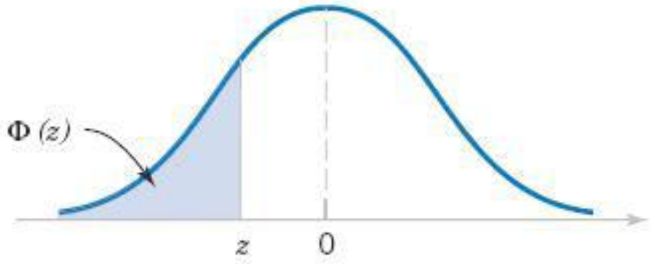
Statističke tablice

1. Normalna razdioba

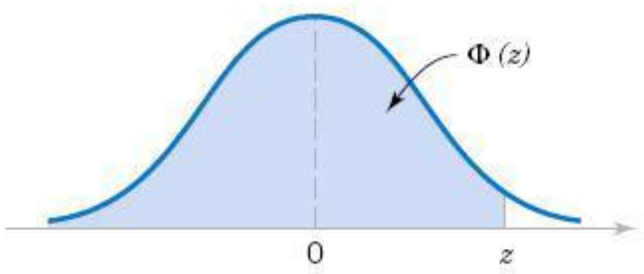
$$\Phi(z) = P(Z \le z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$



druga decimala

z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.40	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.30	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.20	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.10	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.00	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2.90	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2.80	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.70	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.60	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.50	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.40	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.30	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.20	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.10	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.00	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1.90	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.80	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.70	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.60	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.50	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.40	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.30	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.20	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.10	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.00	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0.90	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0.80	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.70	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.60	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.50	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.40	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.30	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.20	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.10	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.00	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

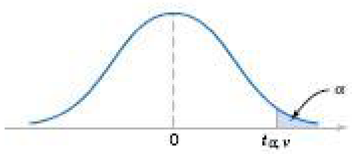
$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2}\, du$$



druga decimala

z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.00	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.40	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.50	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.60	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.70	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.80	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.90	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.00	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.10	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.20	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.30	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.40	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.50	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.60	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.70	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.80	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.90	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.00	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.10	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.20	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.30	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.40	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

2. Studentova (t razdioba)



ν \ α	.40	.25	.10	.05	.025	.01	.005	.0025	.001	.0005
1	.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	127.32	318.31	636.62
2	.289	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	23.326	31.598
3	.277	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.213	12.924
4	.271	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	.267	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	.265	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	.263	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	.262	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	.261	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	.260	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	.260	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	.259	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	.259	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	.258	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	.258	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	.258	.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	.257	.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	.257	.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	.257	.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	.257	.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	.257	.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	.256	.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	.256	.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.767
24	.256	.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	.256	.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	.256	.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	.256	.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	.256	.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	.256	.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	.256	.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	.255	.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
60	.254	.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
120	.254	.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	2.860	3.160	3.373
∞	.253	.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291

$\nu = k$ (broj stupnjeva slobode)

Познато је да је маса дјечака од 10 година старости распоређена по нормалној расподјели са средњом вриједношћу $m_0 = 37kg$ и стандардним одступањем $\sigma = 10kg$. У једној школи је мјерена маса $n = 36$ дјечака и добијена је аритметичка средина масе $\overline{x}_n = 35kg$.
Тестирати хипотезу да дјеца у тој школи имају масу мању од средње вриједности m_0 са прагом значајности $\alpha = 0.05$
Решење:
Посматрано обиљежје, маса дјечака по услову задатка има расподјелу $X \sim N(m_0;\sigma^2)$ тј. $X \sim N(37;100)$. Имамо тест о очекивању код нормалне расподјеле када је σ познато.

