Prvo predavanje, 01.10. 2021. godine

MATRICE

Pojam matrice:

Definition 1. Matrica A reda $m \times n$ je pravougaona tablica koja se sastoji od m vrsta i n kolona, a čiji su elementi brojevi ili neki drugi matematički izrazi, koji se označavaju sa a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots n$ i nazivaju elementima matrice.

Matrica sa A sa elementima a_{ij} označava se sa

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Elementi $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ čine i-tu vrstu matrice A, dok elementi $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$ čine j-tu kolonu matrice A.

Matrica reda 1×1 se sastoji od jednog broja, odnosno ima oblik $A = (a_{11})$.

Example 1. Matrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & x & 2y \\ 2 & 4 & y^2 & xy \\ 3 & xy^2 & x^2 & 6 \end{pmatrix}.$$

je reda 3×4 i njeni elementi su: $a_{11} = 1, a_{12} = 7, a_{13} = x, a_{14} = 2y, a_{21} = 2, a_{22} = 4, a_{23} = y^2, a_{24} = xy, a_{31} = 3, a_{32} = xy^2, a_{33} = x^2, a_{34} = 6$.

Example 2. Matrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

je reda 3×3. Njenu prvu vrstu čine elementi $1, 5, 4$, dok njenu drugu kolonu čine elementi $5, 8, 4$.

Example 3. Matrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

je reda 3×1 i sastoji se od jedne kolone. Matrica

$$A = (2, 4, 8, -5, -8)$$

je reda 1×5 i sastoji se od jedne vrste.

Definition 2. Za datu matricu $A = (a_{ij})$, matricu čiji su elementi $(-a_{ij})$ se kaže da je suprotna matrica za matricu A i obilježava se sa $-A$.

Example 4. Ako je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 8 & -8 \end{pmatrix}$$

to je

$$-A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ -2 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

Neki standardni nazivi za matrice su sledeći:

- Za matricu reda $n \times n$ se kaže da je kvadratna matrica.
- Za kvadratnu matricu čiji su svi elementi van dijagonale jednaki nuli kaže se da je dijagonalna matrica.
- Za dijagonalniu matricu čiji su svi elementi na dijagonali jednaki jedinici se kaže da je jedinična matrica i obilježava se sa E.
- Za matricu čiji su svi elementi nula se kaže da je nula matrica.

Example 5. Matrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

je kvadratna matrica, dok je matrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

dijagonalna matrica.

Za matrice $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ se kaže da su jednake ako su istog reda i ako su im odgovarajući elementi jednaki to jest $a_{ij} = b_{ij}$.

OPERACIJE SA MATRICAMA

Sabiranje matrica

Definition 3. Neka su $A = (a_{ij})$ i $B = (b_{ij})$ matrice istog reda. Zbirom matrica A i B naziva se matrica C koja ima isti red kao A i B i njeni elelmenti su $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ za svako i, j.

Example 6. Za matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

je

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 3 & 11 & 15 \end{pmatrix}$$

Sabiranje matrica reda $n \times n$ ima sledeća svojstva:

- $A + B = B + A$ - komutativnost,
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ - asocijativnost,
- $A + N = N + A = A$, gdje je N nula matrica - nula matrica je neutralni element,
- $A + (-A) = (-A) + A = N$.

Navedene svojstva ukazuju da skup svih matrica reda $n \times n$ čini Abelovu grupu u odnosu na operaciju sabiranja.

Množenje matrice brojem

Definition 4. Proizvod matrice $A = (a_{ij})$ i broja λ je matrica $B = (b_{ij})$ istog reda kao i A, pri čemu je $b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$ za svako i, j.

Example 7. Ako je

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \lambda = 2,$$

tada je

$$2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 8 \\ 4 & 16 & 18 \\ 6 & 8 & 14. \end{pmatrix}$$

Neka svojstva množenja matrice brojem:

- $1 \cdot A = A$,
- $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot A = \lambda_1 \cdot A + \lambda_2 \cdot A$,
- $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$,
- $\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot A) = \lambda_2 \cdot (\lambda_1 \cdot A) = (\lambda_1 \lambda_2) \cdot A$.

Definition 5. Razlikom matrica A i B naziva se matrica $C = A + (-1) \cdot B$ i označava sa $C = A - B$.

Example 8. Za matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

je

$$C = A - B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ao su matrice A i B istog reda i λ_1, λ_2 brojevi, za izraz $\lambda_1 A + \lambda_2 B$ se kaže da je linearna kombinacija matrica A i B sa koeficijentima λ_1 i λ_2.

