

# Vježbe 4

## Komutacioni sistemi

# Primjer 1

Na ulaz E1 multipleksera dolazi prosječno 2000 paketa u sekundi saglasno Poasonovoj raspodjeli. Ako je srednja veličina paketa 1000 bita koliko iznosi srednji broj paketa u multiplekseru i srednje kašnjenje u prenosu paketa koje multiplekser unosi?

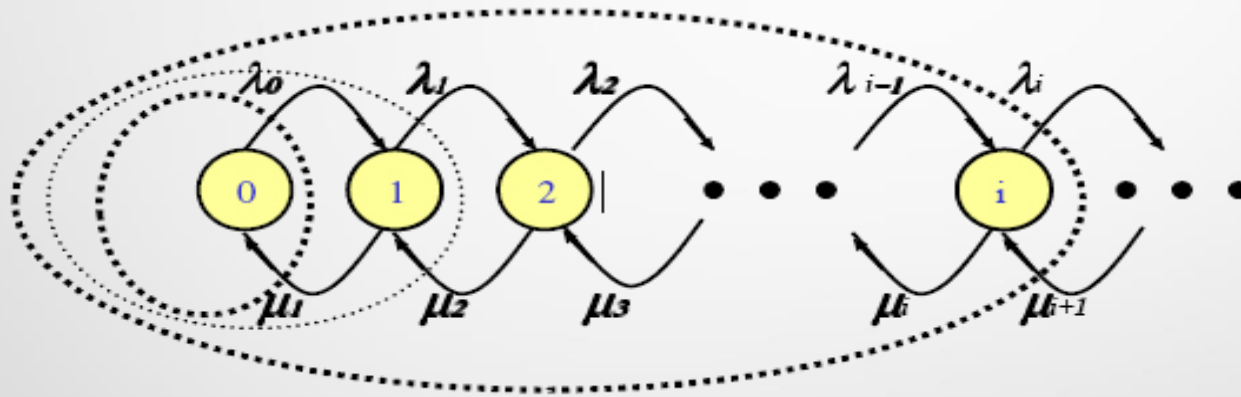
# Primjer 1

U pitanju je M/M/1 red čekanja.

- Poasonov dolazni proces srednje dolazne brzine  $\lambda$
- Eksponencijalno vrijeme posluživanja parametra  $\mu$
- Jedan server
- Beskonačna širina liste čekanja
- Beskonačan broj izvora saobraćaja

# Primjer 1

U opštem slučaju dijagram stanja za proces rađanja i umiranja je



Iz balansnih jednačina za svaki presjek:

$$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1 \Rightarrow P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

# Primjer 1

$$\lambda_1 P_1 = \mu_2 P_2 \Rightarrow P_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} P_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} P_0$$

...

$$\lambda_{i-1} P_{i-1} = \mu_i P_i \Rightarrow P_i = \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} P_{i-1} = P_0 \prod_{n=1}^i \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}, \forall i \geq 1$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} P_i = 1 \Rightarrow P_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{P_i}{P_0} = 1 \Rightarrow P_0 \left( 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{n=1}^i \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \right) = 1 \Rightarrow P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \prod_{n=1}^i \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}}$$

# Primjer 1

$$\lambda_i = \lambda,$$

$$\mu_i = \mu,$$

pa slijedi:

$$P_i = P_0 \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^i = P_0 \rho^i$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} \rho^i} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i} = 1 - \rho$$

$$P_i = (1 - \rho) \rho^i, \quad i \geq 0$$

# Primjer 1

$$P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} (1-\rho) \rho^i z^i = \frac{1-\rho}{1-z\rho}$$

$$N = \sum_{i=0}^{\infty} i(1-\rho) \rho^i z^i = \left. \frac{dP(z)}{dz} \right|_{z=1} = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$T = \frac{N}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$\gamma = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(1-\rho) \rho^i = \mu(1-P_0)$$

# Primjer 1

$$\lambda = 2000 \text{ paketa / s,}$$

$$\mu = 2.048 \text{ Mb / s} = 2048 \text{ paketa / s}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0.9765$$

pa slijedi:

