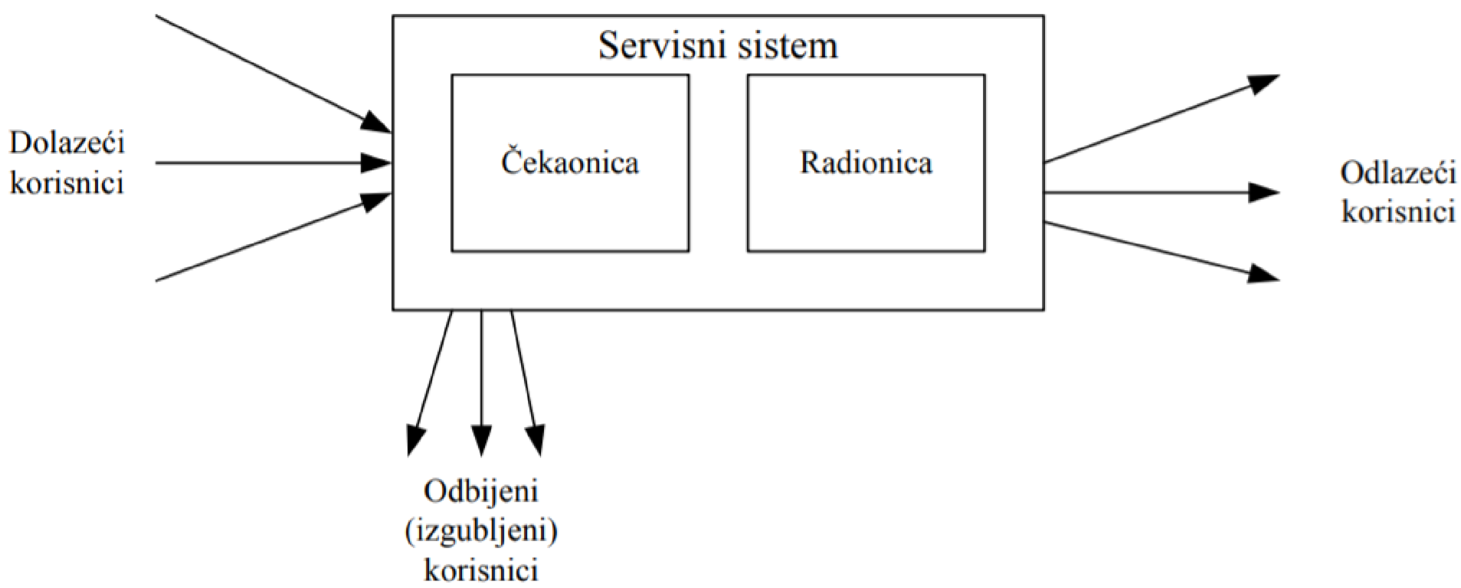
Uvod u teoriju servisnih sistema

Teorija servisnih sistema

- Široko primjenjivana u oblasti telekomunikacija.
- Zasniva se na predstavljanju jednog telekomunikacionog sistema ili njegovog dijela kao servisnog sistema čija je uloga da obradi odgovarajuće poslove koje korisnici zahtjevaju od njega.



Elementi servisnih sistema

- Dolazeći korisnici
  - Predstavljaju ulaz u servisni sistem
  - Dolaze u servisni sistem sa ciljem da im servisni sistem pruži odgovarajuću uslugu
    - Npr. telefonski pretplatnici u telefonskim mrežama koji zahtjevaju uslugu telefonskog razgovora od telefonske mreže, paketi koji dolaze u komunikacioni čvor i zahtjevaju da ih taj komunikacioni čvor proslijedi do korisnika ili nekog drugog komunikacionog čvora, itd.
  - Korisnici se karakterišu sa količinom posla koju nose
    - npr. telefonski razgovor može biti kraći ili duži i time su resursi telefonske mreže kraće ili duže zauzeti; što je duži paket koji pristiže u komunikacioni čvor biće potrebno veće vrijeme da se on proslijedi dalje do sledećeg komunikacionog čvora ili korisnika
  - Definiše i proces dolazaka u servisni sistem koji predstavlja raspodjelu dolazaka korisnika u servisni sistem.
    - Najčešće se koristi Poasonov proces dolazaka korisnika.

Elementi servisnih sistema

- Odbijeni korisnici
  - Korisnici koji su odbijeni od strane servisnog sistema i kojima usluga nije pružena.
  - Najčešći razlog odbijanja je zauzeće svih resursa servisnog sistema, ali postoje i drugi, kao npr. niži prioritet od nekih prioritetnijih korisnika, što podrazumijeva odbijanja posluživanja korisnika nižeg prioriteta u slučaju kada je servisni sistem preopterećen i sl.
  - Odbijeni korisnici moraju ili ponovo pokušati (ponovo kao dolazeći korisnici) da dobiju uslugu od servisnog sistema ili odustati od tražene usluge.
    - Na primer, ako nam telefonski poziv bude odbijen uslijed zauzeća svih resursa telefonske centrale, možemo ili pokušati ponovo u nadi da su se resursi u međuvremenu oslobodili ili odustati od željenog poziva.

Elementi servisnih sistema

- Odlazeći korisnici
  - Korisnici koji su posluženi od strane servisnog sistema i napuštaju ga oslobađajući pri tome resurse servisnog sistema koje su zauzimali.
- Čekaonica
  - Dio servisnog sistema u kom korisnici prihvaćeni od strane servisnog sistema čekaju da budu posluženi.
  - Čekaonica nije obavezan element servisnog sistema tj. može i da izostane, a ako postoji u realnosti je konačnog kapaciteta iako se u teoriji koriste i modeli koji razmatraju čekaonicu beskonačnog kapaciteta.
  - Kapacitet čekaonice po definiciji predstavlja maksimalan moguć broj korisnika u čekaonici.

Elementi servisnih sistema

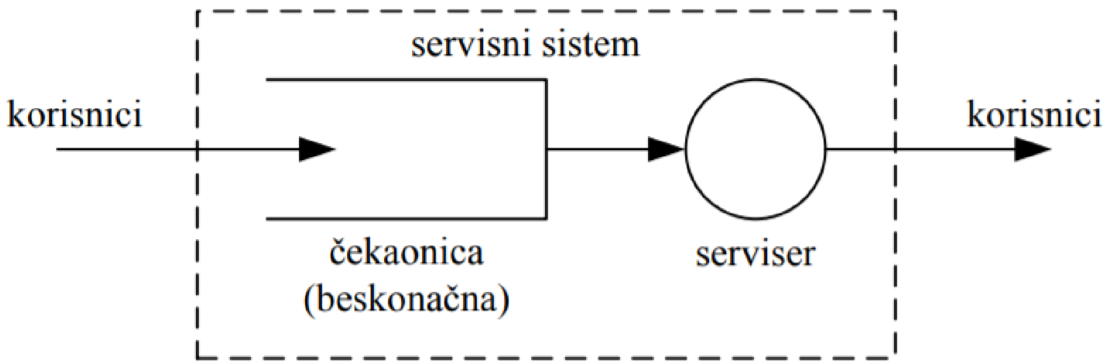
- Radionica
  - Sadrži servisere (kojih ima 1 ili više) koji obrađuju poslove koje im donose korisnici.
  - Kapacitet radionice je broj servisera u radionici.
  - Ukupan zbir kapaciteta čekaonice i radionice daje **kapacitet servisnog sistema** koji predstavlja maksimalni broj korisnika koje servisni sistem može da prihvati.
  - Za servisere se uglavnom smatra da su podjednakih kvaliteta i da rade bez pauze tj. kad god je neki serviser slobodan, a ima posla koji treba da se odradi on ga odmah preuzima na obradu.
    - Međutim, postoje i modeli koji sadrže servisere koji se povremeno "odmaraju".
  - U okviru radionice se definiše i pojam **disciplina posluživanja** koja definiše redoslijed kojim će se korisnici, koji čekaju u čekaonici, posluživati.
    - Primjeri discipline posluživanja su: LIFO (*Last In First Out)* – poslužuje se korisnik koji je poslednji došao u servisni sistem, FIFO (*First In First Out*) – poslužuje se korisnik koji je prvi došao u servisni sistem, sa prioritetom – poslužuje se korisnik najvišeg prioriteta, itd.
  - Takođe se definiše i proces obrade korisnika koja predstavlja raspodjelu vremena obrade korisnika.

Kendalova notacija

- Kendall je 1951. g. uveo **A/B/m/k/l/Z** sistem označavanja servisnih sistema
  - **A** – proces toka dolazaka korisnika (vrijednost M označava Markovljev proces dolazaka)
  - **B** – proces obrade (vremena posluživanja) korisnika (vrijednost M označava proces po eksponencijalnoj raspodjeli)
  - **m** – broj servisera u radionici
  - **k** – ukupan kapacitet servisnog sistema
  - **l** – broj korisnika koji dolaze u servisni sistem
    - Koliki je ukupan broj potencijalnih korisnika servisnog sistema, npr. broj telefonskih pretplatnika jedne telefonske centrale.
  - **Z** – disciplina čekanja u čekaonici
  - Ukoliko je **k** ili **l** beskonačno onda se ove oznake izostavljaju u Kendalovoj notaciji, a takođe se i **Z** izostavlja ukoliko je disciplina posluživanja FIFO.

Primjeri Kendalove notacije

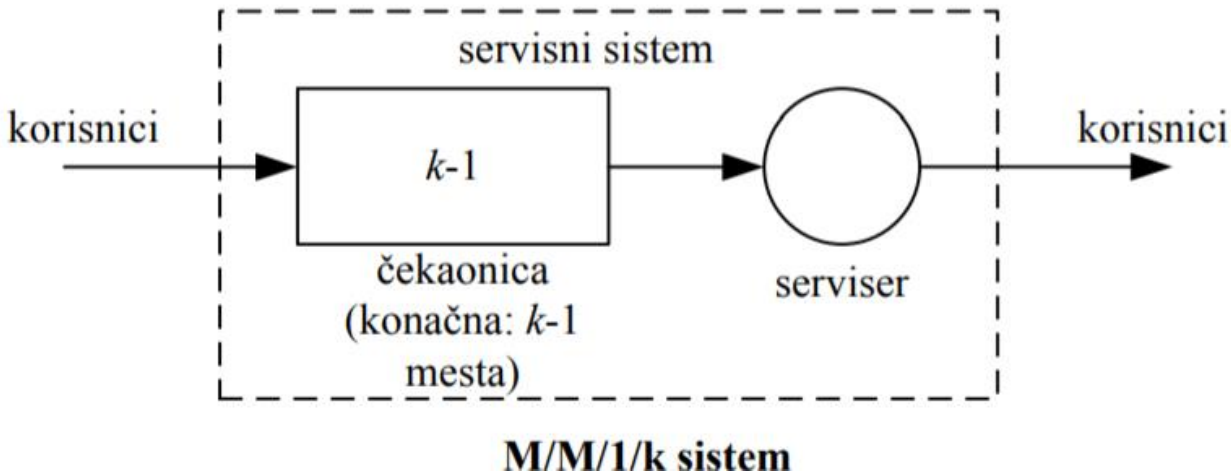
- **Sistem M/M/1** – Model servisnog sistema kod kojeg je tok dolazaka Poasonov, obrada korisnika ima eksponencijalnu raspodjelu, postoji jedan serviser i čekaonica je beskonačnog kapaciteta.



