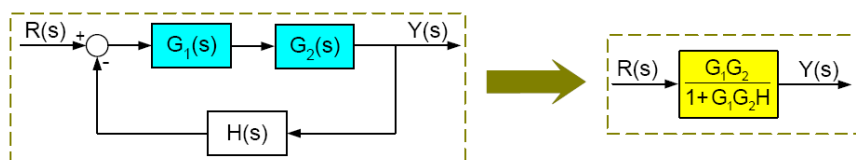


$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

REDUKCIJA BLOK DIJAGRAMA

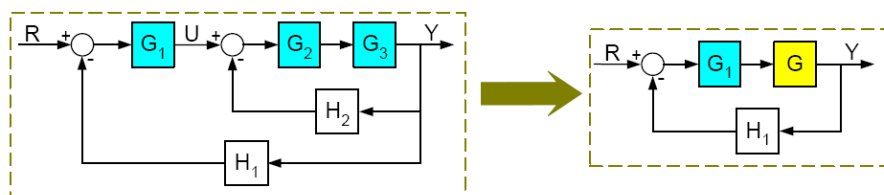


REDUKCIJA BLOK DIJAGRAMA



$$G_{cl}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \quad (4-5)$$

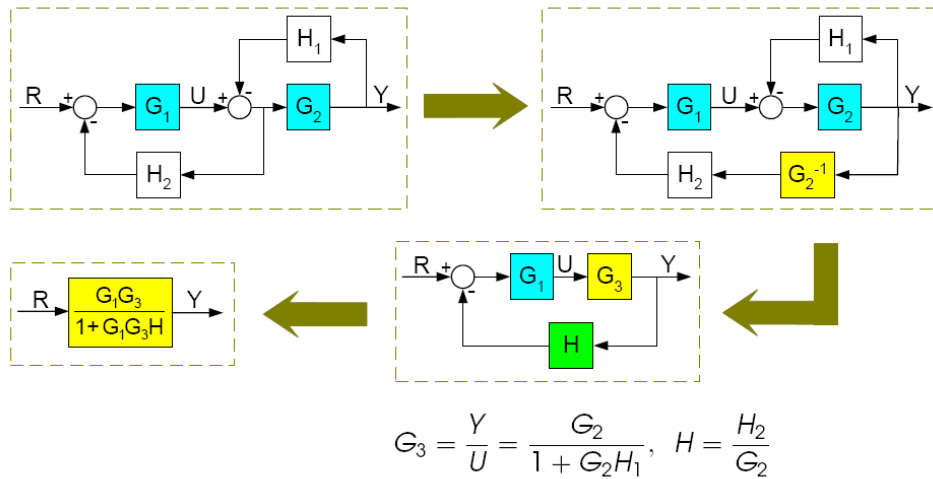
REDUKCIJA UNUTRAŠNJIH PETLJI



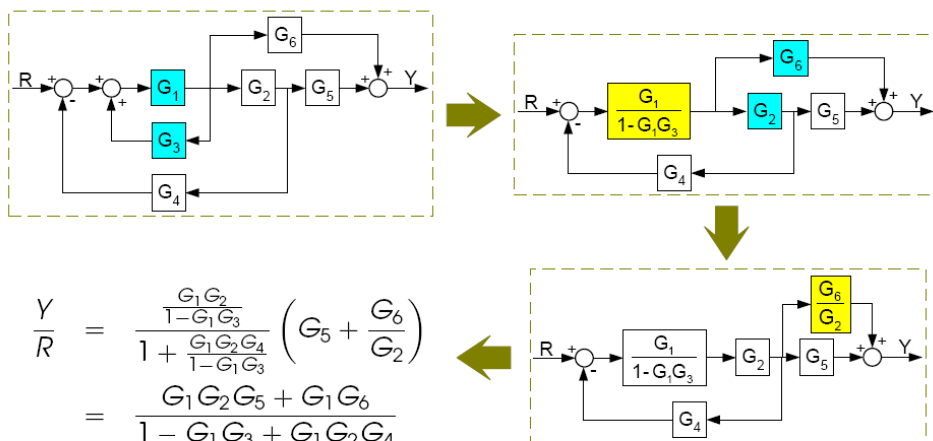
$$G = \frac{G_2 G_3}{1 + G_2 G_3 H_2} \quad (4-6)$$

$$G_{cl} = \frac{Y}{R} = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_2 G_3 H_2 + G_1 G_2 G_3 H_1} \quad (4-7)$$