Формирамо хипотезе $H_0 : m = m_0$ и $H_1 : m < m_0$. Користимо статистику $Z = \dfrac{\overline{x}_n - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

Вриједност коју статистика Z добија на основу узорка је $Z = \dfrac{35-37}{\frac{10}{\sqrt{36}}} = -1.2$. Како статистика Z има расподјелу $Z \sim N(0;1)$ то критичну вриједност $Z_\alpha = Z_{0.05}$ добијамо из таблице за нормалну расподјелу $Z_\alpha = 1.645$.
(Како добијамо вриједност $Z_\alpha = 1.645$? У таблици на страни 2 тражимо вриједност $1-\alpha = 0.95$. Двије најближе вриједности су 0.9495 и 0.9505 које се налазе у пресјеку врсте која на почетку има број 1.6 и колона које на врху имају бројеве 0.04 и 0.05 које означавају друге децимале.

					0.04	0.05				
1.6					0.9495	0.9505				

То значи да те вриједности одговарају бројевима 1.64 и 1.65 па за Z_α узимамо аритметичку средину $Z_\alpha = \dfrac{1.64+1.65}{2} = 1.645$)

Код алтернативне хипотезе $H_1 : m < m_0$ ако је $Z < -Z_\alpha$ доносимо одлуку о одбацивању хипотезе $H_0 : m = m_0$. Како је $Z = -1.2$ и $-Z_\alpha = -1.645$ то није задовољено $Z < -Z_\alpha$ тако да на основу узорка нема разлога да одбацимо хипотезу H_0. Сматрамо да одступање добијено на основу узорка није статистички значајно и не прихватамо хипотезу да дјеца у тој школи имају масу мању од средње вриједности читаве популације.

Ако поставимо додатно питање : До које би најмање вриједности могла да иде узорачка аритметичка средина па да не одбацимо хипотезу H_0 а од које би ако добијемо мању вриједност одбацивали H_0 одговор можемо добити на следећи начин. Из $Z < -Z_\alpha$ тј. $\dfrac{\overline{x}_n - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < -Z_\alpha$ добијамо $\overline{x}_n - m_0 < -Z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ тј. $\overline{x}_n < m_0 - Z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ па је

$\bar{x}_n < 37 - 1.645\frac{10}{\sqrt{36}} = 34.258$. То значи да ако узорачка средина добије вриједност мању од 34.258 одбацићемо хипотезу H_0 да дјеца у тој школи имају исту висину као дјеца у остатку популације а ако буде већа или једнака од те вриједности прихватићемо H_0 а не H_1.

Одговор на исто питање у случају прага значајности $\alpha = 0.01$ би био добијен на потпуно исти начин само што би $Z_\alpha = Z_{0.01}$ сада било другачије $Z_\alpha = Z_{0.01} = 2.325$.
$\bar{x}_n < 37 - 2.325\frac{10}{\sqrt{36}} = 33.125$. То значи да све док је узорачка средина изнад $33.125kg$ задржавамо хипотезу H_0 и тиме се очигледно смањује могућност грешке прве врсте тј могућност одбацивања хипотезе H_0 онда када је она тачна .
(У овом случају $Z_\alpha = Z_{0.01} = 2.325$ одређујемо тако што у таблици тражимо вриједност $1-\alpha = 0.99$. Слично претходном за Z_α узимамо средину бројева 2.32 и 2.33 којима одговарају вриједности 0.9898 и 0.9901)

Просјечан вијек трајања сијалица произведених у једној фабрици по старом поступку био је 1120 сати и стандардно одступање било је 125 сати. На узорку од 8 сијалица произведених по новом поступку добијени су следећи резултати : 1150, 1100, 1070, 1040, 1130, 1010, 990, 1110. Тестирати са прагом значајности $\alpha = 0.05$ хипотезу да се вијек трајања сијалица није промијенио.
Решење:

Формирамо хипотезе $H_0 : m = m_0$ и $H_1 : m \neq m_0$. Користимо статистику $Z = \frac{\bar{x}_n - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

Узорачка средина добија вриједност $\bar{x}_8 = \frac{1150+1100+1070+1040+1130+1010+990+1110}{8}$

$\bar{x}_8 = 1075$. Вриједност коју статистика Z добија на основу узорка је $Z = \frac{1075-1120}{\frac{125}{\sqrt{8}}} = -1,018$