M/M/1 sistem

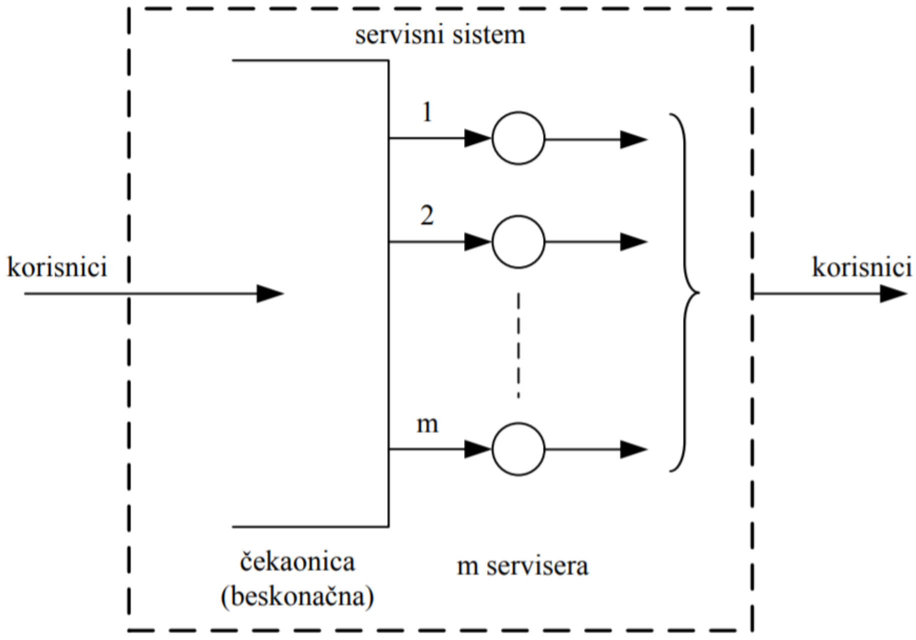
Primjeri Kendalove notacije

- **Sistem M/M/1/k** – Sve isto kao u slučaju M/M/1 sistema, samo sa razlikom da je čekaonica konačna i kapaciteta k-1.



Primjeri Kendalove notacije

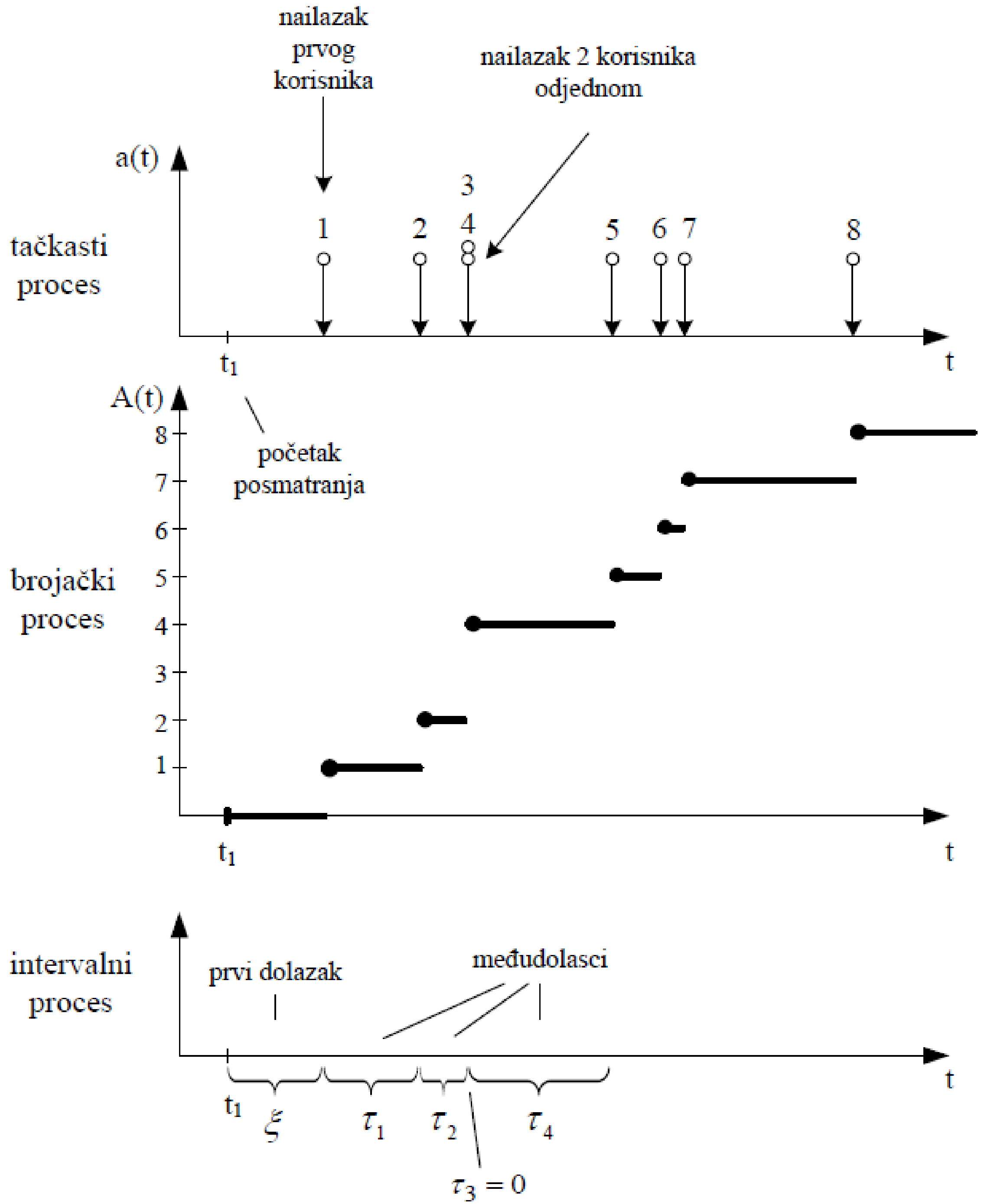
- **Sistem M/M/m** – Sve isto kao kod M/M/1 sistema, samo sa razlikom da postoji m servisera



M/M/m sistem

Proces dolazaka korisnika u servisni sistem

- Proces dolazaka korisnika predstavlja vremensku raspodjelu dolazaka korisnika u servisni sistem.
- Postoje tri aspekta posmatranja tokova dolazaka:
  - **Tačkasti proces**
    - posmatraju se vremenski trenuci dolazaka korisnika u servisni sistem.
  - **Brojački proces**
    - posmatra se broj korisnika koji je ušao u servisni sistem tokom vremena.
  - **Intervalni proces**
    - posmatraju se vremena prvog dolaska i međudolazaka korisnika u servisni sistem.
- Tačkasti i brojački proces su diskretni procesi, pa se opisuju diskretnom raspodjelom vjerovatnoća tj. vjerovatnoćama diskretnih događaja, a intervalni proces je kontinualan proces pa se opisuje gustinom vjerovatnoće.


nailazak
prvog
korisnika
nailazak 2 korisnika
odjednom
a(t)
tačkasti
proces
1
2
3
4
5
6
7
8
t_1
t
A(t)
početak
posmatranja
brojački
proces
8
7
6
5
4
3
2
1
t_1
t
intervalni
proces
prvi dolazak
međudolasci
t_1
t
ξ
τ_1
τ_2
τ_4
$\tau_3 = 0$

Poasonov proces dolazaka

- Poasonov proces dolazaka se može posmatrati diskretno kao brojački ili tačkasti proces.
- Moguća su samo dva događaja u jednom trenutku, korisnik došao ili korisnik nije došao.
- Vjerovatnoća da je u jednom trenutku došlo više od jednog korisnika je beskonačno mala veličina višeg reda.
- Za Poasonov proces se definiše vjerovatnoća $P_n(t)$(vjerovatnoća da je u intervalu *t* došlo *n* korisnika) sa:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

- Nepreklapajući intervali posmatranja nezavisni su jedan od drugog.

Osobine Poasonovog procesa

1. Definicija: $P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}\ ,\ \ n = 0,1,2\ \ldots$

2. Zbir svih vjerovatnoća je 1: $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(t) = 1$

3. Srednja vrijednost:

$$m_A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n(t) = \lambda t \Rightarrow \lambda = \frac{m_a(t)}{t}$$

- Parametar λ označava protok dolazaka korisnika tj. prosječan broj korisnika u jedinici vremena.

4. Varijansa:

$$\sigma_A^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n - m_A)^2 P_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_n(t) - m_A{}^2 = \lambda t$$

- Parametar indeks disperzije se definiše kao količnik varijanse i srednje vrijednosti slučajnog procesa.
- Na osnovu indeksa disperzije se slučajni procesi klasifikuju u tri grupe: gladak slučajan proces (indeks disperzije manji od 1), normalan slučajan proces (indeks disperzije je jednak 1) i hrapav slučajan proces (indeks disperzije veći od 1).
- Kod Poasonovog procesa je indeks disperzije jednak 1, što znači da on spada u grupu normalnih slučajnih procesa.
- Poasonov proces je dobar za opisivanje dolazaka korisnika u telefonskim mrežama, međutim, u paketskim mrežama procesi dolazaka su hrapavi (saobraćaj ima *bursty* prirodu) pa Poasonov proces tada ne predstavlja dobru aproksimaciju.

Osobine Poasonovog procesa

5. Generišuća funkcija P(z):

$$P(z) = E\left\{z^{A(t)}\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_n(t) = e^{-\lambda t(1-z)}$$

6. 'Gubitak memorije':

- Posmatrajmo proizvoljna tri trenutka vremena t_1, t_2 i $t_3,$ $t_3 > t_2 > t_1$. Neka je do trenutka t_i stiglo n_i korisnika tj. $A(t_i) = n_i$, i=1,2,3 . Nađimo uslovnu vjerovatnoću:

$$P\left\{A(t_3) = n_3 \mid A(t_2) = n_2, A(t_1) = n_1\right\} = P\left\{n_3 \mid n_2, n_1\right\} =$$

$$= \frac{P\left\{n_1, n_2, n_3\right\}}{P\left\{n_1, n_2\right\}} = \frac{P\left\{n_1\right\} P\left\{n_2 - n_1\right\} P\left\{n_3 - n_2\right\}}{P\left\{n_1\right\} P\left\{n_2 - n_1\right\}} = P\left\{n_3 - n_2\right\}$$

- U izvođenju je iskorišćena osobina nezavisnosti između nepreklapajućih intervala. Iz konačnog rezultata vidimo da tražena uslovna vjerovatnoća zavisi samo od n_2, ali ne i od n_1, tj. ranije predistorije. Ova osobina se još naziva i Markovljevo svojstvo pa se otuda Poasonov tok naziva i Markovljev proces dolazaka.