Primjer 4.1

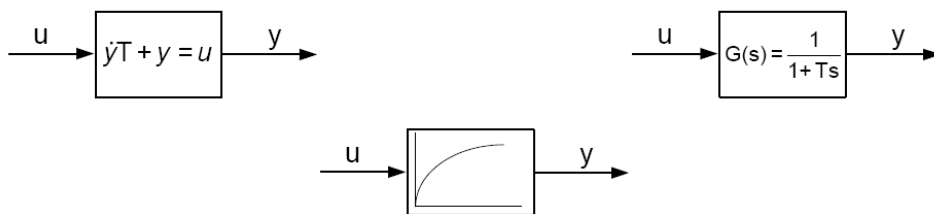


Primjer 4.2



Opis blokova

- Za simulaciju sistema na računaru svaki je blok potrebno strukturno opisati
- Uobičajeni opisi blokova ilustrovani su na primjeru sistema (elementa) prvog reda čije je dinamičko ponašanje prikazano diferencijalnom jednačinom, prelaznom funkcijom i prenosnom funkcijom:

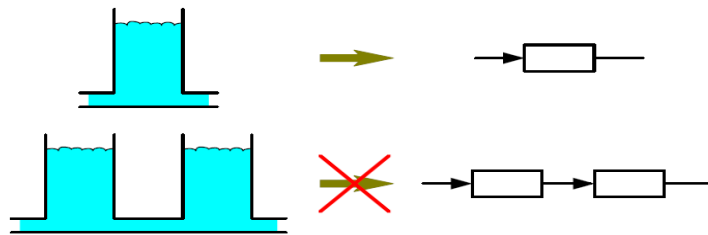


Dobre strane i mane blokovskog prikaza sistema

- Sistemi upravljanja iz različitih područja prikazani blokovski imaju isti oblik što je veoma važno sa stajališta primjene jedinstvenih metoda analize i sinteze sistema upravljanja
- Blokovski prikaz pretpostavlja jednosmjerni tok informacija u sistemu (uzročna zavisnost); za korektan blokovski prikaz fizičkog sistema potrebno je poznavanje fizičkih zakonitosti sistema

Primjer 4.4: Spregnuti rezervoari tečnosti spojeni u kaskadu

- Ne mogu se prikazati serijskim spojem dva bloka, jer nivo drugog rezervoara utiče na nivo prvog rezervoara (interakcija) te je narušena jednosmjernost toka informacija, odnosno uzročna zavisnost
- U tom i sličnim slučajevima potrebno je fizički sistem (podsystem) prikazati jedinstvenim blokom.



Zaključak

- Blok, sumator i linija sa strelicom osnovni su elementi blok dijagrama
- Blok dijagram nam pomaže da lakše odredimo prenosnu funkciju zatvorenog kruga složene strukture
- Blok dijagram prikazuje samo prolaz informacije kroz sistem
- Prolaz energije i/ili materije ne prikazuje se blok dijagramom

- Postoji jaka simbioza između upravljanja i računarstva. Računari su integralni dijelovi regulatora. Računari i simulacije se široko koriste u projektovanju i ispitivanju sistema upravljanja
- Primjena računara za upravljanje sistemima, tj. upravljanje u stvarnom vremenu (*engl.* embedded computers) postavlja posebne zahtjeve arhitekture računara i njegove programske podrške.
- Posebno su strogi zahtjevi u odnosu na operativni sistem koji mora osigurati brzi odziv na vanjske događaje
- Pri realizaciji sistema upravljanja potrebno je razumijevanje algoritama upravljanja i softvera
- Računarska simulacija važna je faza u razvoju sistema upravljanja – provjera funkcionalnosti postrojenja u raznim radnim režimima (ove simulacije zahtijevaju odgovarajuće matematičke modele procesa)

- Postoje komercijalno raspoloživi specijalizovani programski paketi za simulaciju specifičnih postrojenja – simulatori (za brodove, vozila, avione, vjetroturbine, nuklearne elektrane...)
- Razvoj sistema upravljanja značajno se može pospešiti korišćenjem simulatora (*engl.* Hardware In the Loop – HIL)
- Internet, kao široko rasprostranjena robusna komunikaciona mreža, predstavlja vrlo složeni distribuirani sistem sastavljen od velikog broja čvorova (router) i veza (link) čija se funkcionalnost zasniva na mehanizmima automatskog upravljanja