Drugo predavanja 08. 10. 2020. godine

DETERMINANTE

Determinante prvog drugog i trećeg reda

Definition 1. Neka je $A = (a_{11})$ matrica reda 1×1. Determinanta matrice A u oznaci $\det A$ je broj a_{11}.

Definition 2. Neka je

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

matrica reda 2×2. Determinanta matrice A je

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Example 1. Ako je

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},$$

to je $\det A = 10$.

Sada ćemo definisati determinantu matrice reda 3×3. Neka je

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Svakom elementu a_{ij} pridružujemo broj M_{ij} na sledeći način. Označimo sa B_{ij} matricu reda 2×2 koja se dobija od matrice A tako što se izbriše i-ta vrsta i j-ta kolona. Broj $M_{ij} = \det B_{ij}$ i za njega se kaže da je *minor* elementa a_{ij}. Dakle, postoje sledeći minori:

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Definition 3. Algebarski kofaktor ili komplement elementa a_{ij} matrice A je broj $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, gdje je M_{ij} minor elementa a_{ij}.

Jasno da se algebarski kofaktorA_{ij} i minor M_{ij} mogu razlikovati samo u znaku.

Definition 4. Neka je A matrica reda 3×3. Determinanta matrice A je

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

gdje su A_{11}, A_{12}, A_{13} algebarski kofaktori elemenata a_{11}, a_{12}, a_{13} redom.

Determinanta ne zavisi od izbora vrste ili kolone, to jest važi sldeće:

Theorem 1. (**Laplas**) *Determinanta trećeg reda je jedanka zbiru proizvoda elemenata jedne vrste ili kolone i njihovih algebarskh kofaktora*

$$detA = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j},$$

za sve $i, j = 1, 2, 3$.

Remark 1. Postoji način za lakše računaje determinante trećeg stepena. Determinanti se dopišu prva i druga kolona, a zatim se vrši množenje elemenata na glavnoj dijagonali i na dijagonalama paralelenim glavnoj dijagonali i ova tri proizvoda se uzimaju sa znakom $+$, nakon toga se vrši množenje elemenata na sporednoj dijagonali i na dijagonalama paralelenim sporednoj dijagonali i ova tri proizvoda se uzimaju sa znakom $-$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Example 2.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 5 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 10.$$

Svojstva determinanti:

- Vrijednost determinante se ne mijenja ako se sve vrste zamijene odgovarajućim kolonama, to jest $\det A = \det A^T$.
- Pri zamjeni mjesta dvije vrste ili dvije kolone determinanta mijenja znak.
- Determinanta u kojoj su jednake dvije vrste ili dvije kolone je jedanka nuli.
- Zajednički množitelj svih elemenata u jednoj vrsti ili jednoj koloni se može iznijeti ispred determinante.
- Ako su svi elementi jedne vrste ili jedne kolone jednaki nuli, onda je i determinanta jednaka nuli.

- Ako su svi elementi ispod ili iznad glavne dijagonale jednaki nuli, determinanta je jednaka proizvodu elemenata na glavnoj dijagonali.
- Vrijednost determinante se ne mijenja ako se elementima jedne vrste (kolone) dodaju elementi neke druge vrste (kolone) pomnoženi istim brojem.

Determinanta proizvoljnog reda

Neka je data matrica

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

gdje je $n \geq 1$. Neka je A_{ij} podmatrica matrice A koja se dobija kada se u matrici A uklone i-ta vrsta i j-ta kolona, $M_{ij} = \det A$ i $B_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Kao i ranije broj M_{ij} nazivamo minorom koji odgovara elementu a_{ij}, dok broj B_{ij} nazivamo algebarskim komplementom ili kofaktorom elelmenta a_{ij}.

Definition 5. Neka je i fiksiran broj koji može biti $1, \dots, n$. Determinanta matrice A u oznaci $\det A$ ili

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

je broj

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} B_{ij} = a_{i1} B_{i1} + a_{i2} B_{i2} + \dots + a_{in} B_{in}. \tag{1}$$

Važi sledeća teorema Laplasa:

Theorem 2. *Determinanta matrice A ne zavisi od izbora broja $i = 1, \dots, n$ to jest izraz* (1) *je isti za sve $i = 1, \dots, n$.*

Determinante proizvoljnog reda imaju ista svojstva koja su na predavanjima navedena za determinante trećeg reda.