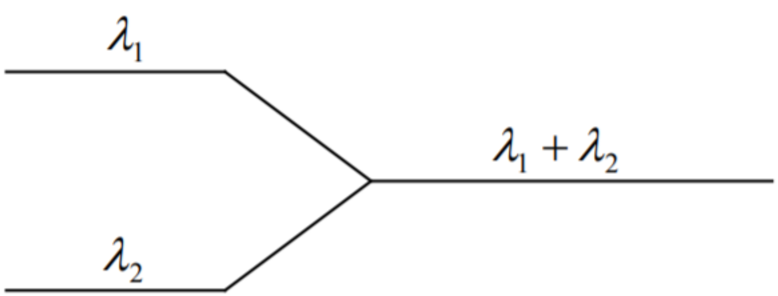
Osobine Poasonovog procesa

7. Uniformnost uslovnog događaja:
   - Neka je u servisni sistem došao 1 korisnik u intervalu $(0, t)$. Želimo da odredimo kolika je vjerovatnoća da se to desilo u intervalu (t_A, t_B), $t_A < t_B < t$.

$$P\{n_B - n_A \mid n = 1\} = \frac{t_B - t_A}{t}$$

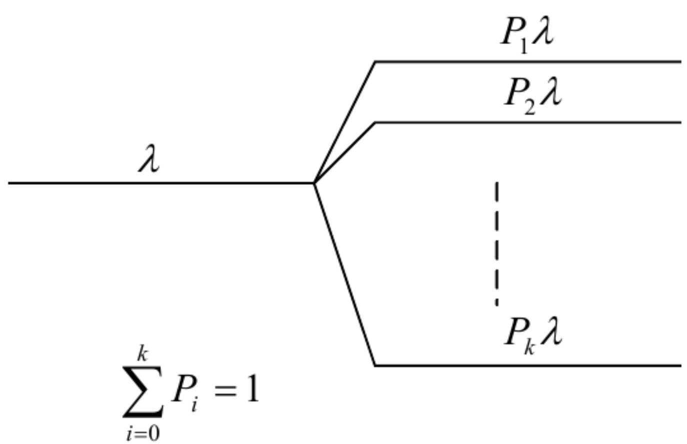
   - Svi intervali iste dužine unutar intervala $(0, t)$ su podjednako vjerovatni. Bitna je samo veličina intervala, a ne i njegova pozicija.

8. Združivanje dva nezavisna Poasonova procesa:
   - Ako združimo dva međusobno nezavisna Poasonova toka sa parametrima λ_1 i λ_2 kao rezultat dobijamo opet Poasonov tok sa parametrom $\lambda_1 + \lambda_2$.



Osobine Poasonovog procesa

9. Razdruživanje Poasonovog toka
   - Neka je dat Poasonov tok parametra λ . Neka se korisnici iz tog toka razdjeljuju na k tokova pri čemu je vjerovatnoća da korisnik iz dolaznog toka završi u i-tom toku P_i, i neka je $\sum_{i=1}^{k} P_i = 1$. Tada je svaki od k tokova, dobijenih razdvajanjem od glavnog toka, Poasonov tok sa parametrom $\lambda_i = \lambda P_i, i = 1..k$. U bilo kom drugom načinu razdvajanja glavnog toka dobijeni tokovi neće više biti Poasonovi.

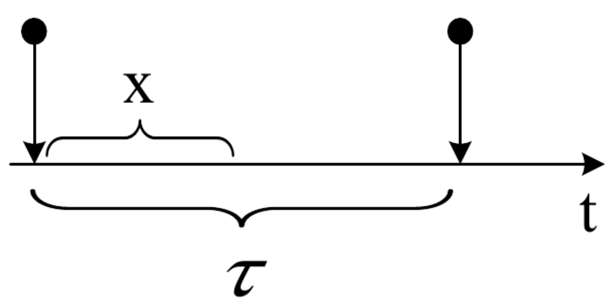


Osobine Poasonovog procesa

10. Vjerovatnoća prvog dolaska i vjerovatnoća međudolazaka:
    - Slučajna promjenjiva koja označava trenutak dolaska prvog korisnika se obeležava sa ξ , a slučajna promjenjiva koja označava vrijeme između dva uzastopna dolaska korisnika se obeležava sa τ . Pošto su ovo kontinualne veličine, onda se koristi gustina raspodjele za obje slučajne promjenjive. U slučaju Poasonovog toka dolazaka gustine raspodjele za obje slučajne promjenjive ($f_\xi(t)$ i $f_\tau(t)$) su identične eksponencijalne raspodjele:

$$f_\xi(t) = f_\tau(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

Dva uzastopna susjedna dolaska

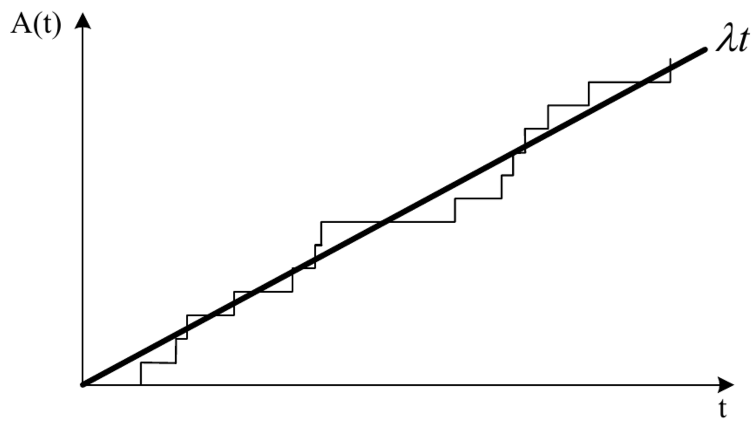


Osobine Poasonovog procesa

11. Stacionarnost

- Brojački proces A(t) je stacionaran ako važi $\lim_{n \to \infty} \frac{A(t)}{t} = const.$

  Poasonov proces ispunjava ovaj uslov jer je $\lim_{n \to \infty} \frac{A(t)}{t} = \lambda.$



Procesi obrade korisnika

- Kada korisnici stignu u sistem, ako budu prihvaćeni onda oni eventualno čekaju u čekaonici pa pređu u radionicu ili odmah uđu u radionicu gde ih obrađuje serviser.
- Svaki korisnik sa sobom nosi svoj posao koji servisni sistem treba da obradi.
  - Obradu vrše serviseri radionice.
- Vrijeme koje korisnik provede u radionici je vrijeme obrade korisnika i ono se smatra slučajnom veličinom u teoriji servisnih sistema.
- Pošto u opštem slučaju korisnici nose različite količine posla sa sobom onda se i vrijeme koje korisnik provede u radionici dok se posao ne završi razlikuje od korisnika do korisnika.

Procesi obrade korsnika

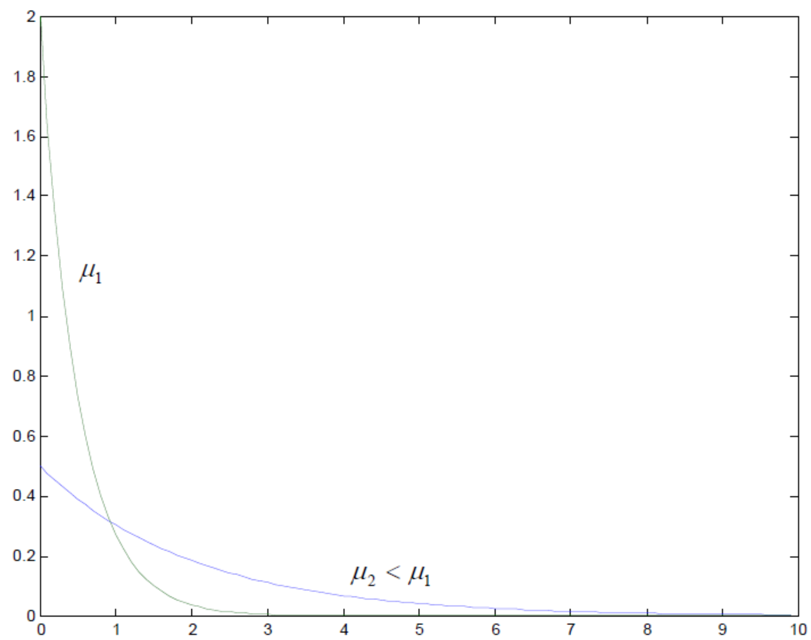
- Svaki serviser se karakteriše kapacitetom servisera koji u stvari predstavlja koliko posla serviser može da obavi u jedninici vremena.
- Vrijeme obrade po korisniku se u jedinicama može definisati na sledeći način:

vrijeme obrade po korisniku = ***količina posla koju nosi korisnik / kapacitet servisera***
količina posla koju nosi korisnik = ***jedinica posla / korisnik***
kapacitet servisera = ***jedinica posla / jedinica vremena***
vrijeme obrade po korisniku = ***jedinica vremena / korisnik***

- Vrijeme obrade korisnika je vrijeme od trenutka kad je korisnik ušao u radionicu do trenutka kad je korisnik izašao iz radionice i smatra se kontinualnom pozitivnom slučajnom veličinom koja se obilježava sa ξ .

Eksponencijalna raspodjela vremena obrade korisnika

- U ovom slučaju ξ ima eksponencijalnu gustinu raspodjele i ovaj slučaj se u Kendalovom sistemu označavanja označava sa *M*.
- Funkcija gustine eksponencijalne raspodjele: $f_\xi(x) = \mu e^{-\mu x}, x \geq 0.$



Osobine eksponencijalne raspodjele

1. Površina ispod funkcije gustine raspodjele je jednaka 1:

$$\int_0^\infty f_\xi(x)dx = 1$$

2. Prosječno vrijeme obrade korisnika (srednja vrijednost):

$$\bar{\xi} = m_\xi = E(\xi) = \int_0^\infty x f_\xi(x)dx = \frac{1}{\mu}$$

3. Varijansa:

$$\sigma_\xi^2 = \overline{(\xi - \bar{\xi})^2} = \int_0^\infty (x - \bar{\xi})^2 f_\xi(x)dx = \frac{1}{\mu^2}$$

4. Generišuća funkcija (Laplasova):

$$\Phi_\xi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f_\xi(x)dx = \frac{\mu}{s+\mu}$$

Osobine eksponencijalne raspodjele

5. Odsustvo memorije:

$$P\{\xi > t + x \mid \xi > t\} = \frac{P\{\xi > t + x, \xi > t\}}{P\{\xi > t\}} =$$

$$= \frac{\int_{x+t}^{\infty} \mu e^{-\mu u} du}{\int_{t}^{\infty} \mu e^{-\mu u} du} = \frac{e^{-\mu(x+t)}}{e^{-\mu t}} = e^{-\mu x}$$

- Rezultat ne zavisi od *t* pa odatle zaključujemo da eksponencijalna raspodela ima Markovljevo svojstvo tj. svojstvo odsustva memorije.