$$N = \frac{\rho}{1 - \rho} = 41.55$$

$$T = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{48} \text{ s}$$



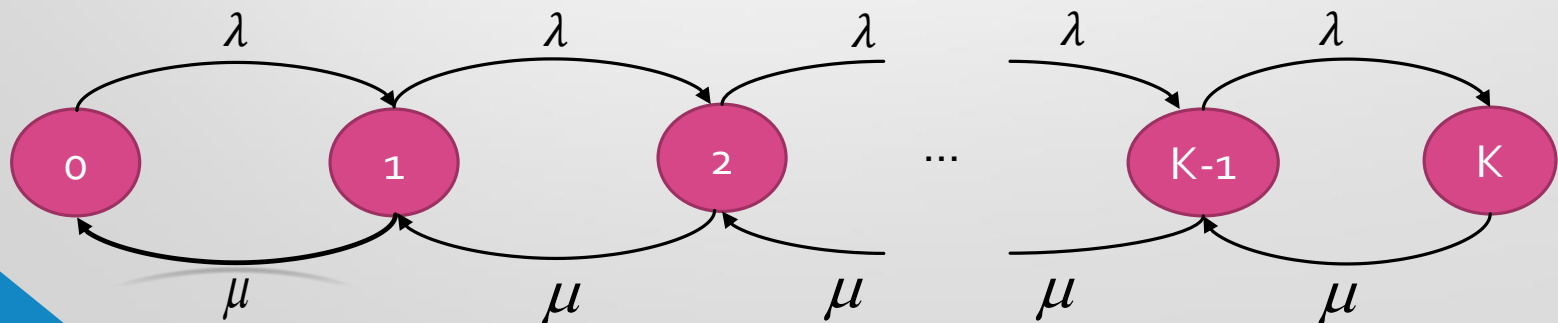
## Primjer 2

Primijeniti model  $M/M/1/K$  na multiplekser govornih poruka. Poruke veličine 1000b se prenose preko E1 linije kapaciteta 2.048Mb/s. Dok čekaju prenos poruke se smještaju u bafer kapaciteta  $10^6$  bita. Izračunati vjerovatnoću gubitka poruka u funkciji brzine dolaska poziva.

# Primjer 2

Za M/M/1/K red čekanja

- Poasonov dolazni proces srednje dolazne brzine  $\lambda$
- Eksponencijalno vrijeme posluživanja parametra  $\mu$
- Jedan server
- K-1 mjesta u redu čekanja
- Beskonačan broj izvora saobraćaja



## Primjer 2

$$\lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1 \Rightarrow P_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} P_0$$

Iz balansnih jednačina za svaki presjek:

$$P_i = P_0 \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^i = P_0 \rho^i$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^K \rho^i} = \frac{1}{\sum_{i=0}^K \rho^i} = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{K+1}}$$

## Primjer 2

$$P_B \equiv P_K = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \rho^K$$

$$\mu = 2.048 \text{ Mb/s}, K = 10^6 + 1, \rho = \frac{\lambda}{\mu},$$

Vjerovatnoća blokiranja je:

$$P_b = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} \rho^K = \frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{K+1}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^K$$

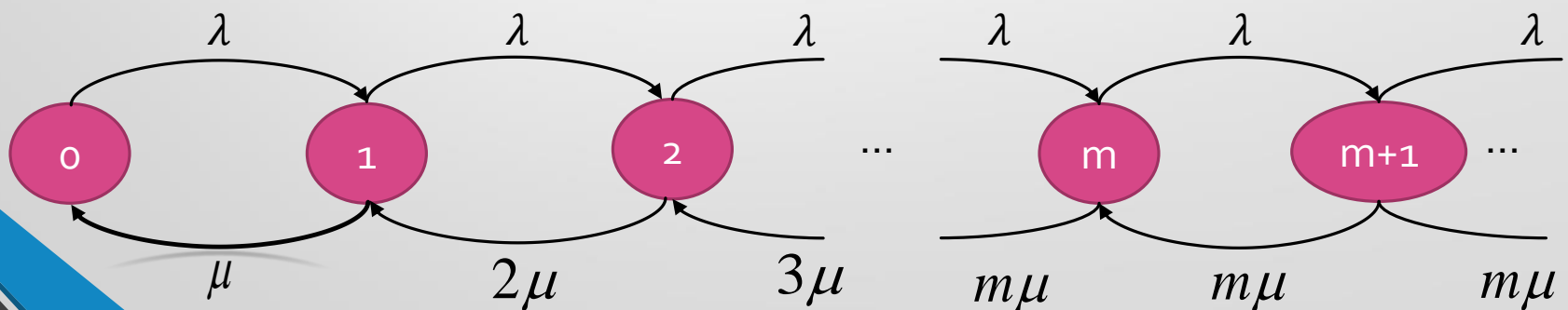
## Primjer 3

Pretpostavimo da je na raspolaganju linija koja omogućava brzinu prenosa od 40kb/s. Ova linija se može koristiti na dva načina: kao vremenski multipleks od četiri 10kb/s kanala ili linija od 40kb/s bez multipleksa. Pretpostavimo da poruke dolaze Poasonovom brzinom i da imaju eksponencijalnu raspodjelu. Prvi slučaj se može aproksimirati sistemom M/M/4, a drugi M/M/1. Za srednju dolaznu brzinu od 30 Kb/s odrediti srednje kašnjenje.

