Интервал повјерења за непознату пропорцију p обележја са биномном $B(n;p)$ расподјелом

Пропорција p представља вјероватноћу успјешне реализације обележја са биномном расподјелом и оцјењује се интервалом $I=\left(p-a\sqrt{\frac{pq}{n-1}};p+a\sqrt{\frac{pq}{n-1}}\right)$.

При томе је : $p=\frac{K}{n}$ гдје је K број успјешних реализација а n обим узорка, $q=1-p$, $a=\Phi^{-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right)$, β ниво повјерења.

Помоћу овога интервала можемо оцијенити и непознат број позитивних реализација обележја са биномном $B(n;p)$ расподјелом у популацији обима N тако што ћемо обје границе интервала за пропорцију помножити обимом популације

$$I=\left(N\left(p-a\sqrt{\frac{pq}{n-1}}\right);N\left(p+a\sqrt{\frac{pq}{n-1}}\right)\right)$$

Примјери

Од 1000 новорођенчади у једном породилишту 517 су били дјечаци. Наћи 90% интервал повјерења за проценат дјечака.

Непознати проценат дјечака ћемо оцијенити помоћу интервала повјерења за непознату пропорцију p : $I=\left(p-a\sqrt{\frac{pq}{n-1}};p+a\sqrt{\frac{pq}{n-1}}\right)$.

Посматрани узорак је обима $n=1000$ и у њему је било $K=517$ успјешних реализација тако да је реализована пропорција $\overline{p}=\frac{K}{n}=\frac{517}{1000}=0.517$, $\overline{q}=1-\overline{p}=0.483$.

За задати ниво повјерења $\beta=0.9$ из таблице за нормалну расподјелу добијамо $a=\Phi^{-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right)=\Phi^{-1}\left(\frac{1+0.9}{2}\right)=\Phi^{-1}(0.95)=1.645$. Тражени интервал повјерења је

$$I=\left(p-a\sqrt{\frac{pq}{n-1}};p+a\sqrt{\frac{pq}{n-1}}\right)=\left(0.517-1.645\sqrt{\frac{0.517*0.483}{999}};0.517+1.645\sqrt{\frac{0.517*0.483}{999}}\right)$$

$$I=(0.491;0.543)$$

Са нивоом повјерења 90% можемо тврдити да ће бити између 49.1% и 54.3% дјечака.

Контрола квалитета у фабрици за производњу вјештачког ђубрива је измјерила масу појединачних паковања из случајно одабраног узорка. Резултати су дати у табели:

Маса (гр.)	$[4800;4900)$	$[4900;4950)$	$[4950;5000)$	$[5000;5050)$	$[5050;5100)$	$[5100;5200]$
Број паковања	8	31	96	109	48	8

Утврдити 95% интервал повјерења за пропорцију паковања чија је маса ван дозвољеног одступања од 100гр. тј испод 4900гр или изнад 5100гр. Ако се годишње произведе 350000 паковања вјештачког ђубрива одредити 95% интервал повјерења за број паковања која су непрописне масе.

Из табеле видимо да је број паковања која одступају ван дозвољеног интервала једнак 8+8=16. Обим узорка је 8+31+96+109+48+8=300 па је $\overline{p} = \frac{16}{300} = 0.053$, $\overline{q} = 1 - \overline{p} = 0.947$.

За задати ниво повјерења $\beta = 0.95$ из таблице за нормалну расподјелу добијамо $a = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right) = \Phi^{-1}\left(\frac{1+0.95}{2}\right) = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96$. Тражени интервал повјерења је

$$I = \left(p - a\sqrt{\frac{pq}{n-1}}; p + a\sqrt{\frac{pq}{n-1}}\right) = \left(0.053 - 1.96\sqrt{\frac{0.053 * 0.947}{299}}; 0.053 + 1.96\sqrt{\frac{0.053 * 0.947}{299}}\right)$$

$I = (0.0276; 0.0783)$.

Како је обим цијеле популације једнак годишњој производњи $N = 350000$ добијамо да је 95% интервал повјерења за број паковања која су непрописне масе

$$I = (350000 * 0.0276; 350000 * 0.0783) = (9660; 27405)$$

Коцка за игру је на случајан начин бачена 1000 пута. Шестица је пала 200 пута. Тестирати хипотезу да је коцка исправна са прагом значајности $\alpha = 0.01$.

Тестирамо нулту хипотезу $H_0(p_0 = \frac{1}{6})$. Направићемо интервал повјерења за непознату пропорцију са нивоом повјерења $\beta = 1 - \alpha = 1 - 0.01 = 0.99$ и установити да ли се претпостављена вриједност $p_0 = \frac{1}{6} = 0.167$ у њему налази. Из дати података закључујемо да је $n = 1000$, $K = 200$, $\overline{p} = \frac{K}{n} = 0.2$, $\overline{q} = 1 - \overline{p} = 0.8$.

За задати ниво повјерења $\beta = 0.99$ из таблице за нормалну расподјелу добијамо $a = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right) = \Phi^{-1}\left(\frac{1+0.99}{2}\right) = \Phi^{-1}(0.995) = 2.576$. Тражени интервал повјерења је

$$I = \left(p - a\sqrt{\frac{pq}{n-1}}; p + a\sqrt{\frac{pq}{n-1}}\right) = \left(0.2 - 2.576\sqrt{\frac{0.2 * 0.8}{999}}; 0.2 + 2.576\sqrt{\frac{0.2 * 0.8}{999}}\right)$$

$I = (0.168; 0.232)$.

Како је $p_0 = 0.167 \notin (0.168; 0.232)$ не прихватамо хипотезу $H_0(p_0 = \frac{1}{6})$ са овим прагом значајности.

На основу претходног можемо решавати и задатке :

U tabeli su dati rezultati dobijeni nakon ispitivanja broja rodnih stabala na privatnim imanjima:

Broj imanja	14	25	16	25	41	12
Broj rodnih stabala	14	5	22	6	22	7

Odrediti proporciju imanja čiji je broj rodnih stabala dvocifren . Da li se sa vjerovatnoćom 95% može usvojiti pretpostavka da će u osnovnom skupu proporcija imanja sa navedenom karakteristikom iznositi 0.62? ($Z_{0.05}$ = 1.96).

Обим узорка је $n = 14 + 25 + 16 + 25 + 41 + 12 = 133$. Број имања чији је број родних стабала двоцифрен је $K = 14 + 16 + 41 = 71$.

Пропорција имања чији је број двоцифрен је $\overline{p} = \frac{K}{n} = \frac{71}{133} = 0.5338$.

$\overline{q} = 1 - \overline{p} = 0.4662$.

За задати ниво повјерења $\beta = 0.95$ дата је вриједност

$$a = \Phi^{-1}\left(\frac{1+0.95}{2}\right) = \Phi^{-1}(0.975) = Z_{0.05} = 1.96.$$

Тражени интервал повјерења је

$$I = \left(p - a\sqrt{\frac{pq}{n-1}}; p + a\sqrt{\frac{pq}{n-1}}\right) = \left(0.5338 - 1.96\sqrt{\frac{0.5338 * 0.4662}{132}}; 0.5338 - 1.96\sqrt{\frac{0.5338 * 0.4662}{132}}\right)$$

$I = (0.4487; 0.6189)$.

Како је $p_0 = 0.62 \notin (0.4487; 0.6189)$ не може се са вјероватноћом 95% усвојити претпоставка да ће у основном скупу прорпорција имања са двоцифреним бројем родних стабала износити 0.62 .

.