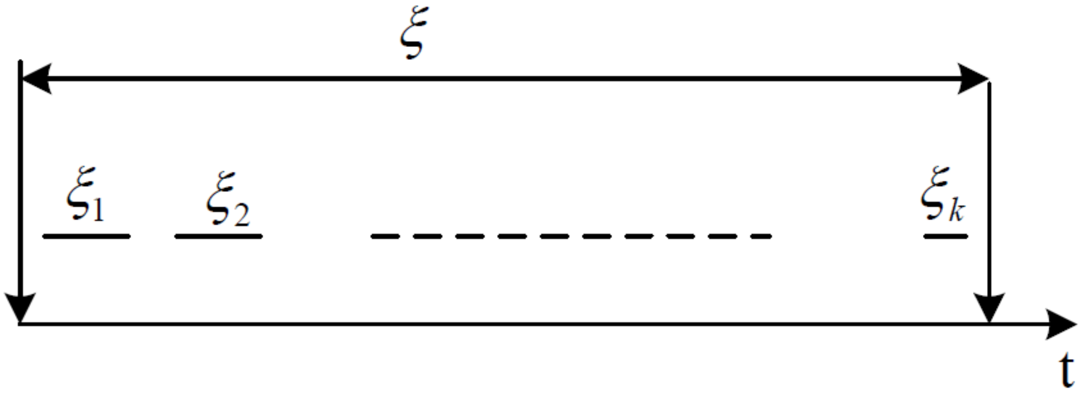
6. Veza sa Poasonovom raspodjelom:

- Pošto su vremena obrade korisnika međusobno nezavisna i sve obrade imaju eksponencijalnu raspodjelu sa istim parametrom μ onda izlasci iz radionice tj. servisnog sistema (završeci obrade) odgovaraju Poasonovom toku sa parametrom $\lambda = \mu$.

Erlangova raspodjela

- Izvodi se iz eksponencijalne raspodjele.
- Kendalova oznaka za ovaj slučaj je E_k, gdje *k* označava Erlangovu raspodjelu *k*-tog reda.
  - Ova raspodjela podrazumijeva da korisnik ide na obradu kod prvog servisera, a kad kod njega završi ide kod drugog i tako sve do *k*-tog servisera, pri čemu svih *k* servisera ima istu eksponencijalnu raspodjelu sa istim parametrom μ.

$$f_{\xi_i} = \mu e^{-\mu x}, \;\; x \geq 0 \;\; i = 1,2, \ldots k$$



Erlangova raspodjela

- Slučajna promenjiva ξ koja odgovara ukupnom vremenu obrade je jednaka zbiru pojedinačnih vremena obrade, tj. slučajnih promjenjivih ξ_i $(\mathrm{i} = 1,2, \dots \mathrm{k})$koje njima odgovaraju:

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_k$$

- Pošto su ξ_{i} međusobno nezavisne onda je Laplasova funkcija Erlagove raspodjele $\Phi(s)$ jednaka proizvodu Laplasovih funkcija pojedinačnih eksponencijalnih raspodjela $\Phi_{\xi_i}(s)$:

$$\Phi_\xi(s) = \left[\Phi_{\xi_i}(s)\right]^k = \left[\frac{\mu}{s + \mu}\right]^k$$

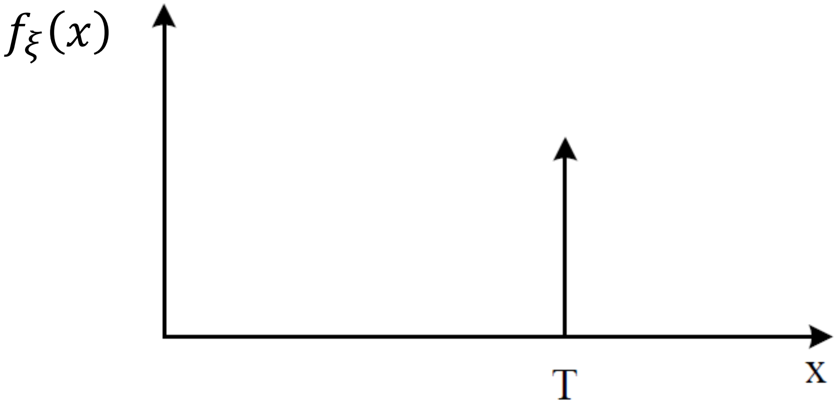
- Inverznom transformacijom dobija se izraz za gustinu raspodjele:

$$f_\xi(x) = \mu \frac{(\mu x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu x}, \; x \geq 0$$

Deterministička raspodjela

- Kendalova oznaka za ovu raspodjelu je D. Ova raspodjela podrazumijeva da svi korisnici imaju istu količinu posla tj. vrijeme obrade svakog korisnika je isto (ξ = T = const., gde je T fiksno vrijeme obrade korisnika).
- Gustina determinističke raspodjele je Dirakov impuls u x = T :

$$f_{\xi}(x) = \delta(x - T)$$



Generalna raspodjela

- Kendalova oznaka za ovu raspodjelu je G.
- Podrazumeva da za gustinu raspjodele imamo bilo koju funkciju f(x) koja zadovoljava sledeće uslove:

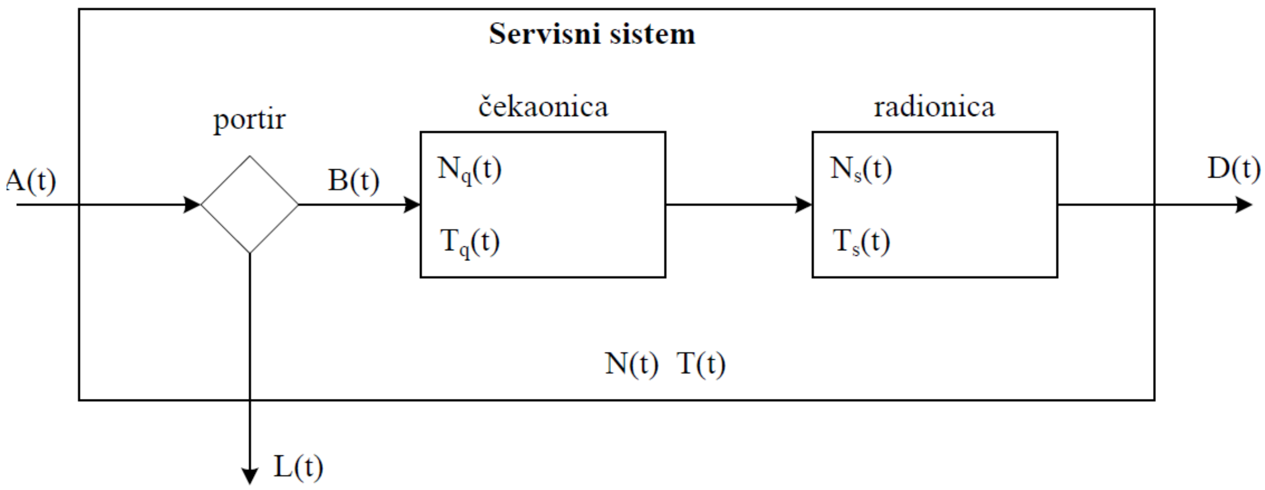
$$f_{\xi}\left(x\right) = f\left(x\right),\ x \geq 0$$

$$f\left(x\right) = 0,\ x < 0$$

$$\int_{0}^{\infty} f\left(x\right) dx = 1$$

- Pri tome, pretpostavlja se da su za svaku funkciju f(x) poznati srednja vrijednost i varijansa.

Procesi koji opisuju stanje sistema



$N(t)$ – Broj korisnika u servisnom sistemu u trenutku t
$N_q(t)$ – Broj korisnika u čekaonici u trenutku t
$N_s(t)$ – Broj korisnika u radionici u trenutku t
$T(t)$ – Vrijeme zadržavanja korisnika u sistemu
$T_q(t)$– Vrijeme čekanja korisnika u čekaonici

$T_s(t)$ – Vrijeme obrade (servisiranja) korisnika
$A(t)$ – Tok dolazaka korisnika u servisni sistem
$B(t)$ – Tok korisnika koji su primljeni na obradu
$L(t)$ – Tok korisnika koji su odbijeni (izgubljeni)
$D(t)$ – Tok odlazaka korisnika iz servisnog sistema

Procesi koji opisuju stanje sistema

- Važe sledeće relacije:
  - $N(t) = N_q(t) + N_s(t)$
  - $T(t) = T_q(t) + T_s(t)$
- Pretpostavljamo da tok dolazaka $A(t)$ stacionaran proces:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{A(t)}{t} = \lambda = const$$

- Pretpostavljamo i da servisni sistem ima moć da obradi sve korisnike koje primi na obradu, a to znači da pretpostavljamo i da su tokovi $L(t)$ i $D(t)$ takođe stacionarni:

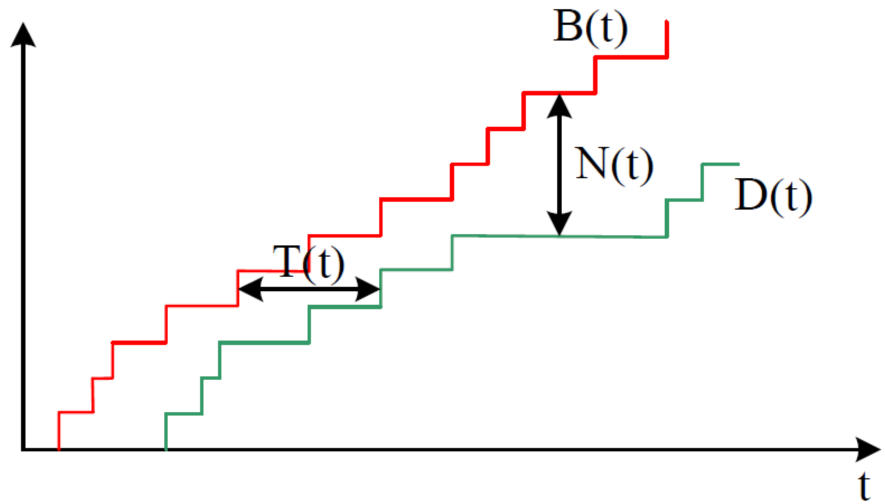
$$\lim_{t\to\infty} \frac{D(t)}{t} = \gamma$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{L(t)}{t} = \lambda - \gamma = P_L\lambda$$

- λ predstavlja srednju dolaaznu brzinu korisnika u servisni sistem, γ propusnot sistema, P_L vjerovatnoću gubitaka korisnika.

Procesi koji opisuju stanje sistema

- $N(t)$ je broj korisnika u sistemu u trenutku t i to je slučajna veličina koju nazivamo stanje sistema.
- $N(t) = B(t) - D(t)$
- $T(t)$ je vrijeme zadržavanja prihvaćenih korisnika u servisnom sistemu.
- Obično nas interesuju srednje vrednosti T i N, kao i ekvivalentnih slučajnih veličina koje se odnose na čekaonicu i radionicu (N_q, N_s, T_q, T_s).