# Primjer 3

Za M/M/m red čekanja

- Poasonov dolazni proces srednje dolazne brzine  $\lambda$
- Eksponencijalno vrijeme posluživanja parametra  $\mu$
- $m$  servera
- Beskonačan broj mjesta u redu čekanja
- Beskonačan broj izvora saobraćaja



# Primjer 3

$$\lambda P_o = \mu P_1 \Rightarrow P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_o = A P_o$$

$$\lambda P_o = 2\mu P_1 \Rightarrow P_2 = \frac{\lambda}{2\mu} P_1 = \frac{A^2}{2} P_o$$

...

$$\lambda P_{m-1} = m\mu P_1 \Rightarrow P_m = \frac{\lambda}{m\mu} P_{m-1} = \frac{A^m}{m!} P_o$$

$$\lambda P_m = m\mu P_{m+1} \Rightarrow P_{m+1} = \frac{\lambda}{m\mu} P_m = \frac{A^{m+1}}{m \cdot m!} P_o$$

...

$$P_o = \frac{1}{\sum_{i=0}^{m-1} \frac{A^i}{i!} + \sum_{i=m}^{\infty} \frac{A^i}{m! m^{i-m}}} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{m-1} \frac{A^i}{i!} + \frac{mA^m}{m!(m-A)}}$$

# Primjer 3

$$m = 4$$

$$A = \frac{\lambda}{\mu} = 3$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{3}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{4 \cdot 3^4}{4!(4-3)}} = 0.037$$

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P_k = P_0 \left( \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(zA)^k}{k!} + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(zA)^k}{m! m^{k-m}} \right)$$

$$P(z) = 0.037 \left( \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(zA)^k}{k!} + \frac{m(zA)^m}{m!(m - zA)} \right)$$



# Primjer 3

$$P(z) = \left( \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(zA)^k}{k!} + \frac{m(zA)^m}{m!(m-zA)} \right) 0.037$$

$$\frac{d}{dz} P(z) = \left( \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A^k}{k!} k z^{k-1} + \frac{A^m}{(m-1)!} \left( \frac{m z^{m-1}}{(m-zA)} + \frac{z^m A}{(m-zA)^2} \right) \right) 0.037$$

$$N = \frac{d}{dz} P(z=1) = \left( \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A^k}{k!} k + \frac{A^m}{(m-1)!} \left( \frac{m}{(m-A)} + \frac{A}{(m-A)^2} \right) \right) 0.037$$

$$N = \frac{d}{dz} P(z=1) = \left( \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A^k}{k!} k + \frac{A^m}{(m-1)!} \frac{m^2 - mA + A}{(m-A)^2} \right) 0.037$$

## Primjer 3

$$T = \frac{N}{\lambda}, \quad \mu = 10 \text{ Kb/s}, \quad \lambda = 30 \text{ Kb/s}, \quad A = 3, \quad m = 4$$

$$T = \frac{\left( \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A^k}{k!} k + \frac{A^m}{(m-1)!} \frac{m^2 - mA + A}{(m-A)^2} \right) 0.037}{\lambda}$$

$$T = \frac{0.037}{30 \cdot 10^3} \left( 3 + \frac{3^2}{2!} 2 + \frac{3^3}{3!} 3 + \frac{3^4}{(4-1)!} \frac{4^2 - 4 \cdot 3 + 3}{(4-3)^2} \right)$$

$$T = \frac{0.037}{30 \cdot 10^3} 57 = 0.07 \text{ ms}$$

# Primjer 3

Za M/M/1 red čekanja:

$$\mu = 40Kb / s, \lambda = 30Kb / s,$$

$$T = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{10 \cdot 10^3} = 0.1ms$$

