1. Ријешити матричну једначину $XA-2E-B=2X$ гдје су $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ а X непозната матрица.

Решење:

$XA-2E-B=2X$,

$XA-2X=2E+B$,

$X(A-2E)=2E+B$,

$X(A-2E)(A-2E)^{-1}=(2E+B)(A-2E)^{-1}$,

$X=(2E+B)(A-2E)^{-1}$,

$$A-2E=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -3 & 0\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} ,$$

$Det(A-2E)=1$,

$$(A-2E)^{-1}=\frac{1}{Det(A-2E)}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 0\\ -9 & 3 & 1\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}-1 & 3 & -9\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} ,$$

$$2E+B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1 & -1\\ 0 & 4 & 4\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix},$$

$$X=(2E+B)(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}4 & 1 & -1\\ 0 & 4 & 4\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 3 & -9\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 11 & -34\\ 0 & -4 & 16\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

2. Ријешити систем једначина у зависности од параметра

$4bx+y+z=4b$

$x+4by+z=4b$

$x+y+4bz=1$

Решење:

Израчунавамо детерминанте :

$$D=\begin{vmatrix}4b & 1 & 1\\ 1 & 4b & 1\\ 1 & 1 & 4b\end{vmatrix}=4b\begin{vmatrix}4b & 1\\ 1 & 4b\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 4b\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}1 & 4b\\ 1 & 1\end{vmatrix}=4b(16b^2-1)-(4b-1)+(1-4b)$$

$D=64b^3-12b+2$

Треба наћи вриједности параметра b за које је $D=0$. Ако једначину напишемо у облику $D=64(b^3-\frac{3}{16}b+\frac{1}{32})=0$ можемо покушати да нађемо једно решење и помоћу њега сведемо једначину трећег на једначину другог реда. Обзиром на разломке $\frac{3}{16}$ и $\frac{1}{32}$ који се јављају у једначини можемо провјерити вриједност детерминанте за $b=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{4}$...

За $b=\frac{1}{2}$ је $b^3-\frac{3}{16}b+\frac{1}{32}=\left(\frac{1}{2}\right)^3-\frac{3}{16}\frac{1}{2}+\frac{1}{32}=\frac{1}{8}-\frac{3}{32}+\frac{1}{32}=\frac{2}{32}\neq 0$

За $b=-\frac{1}{2}$ је $b^3-\frac{3}{16}b+\frac{1}{32}=\left(-\frac{1}{2}\right)^3-\frac{3}{16}\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{32}=-\frac{1}{8}+\frac{3}{32}+\frac{1}{32}=0$

Послије дијељења $\left(b^3-\frac{3}{16}b+\frac{1}{32}\right):\left(b+\frac{1}{2}\right)=\left(b^2-\frac{1}{2}b+\frac{1}{16}\right)$ добија се

$$D=64\left(b^3-\frac{3}{16}b+\frac{1}{32}\right)=64\left(b+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(b^2-\frac{1}{2}b+\frac{1}{16}\right),$$ тј.

$$D=64\left(b+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(b-\frac{1}{4}\right)^2$$

$$D_X=\begin{vmatrix}4b & 1 & 1\\ 4b & 4b & 1\\ 1 & 1 & 4b\end{vmatrix}=4b\begin{vmatrix}4b & 1\\ 1 & 4b\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}4b & 1\\ 1 & 4b\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}4b & 4b\\ 1 & 1\end{vmatrix}=4b(16b^2-1)-(16b^2-1)+(4b-4b),$$

$$D_X=(4b-1)(16b^2-1)=(4b-1)(4b-1)(4b+1)=64\left(b-\frac{1}{4}\right)^2\left(b+\frac{1}{4}\right),$$

$$D_Y=\begin{vmatrix}4b & 4b & 1\\ 1 & 4b & 1\\ 1 & 1 & 4b\end{vmatrix}=4b\begin{vmatrix}4b & 1\\ 1 & 4b\end{vmatrix}-4b\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 4b\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}1 & 4b\\ 1 & 1\end{vmatrix}=4b(16b^2-1)-4b(4b-1)+(1-4b),$$