Procesi koji opisuju stanje sistema

- Vjerovatnoća da se servisni sistem nalazi u stanju *n* (u sistemu se nalazi *n* korisnika) označavamo sa $p_n(t)$:

$$P\{N(t)=n\} = p_n(t),\ n = 0,1,2,\ldots,k$$

- Smatraćemo da je ispunjen uslov stacionarnosti tj. da je:

$$\lim_{t\to\infty} p_n(t) = p_n$$

- Iz uslova konzervacije protoka (protok na ulazu u sistem je jednak zbiru tokova izgubljenih korisnika i toka obrađenih korisnika) imamo relaciju:

$$A(t) = D(t) + L(t)$$
$$\Rightarrow \lambda = \gamma + P_L\lambda$$

- Servisni sistem je stabilan ako je vjerovatnoća da se sistem nalazi u praznom stanju različita od nule ($p_0 \neq 0$) i da je vjerovatnoća da u sistemu ima beskonačno mnogo korisnika jednaka ($p_\infty \to 0$).

Litlova teorema

- Litlova teorema kaže da za stabilan sistem važi relacija: $N = \gamma T$.
- Slikčna relacija se može primijeniti i na djelove servisnog sisterma: radionicu i čekaonicu.

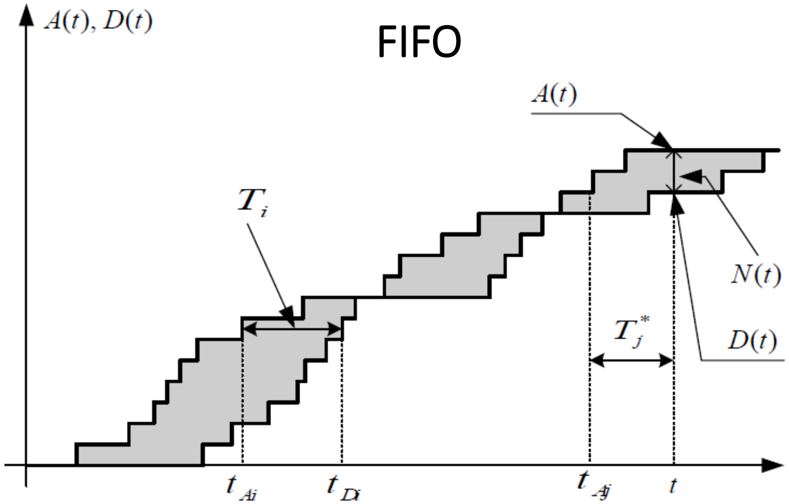
$$S(t) = \sum_{i=1}^{D(t)} T_i + \sum_{i=D(t)+1}^{A(t)} T_i^* = \int_0^t N(u)du$$

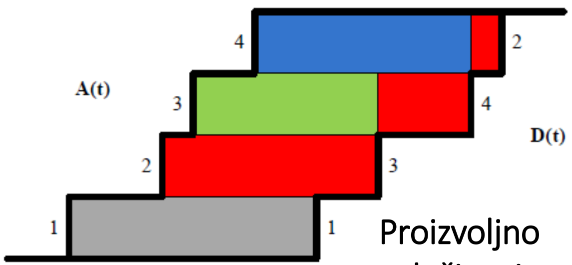
$$N = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t N(u)du = \lim_{t\to\infty} \frac{S(t)}{t}$$

$$T = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{D(t)} \sum_{t=1}^{D(t)} T_i$$

$$N = \lim_{t\to\infty} \frac{D(t)}{t}\left[\lim_{t\to\infty} \frac{1}{D(t)} \sum_{i=1}^{D(t)} T_i + \lim_{t\to\infty} \frac{1}{D(t)} \sum_{i=D(t)+1}^{A(t)} T_i^*\right]$$

Ako je sistem stabilan: $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{D(t)} \sum_{i=D(t)+1}^{A(t)} T_i^* = 0$





Proizvoljno psluživanje

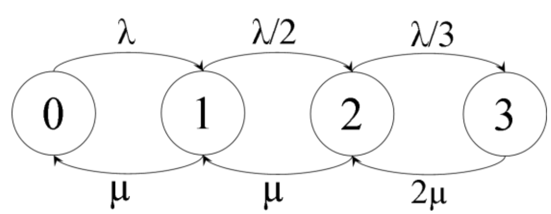
Markovljev lanac

- Specijalni slučaj stohastičkog procesa koji uzima samo diskretne vrijednosti, pri čemu stanje u trenutku t_{n+1} zavisi samo od stanja u neposrednom prethodnom trenutku t_n.
- Lanac se razvija u vremenu tranzicijama između stanja.
- Razvoj stohastičkog procesa se opisuje vrijednostima stanja u posmatranom trenutku, a ne vremenom provedenim u tom stanju.
- U slučaju da imamo da su trenuci tranzicija diskretni, radi se diskretnom lancu.
- Markovljev lanac "rađanja i umiranja":
  - U nekom određenom trenutku vremena ($t \to 0$) može se desiti neki od moguća 3 događaja:
    - Iz sistema je otišao jedan korisnik
    - U sistem je ušao jedan korisnik
    - Niti je ušao korisnik u sistem, niti je izašao iz njega

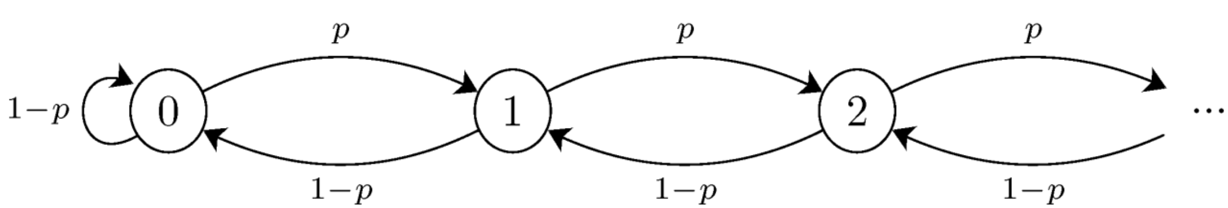
Markovljev lanac

- Opisuje se dijagramima stanja koji se sastoje od stanja (kružići) i dozvoljenih tranzicija između njih (linije sa strelicama).
- Kod lanaca kontinualnih u vremenu tranzicija se može javiti u bilo kom trenutku i opisane su parametrom eksponencijalne raspodjele.
- Kod lanaca diskretnih u vremenu tranzicija se može javiti u tačno definisanim trenucima i opisani su vjerovatnoćama tranzicija koje zavise od geometrijske raspodjele vremena zadržavanja u posmatranom stanju.
  - U ovom slučaju stanja mogu imati tranzicuju u same sebe.
  - Suma svih vjerovatnoća napuštanja stanja mora biti jednaka 1.

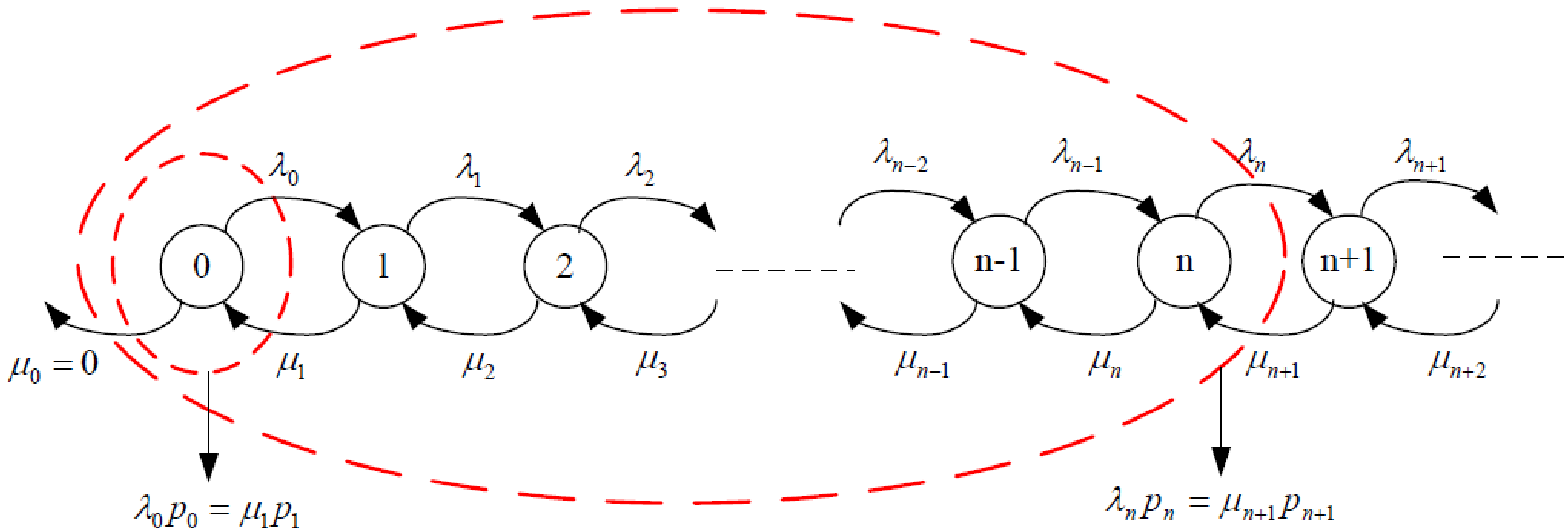
Kontinualni:



Diskretni:



Određivanje vjerovatnoće stanja



$$\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1 \Rightarrow p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0$$

$$\lambda_1 p_1 = \mu_2 p_2 \Rightarrow p_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} p_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} p_0$$

$$\vdots$$

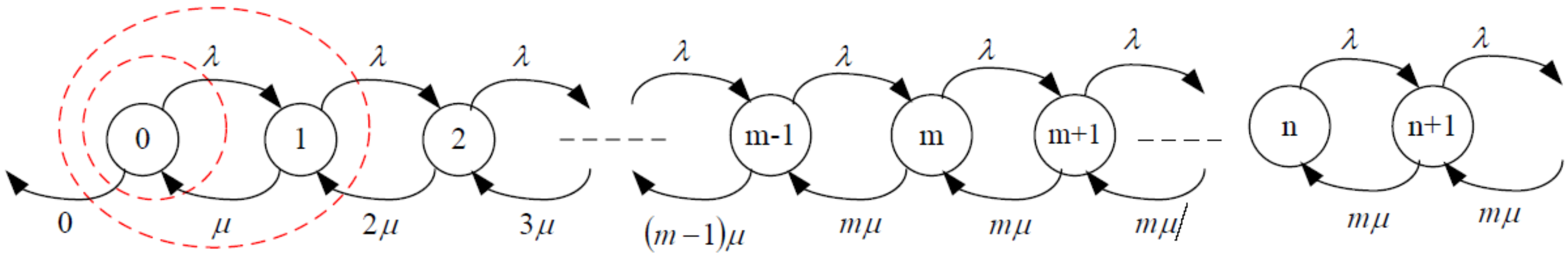
$$\lambda_{n-1} p_{n-1} = \mu_n p_n \Rightarrow p_n == \frac{\lambda_{n-1} \cdots \lambda_1 \lambda_0}{\mu_n \cdots \mu_2 \mu_1} p_0$$