Код алтернативне хипотезе $H_1 : m \neq m_0$ ако је $Z > Z_{\frac{\alpha}{2}}$ или $Z < -Z_{\frac{\alpha}{2}}$ доносимо одлуку о одбацивању хипотезе $H_0 : m = m_0$. Како статистика Z има расподјелу $Z \sim N(0;1)$ то критичну вриједност $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{0.05}{2}} = 1.96$ добијамо из таблице за нормалну расподјелу. Како је $Z = -1.018$ и $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ то значи да на основу узорка нема разлога да одбацимо хипотезу H_0. Сматрамо да одступање добијено на основу узорка није статистички значајно и да се вијек трајања сијалица није промијенио.

(Вриједност $Z_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$ добијамо тако што у таблици на страни 2 тражимо вриједност $1-\dfrac{\alpha}{2}=0.975$ и налазимо је у пресјеку реда са ознаком 1.9 и колоне са ознаком 0.06)

Подаци о дневним максималним температурама измјереним у Подгорици у последњих 10 година на дан 1. фебруара су 13.6, 14.5, 14.6, 12.8, 13.7, 12.9, 14.1, 15.0, 15.2, 14.9. Са прагом значајности $\alpha=0.05$ тестирати хипотезу да је средња температура тог дана 13.8 против хипотезе да је већа од 13.8.
Решење:
За посматрано обиљежје, температуру сматрамо да има расподјелу $X\sim N(m_0;\sigma^2)$ тј. $X\sim N(13.8;\sigma^2)$. Имамо тест о очекивању код нормалне расподјеле када је σ непознато.

Формирамо хипотезе $H_0: m=m_0$ и $H_1: m>m_0$. Користимо статистику $T=\dfrac{\overline{x}_n-m_0}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}$. Како статистика T има расподјелу $T\sim t(\mathrm{n}-1)$ то критичну вриједност $t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(9)=1.833$ добијамо из таблице за Студентову расподјелу (страна 3) у пресјеку врсте $\mathrm{n}=9$ и колоне $\alpha=0.05$.
Ако статистика T из узорка добије вриједност $T>t_\alpha(n-1)$ доносимо одлуку о одбацивању хипотезе $H_0: m=m_0$. У супротном не одбацујемо H_0.
Из узорка добијамо :

$$\overline{x}_{10}=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}x_i=\frac{13.6+14.5+14.6+12.8+13.7+12.9+14.1+15.0+15.2+14.9}{10}=\frac{141.3}{10}=14.13$$

$$S_{10}^2=\frac{1}{9}\left(\sum_{i=1}^{10}x_i^{\,2}-10\overline{x}_{10}^{\,2}\right)=\frac{1}{9}\left(2003.17-10\cdot 199.6569\right)=\frac{6.601}{9}=0.733. \quad S_{10}=\sqrt{0.733}=0.856$$

$$T=\frac{\overline{x}_n-m_0}{S_n}\sqrt{n}=\frac{14.13-13.8}{0.856}\sqrt{10}=1.219$$

. Како је $T=1.219<t_\alpha(n-1)=t_{0.05}(9)=1.833$ то доносимо одлуку о неодбацивању хипотезе $H_0: m=13.8$

Слчајно изабрани плодови мандарина са једног дрвета имају следеће тежине (у грамима): 80, 81 81, 82, 81, 82, 79, 81, 82, 81, 81, 80. Тестирати хипотезу да је тежина плодова 80гр против алтернативне да се разликује од 80гр. За праг значајности узети $\alpha=0.01$.
Решење:

Хипотезе су $H_0: m=m_0$ и $H_1: m\neq m_0$. Ако статистика $T=\dfrac{\overline{x}_n-m_0}{S_n}\sqrt{n}$ добије вриједност $T>t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ или $T<-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ доносимо одлуку о одбацивању хипотезе $H_0: m=m_0$.
У супротном не одбацујемо H_0.
Како статистика T има расподјелу $T\sim t(\mathrm{n}-1)$ то критичну вриједност $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.005}(11)=3.106$ добијамо из таблице за Студентову расподјелу у пресјеку врсте $\mathrm{n}=11$ и колоне $\alpha=\dfrac{0.01}{2}=0.005$.