$$D_Y=(4b-1)(16b^2+4b-4b-1)=64\left(b-\frac{1}{4}\right)^2\left(b+\frac{1}{4}\right),$$

$$D_Z=\begin{vmatrix}4b & 1 & 4b\\ 1 & 4b & 4b\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=4b\begin{vmatrix}4b & 4b\\ 1 & 1\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}1 & 4b\\ 1 & 1\end{vmatrix}+4b\cdot\begin{vmatrix}1 & 4b\\ 1 & 1\end{vmatrix}=4b(4b-4b)-(1-4b)+4b(1-4b),$$

$$D_Z=-(4b-1)^2=-16\left(b-\frac{1}{4}\right)^2,$$

$$D=64\left(b+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(b-\frac{1}{4}\right)^2,\ D_X=64\left(b-\frac{1}{4}\right)^2\left(b+\frac{1}{4}\right),\ D_Y=64\left(b-\frac{1}{4}\right)^2\left(b+\frac{1}{4}\right),\ D_Z=-16\left(b-\frac{1}{4}\right)^2$$

- За $b=-\frac{1}{2}$ је $D=0$, $D_X\neq 0$ па систем нема решења
- За $b=\frac{1}{4}$ је $D=0$, $D_X=D_Y=D_Z=0$ па систем

  $$\begin{aligned}4bx+y+z&=4b\\ x+4by+z&=4b\\ x+y+4bz&=1\end{aligned}$$

  добија облик

  $$\begin{aligned}x+y+z&=1\\ x+y+z&=1\\ x+y+z&=1\end{aligned}$$

  Систем има бесконачно много решења $(x;y;z)=(x;y;1-x-y)$,
- За $b\notin\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right\}$ је $D\neq 0$ па систем има јединствено решење

$$x=\frac{D_X}{D}=\frac{64\left(b-\frac{1}{4}\right)^2\left(b+\frac{1}{4}\right)}{64\left(b+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(b-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\left(b+\frac{1}{4}\right)}{\left(b+\frac{1}{2}\right)},\ y=\frac{D_Y}{D}=\frac{\left(b+\frac{1}{4}\right)}{\left(b+\frac{1}{2}\right)},\ z=\frac{D_Z}{D}=\frac{-16\left(b-\frac{1}{4}\right)^2}{64\left(b+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(b-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{-1}{4\left(b+\frac{1}{2}\right)}$$

3. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+7n+3}{4n^2+3n-4}\right)^{-n}$

Решење:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+7n+3}{4n^2+3n-4}\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+3n-4+4n+7}{4n^2+3n-4}\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4n+7}{4n^2+3n-4}\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{4n^2+3n-4}{4n+7}}\right)^{-n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{4n^2+3n-4}{4n+7}}\right)^{\frac{4n^2+3n-4}{4n+7}}\right)^{\frac{-n(4n+7)}{4n^2+3n-4}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n(4n+7)}{4n^2+3n-4}}=e^{-1}$$

4. Израчунати $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{4x}-\cos 6x}{\ln(1+2x)}$

Решење:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-\cos 6x}{\ln(1+2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1+1-\cos 6x}{\ln(1+2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1+\cos^2 3x+\sin^2 3x-(\cos^2 3x-\sin^2 3x)}{\ln(1+2x)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1+2\sin^2 3x}{\ln(1+2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{4x\frac{e^{4x}-1}{4x}+(3x)^2\frac{2\sin^2 3x}{(3x)^2}}{2x\frac{\ln(1+2x)}{2x}}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4\frac{e^{4x}-1}{4x}+9x\cdot 2\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2}{2\frac{\ln(1+2x)}{2x}}=\frac{4\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{4x}-1}{4x}+\lim\limits_{x\to 0}9x\cdot 2\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2}{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{2x}}=\frac{4+0}{2}=2$$

5. Израчунати $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{3+12x}-3}{12-3x^2}$