S obzirom da važi: $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$

Dobija se:

$$\boxed{p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i}}}$$

M/M/m sistem



$$\mu p_1 = \lambda p_0 \Rightarrow p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$$

$$2\mu p_2 = \lambda p_1 \Rightarrow p_2 = \frac{\lambda}{2\mu} p_1 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} p_0$$

$$3\mu p_3 = \lambda p_2 \Rightarrow p_3 = \frac{\lambda}{3\mu} p_2 = \frac{\lambda^3}{3!\,\mu^3} p_0$$

$$\vdots$$

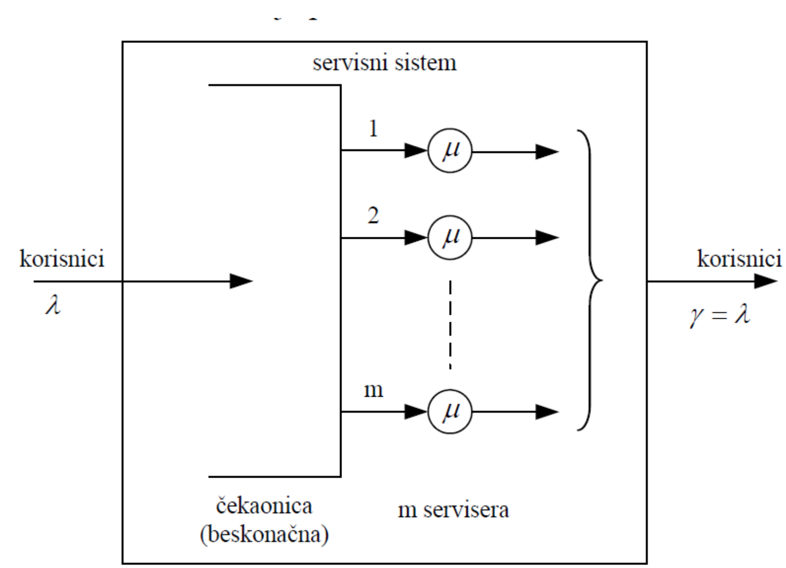
$$m\mu p_m = \lambda p_{m-1} \Rightarrow p_m = \frac{\lambda^m}{m!\,\mu^m} p_0$$

$$m\mu p_{m+1} = \lambda p_m \Rightarrow p_{m+1} = \frac{\lambda^{m+1}}{m \cdot m!\,\mu^{m+1}} p_0$$

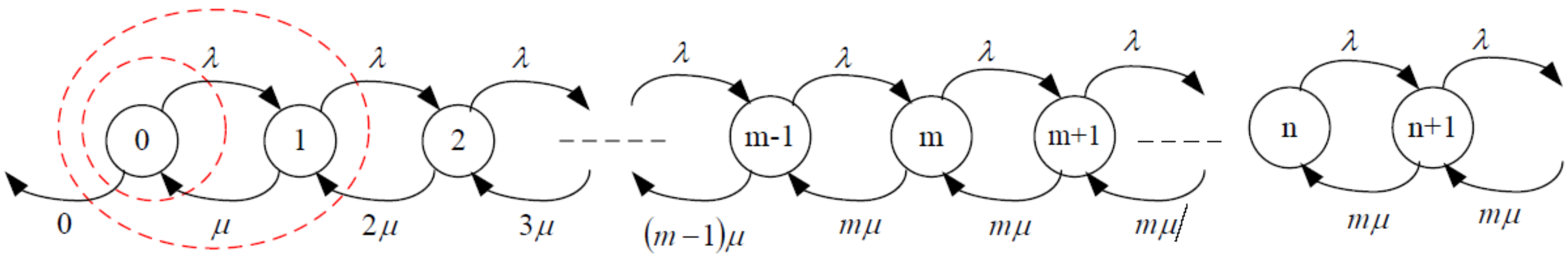
$$\vdots$$

$$m\mu p_n = \lambda p_{n-1} \Rightarrow p_n = \frac{\lambda^n}{m^{n-m} m!\,\mu^n} p_0$$

$$\vdots$$



M/M/m sistem



$$p_n = \frac{(m\rho)^n}{n!} p_0 = \frac{A^n}{n!} p_0, \quad 1 \le n < m$$

$$p_n = \frac{m^m \rho^n}{m!} p_0 = \frac{A^n}{m^{n-m} m!} p_0, \quad n \ge m$$

$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu}$$ Iskorišćenje servisera

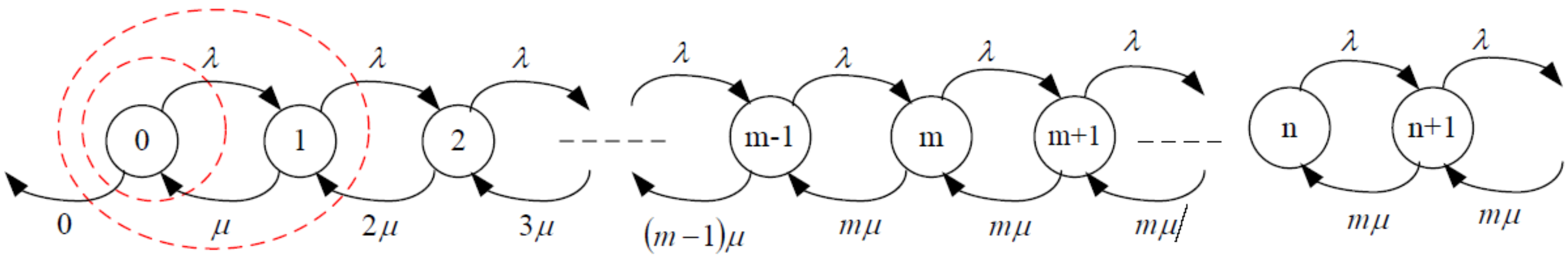
$$A = \frac{\lambda}{\mu}$$ Ponuđeno opterećenje

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{m-1} \frac{A^n}{n!} p_0 + \frac{m^m}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} \rho^n p_0 = 1$$

$$\Rightarrow p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{m-1} \frac{A^n}{n!} + \frac{m^m}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} \rho^n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{m-1} \frac{A^n}{n!} + \frac{m^m}{m!} \rho^m \frac{1}{1-\rho}}$$

Da bi sistem bio stabilan mora biti ispunjen uslov da je iskorišćenje servisera manje od 1 (serviser mora povremeno biti nezauzet tj. sistem mora povremeno biti prazan).

M/M/m sistem



Vjerovatnoća čekanja P_Q je vjerovatnoća da korisnik po ulasku u servisni sistem mora da čeka tj. u tom momentu su svi serviseri zauzeti:

$$P_Q = \sum_{n=m}^{\infty} p_n = \frac{m^m}{m!} \frac{\rho^m}{1-\rho} p_o$$

$$\Rightarrow P_Q = \frac{\dfrac{A^m}{m!(1-\rho)}}{\sum\limits_{n=0}^{m-1} \dfrac{A^n}{n!} + \dfrac{A^m}{m!(1-\rho)}} = E_2(m, A),$$

Erlangova C formula!

M/M/m sistem

- Srednje vrijeme servisiranja T_S je srednje vrijeme eksponencijalne raspodjele jer je servisiranje kod M/M/m sistema po eksponencijalnoj raspodjeli:

$$T_s = \frac{1}{\mu}$$

- Na osnovu Litlove teoreme imamo da je srednji broj korisnika u radionici:

$$N_s = \lambda T_s = \frac{\lambda}{\mu} = A$$

- Srednji broj korisnika u čekaonici N_Q je:

$$N_Q = \sum_{n=m}^{\infty}(n-m)p_n = \sum_{n=m}^{\infty}(n-m)\frac{m^m\rho^n}{m!}p_0 = \frac{m^m\rho^m}{m!}p_0\sum_{n=m}^{\infty}(n-m)\rho^{n-m} =$$

$$= \frac{m^m\rho^m}{m!}p_0\sum_{n=0}^{\infty}n\rho^n = \frac{m^m\rho^m}{m!}p_0\rho\sum_{n=0}^{\infty}n\rho^{n-1} = \frac{m^m\rho^m}{m!}p_0\rho\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dn}\left(\rho^n\right) =$$

$$= \frac{m^m\rho^m}{m!}p_0\rho\frac{d}{dn}\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n = \frac{m^m\rho^m}{m!}p_0\rho\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{1-\rho}\right) = \frac{m^m\rho^m}{m!}p_0\frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

$$\Rightarrow N_Q = \frac{\rho}{1-\rho}P_Q$$

M/M/m sistem

- Na osnovu Litlove teoreme je srednje vreme čekanja korisnika T_Q:

$$T_Q = \frac{N_Q}{\lambda} = \frac{\rho}{1-\rho}\frac{P_Q}{\lambda}$$

- Srednji broj korisnika u sistemu *N* je jednak zbiru srednjeg broja korisnika u radionici N_S i čekaonici N_Q:

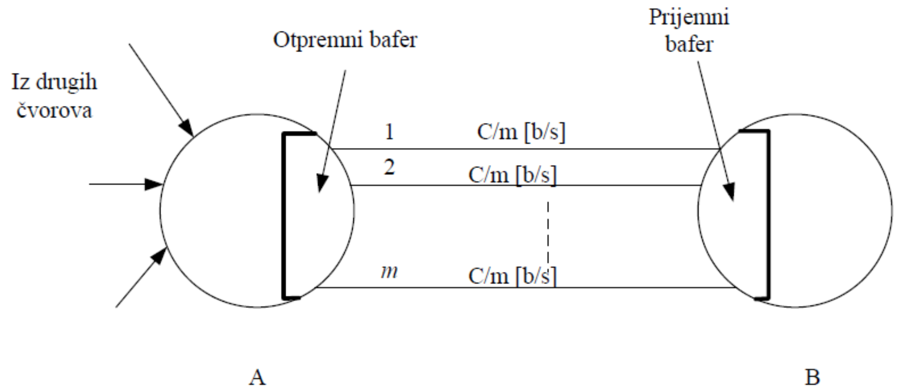
$$N = N_Q + N_S = A + \frac{\rho}{1-\rho}P_Q$$

- Srednje vreme zadržavanja korisnika u sistemu *T* je jednako zbiru srednjeg vremena čekanja T_Q i srednjeg vremena servisiranja korisnika T_S:

$$T = T_Q + T_S = \frac{\rho}{1-\rho}\frac{P_Q}{\lambda} + \frac{1}{\mu}$$

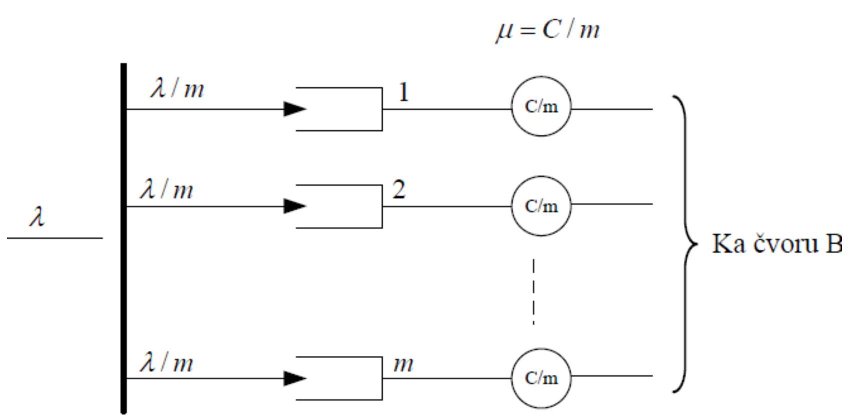
M/M/m primjeri primjene

- Jedan od primjera primjene je analiza prenosa jedinica podataka preko linka između dva komunikaciona čvora, pri čemu pretpostavljamo da su baferi dovoljno veliki da ne može da dođe do gubitaka.
- Pri tome, takođe pretpostavljamo da jedinice podataka pristižu kao Paosonov tok, a dužina jedinice podataka je u stvari količina posla koja treba da se obradi i pretpostavljamo a da dužina jedinice podataka ima eksponencijalnu raspodjelu.
- Ukupan kapacitet linkova između dva posmatrana komunikaciona čvora je *C* [b/s], a broj linkova je *m*, pri čemu su svi istih kapaciteta. Tada za analizu ovog sistema u zavisnosti od multipleksiranja jedinica podataka koristimo jedno od sledeća dva modelovanja posmatranog sistema:
  - **Sistematsko multipleksiranje** – Model se sastoji od *m* M/M/1 sistema
  - **Statističko multipleksiranje** – Model se sastoji od jednog M/M/m sistema