Primjer.

Izračunati determinantu

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Pomnožimo prvu vrstu sa 2 i oduzmimo od druge vrste, zatim prvu vrstu pomnožimo sa 3 i oduzmemo od treće vrste i još prvu vrstu pomnožimo sa 4 i oduzmemo od četvrte vrste. Dobijamo da je

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & -4 & -8 & -10 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \end{vmatrix}.$$

Možemo iz druge vrste da izvojimo (-1), iz treće vrste da izdvojimo (-2), a iz četvrte vrste da izdvojimo (-5). Dobijamo da je

$$\det A = (-10) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Primjenjujemo da je $\det A = \det A^T$, pa je

$$\det A = (-10) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Ako razvijemo ovu determinantu po prvoj vrsti dobijamo da je

$$\det A = (-10) \cdot 1 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 5 & 5 & 3 \end{vmatrix}.$$

Možemo da pomnožimo treću kolonu sa (-3) i dodamo prvoj koloni, a zatim treću kolonu pomnožimo sa (-2) i dodamo drugoj koloni. Dobijamo da je

$$\det A = (-10)\cdot 1 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-10)\cdot 1 \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = (-10)\cdot 2 = -20.$$

Inverzna matrica

Pojam adjungovne matrice. Data je kvadratna matrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Uveli smo pojam algebarskog komplementa $B_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Neka je matrica B data sa:

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nn} \end{pmatrix}.$$

Adjungovana matrica za A je matrica $\mathrm{adj}A = B^T$ to jest

$$\mathrm{adj}A = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{21} & \dots & B_{n1} \\ B_{12} & B_{22} & \dots & B_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{1n} & B_{2n} & \dots & B_{nn} \end{pmatrix}.$$

Postupak za nalaženje adjungovane matrice:

(1) Odrediti sve algebarske kofaktore B_{ij} matrice A.
(2) Formirati matricu B čiji su elementi B_{ij}.
(3) Odrediti transponovanu matricu B^T za B.
(4) Važi da je $\mathrm{adj}A = B^T$.

Primjer. Odrediti adjungovanu matricu za matricu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Algebarski kofaktori matrice A su

$$B_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -48, B_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 42, B_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3.$$

Na sličan način se dobija da je

$$B_{21} = 24, B_{22} = -21, B_{23} = 6, \text{ zatim } B_{31} = -3, B_{32} = 6, B_{33} = -3.$$

Matrica B je data sa

$$B = \begin{pmatrix} -48 & 42 & -3 \\ 24 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Zato je

$$\mathrm{adj}A = B^T = \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Definition 6. Za matricu u oznaci A^{-1} se kaže da je inverzna matriza za kvadratnu matricu A ako je

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

gdje je E jedinična matrica.

Ako matrica A ima inverznu matricu, tada je ona jedinstvena i važi da je $(A^{-1})^{-1} = A$.

Definition 7. Za kvadratnu maticu se kaže da je regularna ako je njena determinanta različita od nule.

Theorem 3. *Ako je kvadratna matrica A regularna, tada ona ima inverznu matricu A^{-1} i ona je data sa*

$$A^{-1} = \frac{1}{detA} adjA.$$

Ako matrica A nije regularna ona nema inverznu matricu.

Postupak za nalaženje inverzne matrice za matricu A:

(1) Izračunati $\det A$.
(2) Ako je $\det A \neq 0$ postupak nastaviti. Ako je $\det A = 0$ zaključiti da A nema inverznu matricu.
(3) Odrediti adjungovanu matricu $\mathrm{adj} A$ za A.
(4) Odrediti matricu $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \mathrm{adj} A$.

Primjer. Odrediti invenznu matricu za

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Prvo nalazimo

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Kako je $\det A \neq 0$, zaključujemo da A ima inverznu matricu A^{-1}. Algebarski kofaktori za A su:

$$B_{11} = 2,\ B_{12} = -5,\ B_{21} = -1,\ B_{22} = 3,$$

pa je

$$\mathrm{adj} A = B^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dobijamo da je

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \mathrm{adj} A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$