Решење:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{3+12x}-3}{12-3x^2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{3+12x}-3}{12-3x^2}\,\frac{\left(\sqrt[3]{3+12x}\right)^2+3\left(\sqrt[3]{3+12x}\right)+(3)^2}{\left(\sqrt[3]{3+12x}\right)^2+3\left(\sqrt[3]{3+12x}\right)+(3)^2}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt[3]{3+12x}\right)^3-(3)^3}{3(4-x^2)\left(\left(\sqrt[3]{3+12x}\right)^2+3\left(\sqrt[3]{3+12x}\right)+(3)^2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{3+12x-27}{3(2-x)(2+x)\left(\left(\sqrt[3]{3+12x}\right)^2+3\left(\sqrt[3]{3+12x}\right)+(3)^2\right)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{12(x-2)}{3(2-x)(2+x)\left(\left(\sqrt[3]{3+12x}\right)^2+3\left(\sqrt[3]{3+12x}\right)+(3)^2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{-4}{(2+x)\left(\left(\sqrt[3]{3+12x}\right)^2+3\left(\sqrt[3]{3+12x}\right)+(3)^2\right)}=\frac{-1}{27}$$

6. Наћи извод функције $y=e^{\frac{x^2-1}{x+3}}+\sin^3(\ln x)$

Решење:

$$y'=\left(e^{\frac{x^2-1}{x+3}}+\sin^3(\ln x)\right)'=\left(e^{\frac{x^2-1}{x+3}}\right)'+\left(\sin^3(\ln x)\right)'=e^{\frac{x^2-1}{x+3}}\left(\frac{x^2-1}{x+3}\right)'+3\sin^2(\ln x)\left(\sin(\ln x)\right)'=$$

$$y'=e^{\frac{x^2-1}{x+3}}\,\frac{\left(x^2-1\right)'(x+3)-\left(x^2-1\right)(x+3)'}{(x+3)^2}+3\sin^2(\ln x)\cdot\cos(\ln x)(\ln x)'=$$

$$y'=e^{\frac{x^2-1}{x+3}}\,\frac{2x(x+3)-\left(x^2-1\right)\cdot 1}{(x+3)^2}+3\sin^2(\ln x)\cdot\cos(\ln x)\frac{1}{x}=$$

$$y' = e^{\frac{x^2-1}{x+3}}\frac{x^2+6x+1}{(x+3)^2} + 3\sin^2(\ln x)\cdot\cos(\ln x)\frac{1}{x}$$

7. Нaђи извод функције $y = \left(x^3+2x\right) * arctg\left(\ln\frac{x-1}{x+1}\right)$

Решење:

$$y' = \left(\left(x^3+2x\right) * arctg\left(\ln\frac{x-1}{x+1}\right)\right)' = \left(x^3+2x\right)' arctg\left(\ln\frac{x-1}{x+1}\right) + \left(x^3+2x\right)\left(arctg\left(\ln\frac{x-1}{x+1}\right)\right)'$$

$$y' = \left(3x^2+2\right)arctg\left(\ln\frac{x-1}{x+1}\right) + \left(x^3+2x\right)\frac{1}{1+\left(\ln\frac{x-1}{x+1}\right)^2}\left(\ln\frac{x-1}{x+1}\right)'$$

$$y' = \left(3x^2+2\right)arctg\left(\ln\frac{x-1}{x+1}\right) + \left(x^3+2x\right)\frac{1}{1+\left(\ln\frac{x-1}{x+1}\right)^2}\frac{1}{\frac{x-1}{x+1}}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'$$

$$y' = \left(3x^2+2\right)arctg\left(\ln\frac{x-1}{x+1}\right) + \left(x^3+2x\right)\frac{1}{1+\left(\ln\frac{x-1}{x+1}\right)^2}\frac{x+1}{x-1}\frac{(x-1)'(x+1)-(x-1)(x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$y' = \left(3x^2+2\right)arctg\left(\ln\frac{x-1}{x+1}\right) + \left(x^3+2x\right)\frac{1}{1+\left(\ln\frac{x-1}{x+1}\right)^2}\frac{1}{x-1}\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)}$$

$$y' = \left(3x^2+2\right)arctg\left(\ln\frac{x-1}{x+1}\right) + \left(x^3+2x\right)\frac{1}{1+\left(\ln\frac{x-1}{x+1}\right)^2}\frac{2}{x^2-1}$$