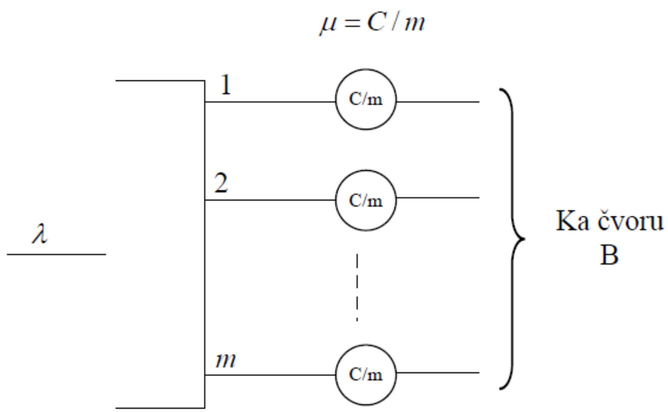
M/M/m primjeri primjene

- Za slučaj sistematskog multipleksiranja svaki link ima svoj bafer u koji se smještaju korisnici tj. jedinice podataka.
- Jedinice podataka koje treba da se proslijede prema komunikacionom čvoru B se prosleđuju na neki od *m* linkova sa podjednakom vjerovatnoćom koja iznosi *1/m*.
- Protok podataka na svakom linku je λ /*m*, gde je λ protok podataka ka komunikacionom čvoru B.
- Moć servisera tj. linka je *C/m*. Tako da ovde imamo *m* M/M/1 sistema.



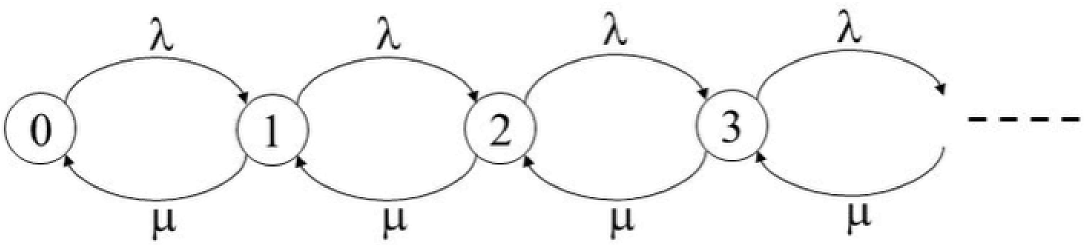
M/M/m primjeri primjene

- Kod statističkog multipleksiranja imamo jedan zajednički red čekanja za svih *m* linkova, tako da čim jedan link postane slobodan jedinica podataka se prosleđuje ka njemu.
- Ovdje je protok podataka u sistem λ, a moć servisera je i dalje *C/m*.
- Slučaj statističkog multipleksiranja povoljniji je sa stanovišta srednjeg zadržavanja u sistemu iz prostog razloga što se kod njega nikad ne može desiti da postoji korisnik koji čeka, a da pri tome postoji slobodan link.
- Takođe se pokazuje da je bolje imati jedan link kapaciteta *C*, nego *m* linkova čiji će ukupni kapacitet biti takođe *C*, sa stanovišta srednjeg vremena zadržavanja korisnika u sistemu što će biti pokazano nešto kasnije u okviru ove sekcije.



M/M/1 sistem

- U praksi se veoma često koristi za modelovanje telekomunikacionih sistema ili njihovih delova.



$$p_n = \rho^n p_0, \quad n \geq 1$$

$$\rho = A = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$p_0 = 1 - \rho$$

$$P_Q = 1 - p_0 = \rho$$

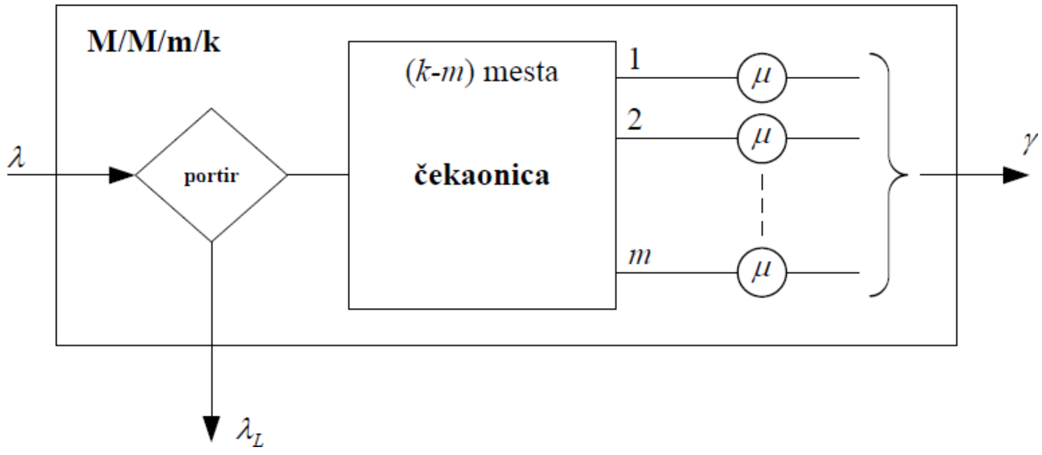
$$T_S = \frac{1}{\mu}; N_S = A$$

$$T_Q = \frac{\rho}{1-\rho}\frac{1}{\mu}; N_Q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

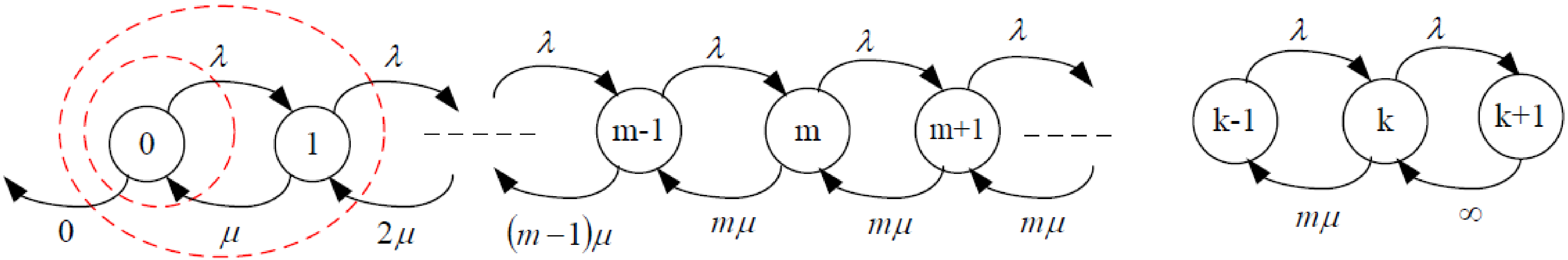
$$T = \frac{1}{\mu - \lambda}; N = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

M/M/m/k sistemi

- Poasonov tok dolazaka u sistem sa parametrom λ
- Eksponencijalna raspodjela vremena obrade korisnika sa parametrom μ
- *m* servisera
- Konačna čekaonica sa *k*−*m* mesta.
- FIFO disciplina posluživanja
- Sistemi konačnog kapaciteta su po prirodi stabilni jer kod njih ne može doći do nagomilavanja beskonačnog broja korisnika, već je to regulisano kroz mehanizam odbijanja korisnika.



M/M/m/k sistemi



$$\mu p_1 = \lambda p_0 \Rightarrow p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$$

$$2\mu p_2 = \lambda p_1 \Rightarrow p_2 = \frac{\lambda}{2\mu} p_1 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} p_0$$

$$3\mu p_3 = \lambda p_2 \Rightarrow p_3 = \frac{\lambda}{3\mu} p_2 = \frac{\lambda^3}{3!\,\mu^3} p_0$$

$$\vdots$$

$$m\mu p_m = \lambda p_{m-1} \Rightarrow p_m = \frac{\lambda^m}{m!\,\mu^m} p_0$$

$$m\mu p_{m+1} = \lambda p_m \Rightarrow p_{m+1} = \frac{\lambda^{m+1}}{m \cdot m!\,\mu^{m+1}} p_0$$

$$\vdots$$

$$m\mu p_k = \lambda p_{k-1} \Rightarrow p_k = \frac{\lambda^k}{m^{k-m} m!\,\mu^k} p_0$$

$$\infty p_{k+1} = \lambda p_k \Rightarrow p_{k+1} = 0$$

$$p_n = \frac{(m\rho)^n}{n!} p_0 = \frac{A^n}{n!} p_0, \quad 1 \le n < m$$

$$p_n = \frac{m^m \rho^n}{m!} p_0 = \frac{A^n}{m^{n-m} m!} p_0, \quad m \le n \le k$$

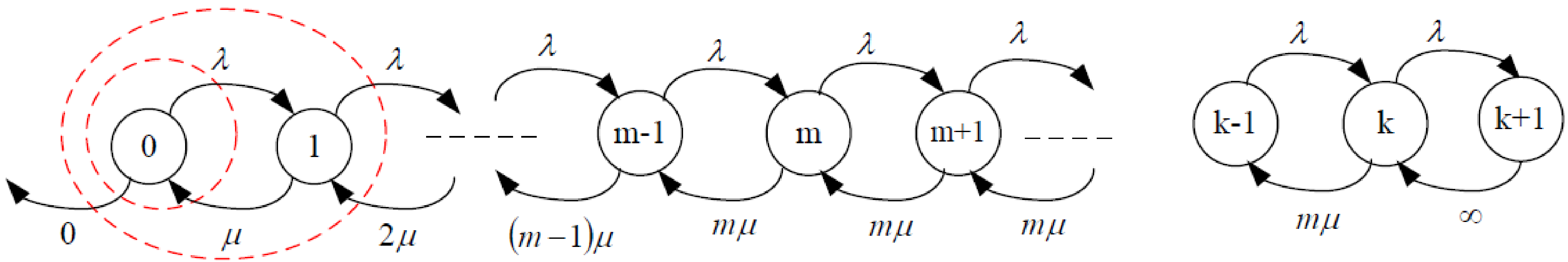
$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu}$$

$$A = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\sum_{n=0}^{k} p_n = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{m-1} \frac{A^n}{n!} p_0 + \frac{m^m}{m!} \sum_{n=m}^{k} \rho^n p_0 = 1$$

$$\Rightarrow p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{m-1} \frac{A^n}{n!} + \frac{m^m}{m!} \sum_{n=m}^{k} \rho^n} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{m-1} \frac{A^n}{n!} + \frac{m^m}{m!} \rho^m \frac{1-\rho^k}{1-\rho}}$$