Из узорка добијамо :

$$\bar{x}_{12} = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} x_i = \frac{80+81+81+82+81+82+79+81+82+81+81+80}{12} = \frac{971}{12} = 80.917$$

$$S_{12}^2 = \frac{1}{11}\left(\sum_{i=1}^{12} x_i^2 - 12\bar{x}_{12}^2\right) = \frac{1}{11}(78579 - 12\cdot 6547.507) = \frac{1}{11}(78579 - 78570.08) = \frac{9.92}{11} = 0.811.$$

$S_{12} = \sqrt{0.811} = 0.9$, $T = \dfrac{\bar{x}_n - m_0}{S_n}\sqrt{n} = \dfrac{80.917-80}{0.9}\sqrt{12} = 3.527$

Како је $T = 3.52 > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) = 3.106$ доносимо одлуку о одбацивању хипотезе $H_0 : m = 80$

У 4040 бацања новчића 2048 пута је добијен грб а 1992 пута писмо. На нивоима значајности $\alpha = 0.05$ и $\alpha = 0.01$ тестирати хипотезу да је новчић исправан тј. да је вјероватноћа појављивања грба 0.5 против алтернативне да новчић форсира појављивање грба тј. да је вјероватноћа појављивања грба већа од 0.5.

Решење:

Имамо тест о очекивању на основу великог узорка код биномно дистрибуиране популације. Формирамо хипотезе $H_0 : p = 0.5$ и $H_1 : p > 0.5$ гдје је p вјероватноћа појављивања грба. Када тестирамо хипотезу $H_0 : p = p_0$ посматрамо статистику

$Z = \dfrac{\bar{x}_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}$ за коју важи $Z \sim N(0;1)$. При томе је : $\bar{x}_n =$ узорачка пропорција, $p_0 =$ теоретска пропорција, $n =$ димензија узорка. Из таблице за нормалну расподјелу одређујемо критичну вриједност Z_α и ако добијена вриједност статистике Z задовољава услов $Z > Z_\alpha$ одбацујемо хипотезу $H_0 : p = p_0$.

Као у претходним задацима за $\alpha = 0.05$ се добија $Z_\alpha = Z_{0.05} = 1.645$. Узорачка пропорција је $\bar{x}_n = \hat{p} = \dfrac{2048}{4040} = 0.507$, $p_0 = 0.5$, $1 - p_0 = 0.5$, $n = 4040$. Статистика Z на основу узорка добија вриједност $Z = \dfrac{\bar{x}_n - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n} = \dfrac{0.507-0.5}{\sqrt{0.5\cdot 0.5}}\sqrt{4040} = 0.89$. Како је $Z = 0.89 < Z_\alpha = 1.645$ доносимо одлуку да се не одбацује хипотеза $H_0 : p = 0.5$, тј. хипотеза да је новчић исправан.

Очигледно за $\alpha = 0.01$ добија се већа критична вриједност $Z_\alpha = Z_{0.01} = 2.325$ па је закључак исти као и код већег нивоа значајности.

Иста раса крава узгаја се на двије сусједне фарме. На случајан начин изабрано је 11 крава са прве фарме и измјерена њихова млијечност : 17.3, 18.1, 19.1, 18.8, 17.9, 19.5, 16.3, 17.3, 15.4, 19.8, 17.1 . За 9 случајно одабраних крава са друге фарме добијени су подаци : 16.6, 17.4, 15.2, 18, 16.5, 17.3, 15.6, 17.5, 16.3 . Са прагом значајности $\alpha = 0.05$ тестирати хипотезу да је млијечност крава са прве фарме већа ако је познато да је млијечност нормална случајна промјенљива. Можемо ли уз исти праг значајности закључити да се приноси разликују?