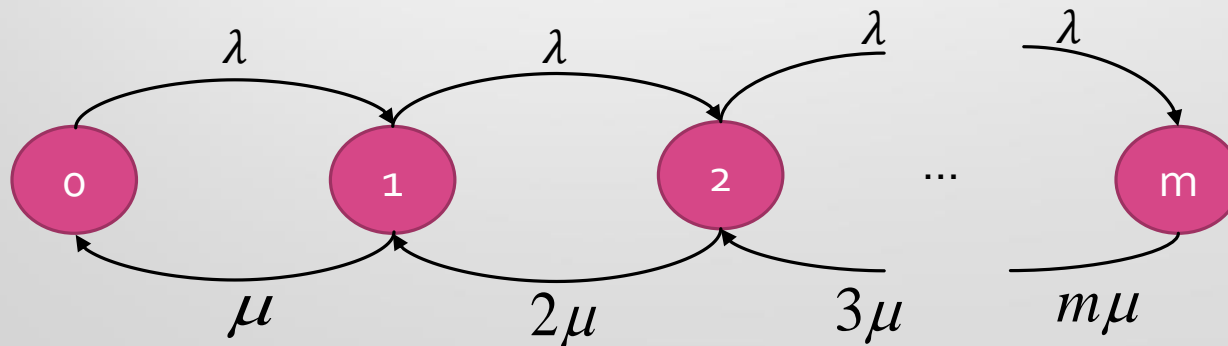
## Primjer 4

Poruke konstantne veličine od 1000 bita stižu na multiplekser koji ima 16 izlaza, od kojih svaki funkcionira brzinom 50kb/s. Pretpostaviti da poruke dolaze prosječnom brzinom od 1440000 poruka tokom ČNO. Nema prostora za baferovanje, tako da ako se poruka odmah ne posluži biva izgubljena. Izračunati vjerovatnoću blokiranja.

# Primjer 4

Za M/M/m/o red čekanja

- Poasonov dolazni proces srednje dolazne brzine  $\lambda$
- Eksponencijalno vrijeme posluživanja parametra  $\mu$
- m servera
- Nema prostora za baferovanje
- Beskonačan broj izvora saobraćaja



## Primjer 4

$$P_i = \frac{A^i}{i!} P_o$$

$$P_o = \frac{1}{\sum_{i=1}^m \frac{A^i}{i!}}$$

$$P_B = P_m = \frac{A^m}{m! \sum_{i=0}^m \frac{A^i}{i!}}$$

## Primjer 4

$$L = 1000b$$

$$S = 16$$

$$\mu = 50Kb / s$$

$$\lambda = 1440000 \text{ poruka} / h = 400Kb / s$$

$$A = \frac{\lambda}{\mu} = 8$$

$$P_b = P_s = \frac{A^m}{m! \sum_{i=0}^m \frac{A^i}{i!}} = \frac{8^{16}}{16! \sum_{i=0}^{16} \frac{8^i}{i!}} = \frac{13.45}{\sum_{i=0}^{16} \frac{8^i}{i!}} = 0.0045 = 0.45\%$$

## Primjer 5

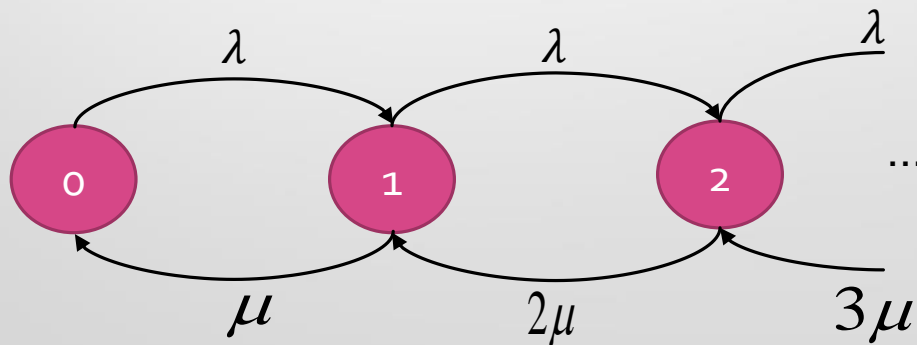
Poruke konstantne veličine stižu na multiplekser koji ima  $N$  izlaza, od kojih svaki funkcionira brzinom  $50\text{kb/s}$ . Koliko iznosi srednje kasnjenje? Može se smatrati da je  $N$  veoma veliko.



# Primjer 5

Za  $M/M/\infty$  red čekanja

- Poasonov dolazni proces srednje dolazne brzine  $\lambda$
- Eksponencijalno vrijeme posluživanja parametra  $\mu$
- Beskonačan broj servera
- Beskonačno mjesta u baferu
- Beskonačan broj izvora saobraćaja



## Primjer 5

$$P_i = \frac{A^i}{i!} P_o$$

$$P_o = \frac{1}{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^i}{i!}}$$

$$P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i A^i}{i!} e^{-A} = e^{-A} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(zA)^i}{i!} = e^{-A} e^{zA} = e^{A(z-1)}$$

## Primjer 5

$$N = \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{A^i}{i!} e^{-A} = \frac{dP(z)}{dz} \Big|_{z=1} = A e^{A(z-1)} \Big|_{z=1} = A$$

$$T = \frac{N}{\lambda} = \frac{1}{\mu}$$

$$T = 1 / 50 \text{ Kb} / \text{s} = 0.02 \text{ ms}$$