M/M/m/k sistemi



- Vjerovatnoća blokade P_B je vjerovatnoća da se sistem nalazi u stanju *k* (sistem je pun) i po definiciji je P_B:

$$P_B = p_k = \frac{m^m \rho^k}{m!} p_0 = \frac{m^m \rho^k}{m!} \frac{1}{\sum_{n=0}^{m-1} \frac{A^n}{n!} + \frac{m^m}{m!} \rho^m \frac{1-\rho^k}{1-\rho}}$$

- Ponuđeni saobraćaj je saobraćaj koji korisnici nude servisnom sistemu, ali pošto je ovo sistem sa gubicima sav saobraćaj koji je ponuđen se ne ostvaruje, već samo dio. Ostvareni saobraćaj i definiše se kao:

$$A_S = \frac{\gamma}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu}(1 - P_L) = A(1 - P_L)$$

M/M/m/m sistemi

- Erlangov model
- Bez čekaonice
- Erlangov model je naročito korišćen u okviru klasične telefonije za modelovanje telefonskog saobraćaja.
- Formula za vjerovatnoće stanja p_n sistema M/M/m/m se još naziva i Erlangova raspodjela I reda: $E_1(n, m, A), n = 0,1, \dots m.$

$$p_n = \frac{(m\rho)^n}{n!} p_0 = \frac{A^n}{n!} p_0, \quad 1 \le n \le m$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{m} \frac{A^n}{n!}}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu}$$

$$A = \frac{\lambda}{\mu}$$

Vjerovatnoća blokiranja (Erlangova B formula) $\rightarrow$ $P_B = p_m = \dfrac{\dfrac{A^m}{m!}}{\sum_{n=0}^{m} \dfrac{A^n}{n!}}$

M/M/m/m sistemi

- Protok korisnika na izlazu iz sistema:

$$\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n p_n = \sum_{n=0}^{m} n\mu p_n = \mu \sum_{n=0}^{m} np_n = \mu N_S$$

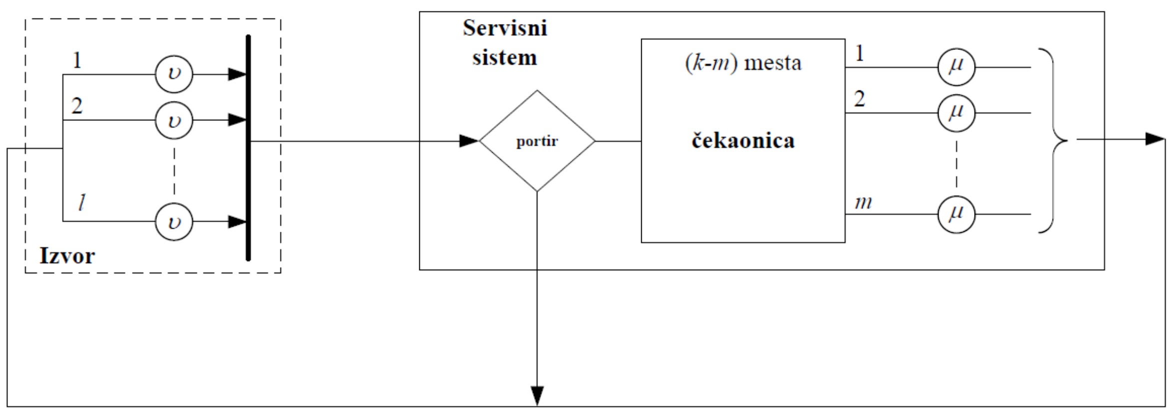
- N_s- srednji broj korisnika u radionici (srednji broj angažovanih servisera)
- Ostvareni saobraćaj:

$$A_S = \frac{\gamma}{\mu} = \frac{\mu N_S}{\mu} = N_S$$

- Srednje vrijeme servisiranja T_s je 1/μ jer je obrada korisnika po eksponencijalnoj raspodjeli sa parametrom μ.
- Pošto sistem nema čekaonicu onda je srednji broj korisnika u čekaonici nula, a isto važi i za srednje vrijeme čekanja korisnika.

M/M/m/k/l sistemi

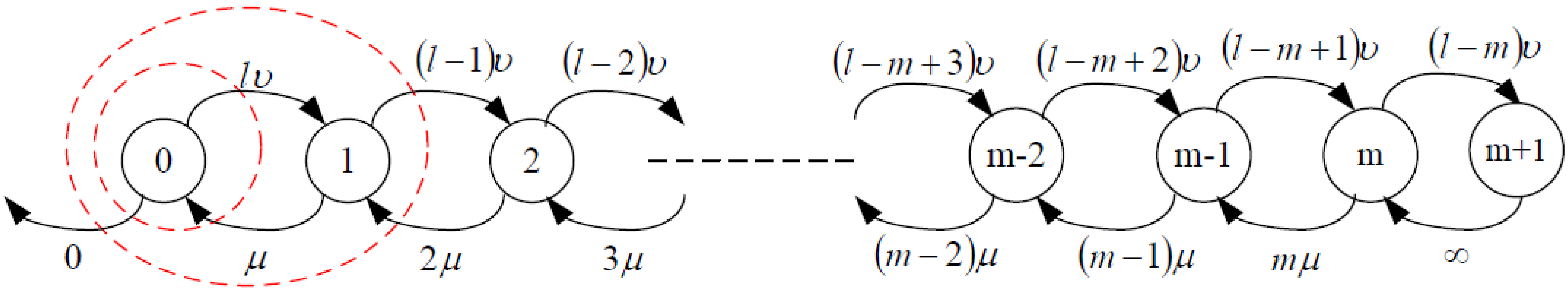
- Posanov tok dolazaka u sistem sa parametrom λ, esponencijalna raspodjela vremena obrade korisnika sa parametrom μ.
- *m* servisera
- Konačna čekaonica sa *k* −*m* mjesta
- FIFO disciplina posluživanja.
- Jedina razlika u odnosu na M/M/m/k
- Broj potencijalnih korisnika konačan i iznosi *l*.



M/M/m/k/l sistemi

- Po ovom modelu vrijeme zadržavanja korisnika u izvoru je slučajna promjenjiva koja ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom υ.
- U zavisnosti od odnosa između parametara *m, k* i *l* , imamo sledeće slučajeve:
  - $1 \leq l \leq m$, u ovom slučaju imamo sistem u kom nema odbijenih korisnika i u kom nema čekanja na servis
  - $m < l \leq k$, u ovom sistemu nema odbijenih korisnika, ali se može desiti da korisnici moraju da čekaju
  - $l > k$, u ovom sistemu može doći do odbijanja korisnika
- Specijalan slučaj M/M/m/m/l je Engsetov model (pretpostavljeno je da je $l \geq m$).
  - Ukoliko je $l >> m$ onda se ovaj sistem može aproksimirati Erlangovim modelom M/M/m/m.

Engsetova raspodjela



$$\mu p_1 = l\upsilon p_0 \Rightarrow p_1 = \frac{l\upsilon}{\mu} p_0 = \binom{l}{1} r p_0$$

$$2\mu p_2 = (l-1)\upsilon p_1 \Rightarrow p_2 = \frac{(l-1)\upsilon}{2\mu} p_1 = \frac{l(l-1)\upsilon^2}{2\mu^2} p_0 = \binom{l}{2} r^2 p_0$$

$$3\mu p_3 = (l-2)\upsilon p_2 \Rightarrow p_3 = \frac{(l-2)\upsilon}{3\mu} p_2 = \frac{l(l-1)(l-2)\upsilon^3}{3!\,\mu^3} p_0 = \binom{l}{3} r^3 p_0$$

$$\vdots$$

$$m\mu p_m = (l-m+1)\upsilon p_{m-1} \Rightarrow p_m = \frac{l(l-1)\cdots(l-m+1)\upsilon^m}{m!\,\mu^m} p_0 = \binom{l}{m} r^m p_0$$

$$\infty p_{m+1} = (l-m)\upsilon p_m \Rightarrow p_{m+1} = 0$$

$$r = \frac{\upsilon}{\mu}$$

$$p_n = \binom{l}{n} r^n p_0, \quad n = 0,1,2,\ldots,m$$

$$\sum_{n=0}^{m} p_n = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{m} \binom{l}{n} r^n p_0 = 1 \Rightarrow p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{m} \binom{l}{n} r^n}$$

$$\boxed{p_n = \frac{\binom{l}{n} r^n}{\sum_{i=0}^{m} \binom{l}{i} r^i}, \quad n = 0,1,2,\ldots,m}$$

Engsetova raspodjela

- Vjrovatnoće stanja sistema koja zatekne korisnik po ulasku u sistem:

$$q_n = \frac{\lambda_n p_n}{\sum\limits_{i=0}^{m} \lambda_i p_i} = \frac{(l-n)\upsilon \dfrac{\binom{l}{n} r^n}{\sum\limits_{j=0}^{m} \binom{l}{j} r^j}}{\sum\limits_{i=0}^{m} (l-i)\upsilon \dfrac{\binom{l}{i} r^i}{\sum\limits_{j=0}^{m} \binom{l}{j} r^j}} = \frac{\binom{l-1}{n} r^n}{\sum\limits_{i=0}^{m} \binom{l-1}{i} r^i} = p_n(l-1)$$

$$\lambda_n = (l-n)\upsilon$$

- U ovom sistemu osobina PASTA ne važi.

Engsetova raspodjela

- Intezitet ponuđenog saobraćaja *A:*

$$A = \frac{E\{\lambda_n\}}{\mu} = \frac{\sum_{i=0}^{m} \lambda_i p_i}{\mu} = r \frac{\sum_{i=0}^{m} \binom{l-1}{i} r^i}{\sum_{j=0}^{m} \binom{l}{j} r^j}$$

- Intezitet ostvarenog saobraćaja:

$$A_S = N_S = E\{i\} = \sum_{i=0}^{m} i p_i = \sum_{i=0}^{m} i p_0 \binom{l}{i} r^i = \frac{l}{\sum_{j=0}^{m} \binom{l}{j} r^j} \sum_{i=1}^{m} \binom{l-1}{i-1} r^i$$

Engsetova raspodjela

- Vjerovatnoća blokiranja:

$$P_B = p_m = \frac{\binom{l}{m} r^m}{\sum_{i=0}^{m} \binom{l}{i} r^i}$$

- Vjerovatnoća gubitka korisnika:

$$P_L = q_m = \frac{\binom{l-1}{m} r^m}{\sum_{i=0}^{m} \binom{l-1}{i} r^i} = \frac{A - A_S}{A}$$