Решење:

Упоређујемо очекивања двије нормално дистрибуиране промјењљиве, млијечност крава на једној и другој фарми : $X^{(1)} \sim N(m_1;\sigma^2)$ и $X^{(2)} \sim N(m_2;\sigma^2)$. Уз претпоставку да им се очекивања могу разликовати али да им је варијанса иста користимо статистику

$T = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{S} \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$ гдје је $\overline{X}_1 = \dfrac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} x_i$ узорачка средина првог узорка, $\overline{X}_2 = \dfrac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2} x_i$ узорачка средина другог узорка, n_1 и n_2 димензије првог и другог узорка,

$S_1^2 = \dfrac{1}{n_1 - 1}\left(\sum_{i=1}^{n_1} x_i^2 - n_1\left(\overline{X}_1\right)^2\right)$ и $S_2^2 = \dfrac{1}{n_2 - 1}\left(\sum_{i=1}^{n_2} x_i^2 - n_2\left(\overline{X}_2\right)^2\right)$ варијансе првог и другог узорка и

$S^2 = \dfrac{1}{n_1 + n_2 - 2}\left((n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2\right)$ заједничка варијанса. Формирамо хипотезе

$H_0 : m_1 = m_2$ и $H_1 : m_1 > m_2$.

Како статистика T има расподјелу $T \sim t(\mathrm{n}_1 + \mathrm{n}_2 - 2)$ то критичну вриједност $t_\alpha(\mathrm{n}_1 + \mathrm{n}_2 - 2) = t_{0.05}(11 + 9 - 2) = t_{0.05}(18) = 1.734$ добијамо из таблице за Студентову расподјелу (страна 3) у пресјеку врсте $\mathrm{n} = 18$ и колоне $\alpha = 0.05$.

Ако статистика T из узорка добије вриједност $T > t_\alpha(\mathrm{n}_1 + \mathrm{n}_2 - 2) = t_{0.05}(18) = 1.734$ доносимо одлуку о одбацивању хипотезе $H_0 : m_1 = m_2$. У супротном не одбацујемо H_0.

Из узорка добијамо :

$$\overline{X}_1 = \frac{1}{11}\sum_{i=1}^{11} x_i = \frac{17.3 + 18.1 + 19.1 + 18.8 + 17.9 + 19.5 + 16.3 + 17.3 + 15.4 + 19.8 + 17.1}{11} = 17.87$$

$$S_1^2 = \frac{1}{10}\left(\sum_{i=1}^{11} x_i^{\,2} - 11\overline{X}_1^{\,2}\right) = 1.86.$$

$$\overline{X}_2 = \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{9} x_i = \frac{16.6 + 17.4 + 15.2 + 18 + 16.5 + 17.3 + 15.6 + 17.5 + 16.3}{9} = 16.71$$

$$S_2^2 = \frac{1}{8}\left(\sum_{i=1}^{9} x_i^{\,2} - 9\overline{X}_1^{\,2}\right) = 0.86$$

$$S^2 = \frac{1}{n_1 + n_2 - 2}\left((n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2\right) = \frac{1}{18}\left((10)1.86 + (8)0.86\right) = 1.42 \text{ , } S = \sqrt{S^2} = \sqrt{1.42} = 1.19$$

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{S}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{17.87 - 16.71}{1.19}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{11} + \frac{1}{9}}} = 2.17.$$

Како је $T = 2.17 > t_\alpha(n_1 + n_2 - 2) = t_{0.05}(18) = 1.734$ то доносимо одлуку о одбацивању хипотезе $H_0 : m_1 = m_2$

За алтернативну хипотезу $H_1 : m_1 \neq m_2$ ће критична вриједност бити $t_{\frac{\alpha}{2}}(\mathrm{n}_1 + \mathrm{n}_2 - 2) = t_{0.025}(11 + 9 - 2) = t_{0.025}(18) = 2.101$ па је закључак исти.

.