Množenje matrica

Definition 6. Proizvodom matrice $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,m\ j=1,\dots,n}$ reda $m \times n$ i matrice $B = (b_{ij})_{i=1,\dots,n;j=1,\dots,r}$ reda $n \times r$ naziva se matrica $C = (c_{ij})_{i=1,\dots,m;j=1,\dots,r}$ reda $m \times r$ za koju za svako i, j važi da je

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Primijetimo da važi sledeće:

- Matrice A i B možemo da pomnožimo ako i samo ako je broj kolona matrice A mora biti jednak broju vrsta matrice B.
- Element c_{ij} matrice C se dobija tako što odgovarajuće elemente i-te vrste matrice A množimo sa odgovarajućim elementima j-te kolone matrice B i onda ih sabiramo.

Primjer. Date su matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Treba odrediti njihov proizvod, to jest matricu $C = A \cdot B$. Broj kolona matrice A je 3 i broj vrsta matrice B je 3, tako da možemo da pomnožimo A i B. Njihov proizvod će biti matrica C reda 3×2. Elementi matrice C se računaju na sledeći način:

$$c_{11} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = 24, \quad c_{12} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) = -2$$

$$c_{21} = (-1) \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 25, \quad c_{22} = (-1) \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 5 = 25$$

$$c_{31} = (-2) \cdot 1 + (-3) \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 9, \quad c_{32} = (-2) \cdot 3 + (-3) \cdot 2 + 1 \cdot (-3) = -15.$$

Zaključujemo da je

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 24 & -2 \\ 25 & 25 \\ 9 & -15 \end{pmatrix}.$$

Neka svojstva operacije množenja matrica:

- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ - svojstvo asocijativnosti;
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C, \quad A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ -svojstvo distributivnosti;
- U opštem slučaju ne važi svojstvo komutativnosti odnosno u opštem slučaju je $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Za matrice A i B kaže se da komutiraju ako je $A \cdot B = B \cdot A$

Primjer. Ispitati da li matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ komutiraju.}$$

Odgovor je ne komutiraju, jer je

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 22 \\ 3 & 28 \end{pmatrix}, \text{ dok je } B \cdot A = \begin{pmatrix} 22 & 29 \\ 6 & 10 \end{pmatrix},$$

pa je $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Definition 7. Transponovana matrica za matricu $A = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m;j=1,\ldots,n}$ je matrica $A^T = (a^T_{ij})$, gdje je $a^T_{ij} = a_{ji}$.

Primijetimo da ako je matrica A reda $m \times n$, to je matrica A^T reda $n \times m$. Tačnije, ako je

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

to je

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Direktno se vidi da važi:

- $(A^T)^T = A$,
- $(A + B)^T = A^T + B^T$.

Primjer. Transponovana matrica matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ je matrica } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Elementarne transformacije matrica su :

- zamjena mjesta dvije vrste;
- zamjena mjesta dvije kolone;
- množenje vrste ili kolone brojem koji je različit od nule;
- dodavanje odgovarajućih elemenata jedne vrste elementima druge vrste;
- dodavanje odgovarajućih elemenata jedne kolone elementima druge kolone.

Definition 8. Za matricu B koja se dobija od matrice A primjenom elementarnih transformacija se kaže da je ekvivalentna sa matricom A i piše se $A \sim B$.

Za kvadratnu matricu se kaže da je trougaona matrica ako su joj svi elementi iznad ili ispod glavne dijagonale jednaki nuli.

Primijetimo da se svaka matrica primjenom elementarnih transformacija može svesti na trougaonu matricu, odnosno da je svaka matrica ekvivalentna trougaonoj matrici.

Primjer. Matricu

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

svesti na trougaonu matricu primjenom elementarnih transformacija.

Ako treću vrstu pomnožimo sa 2, a prvu sa -1 dobijamo da je

$$A \sim \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

Ako sada prvu vrstu dodamo trećoj dobijamo da je

$$A \sim \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 12 \end{pmatrix}.$$

Pomnožimo sada prvu vrstu sa 3, a drugu sa 2 i dobijamo

$$A \sim \begin{pmatrix} -6 & -9 & 6 \\ 6 & 2 & 2 \\ 0 & 7 & 12 \end{pmatrix}.$$

Ako dodamo prvu vrsu drugoj dobijamo da je

$$A \sim \begin{pmatrix} -6 & -9 & 6 \\ 0 & -7 & 8 \\ 0 & 7 & 12 \end{pmatrix}.$$

Dodajmo sada treću vrstu drugoj dobijamo trougaonu matricu

$$A \sim \begin{pmatrix} -6 & -9 & 6 \\ 0 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

Ova matrica je, množenjem prve vrste sa $\frac{1}{3}$ i treće vrste sa $\frac{1}{20}$ ekvivalentna matrici

$$A \sim \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 0 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$