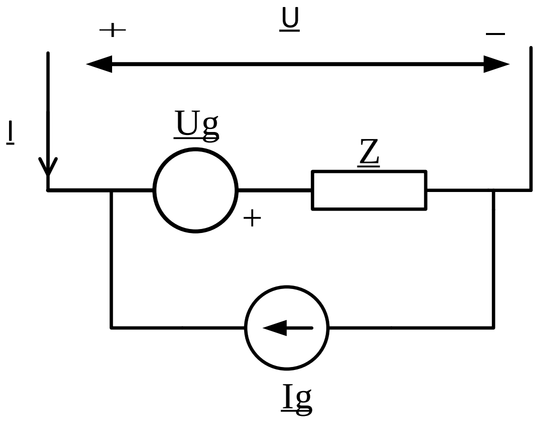
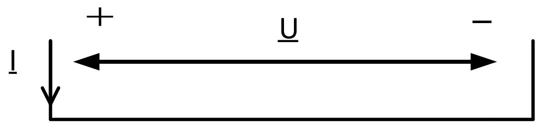
Da bismo došli do algoritma kojim se jednoznačno formira graf linearnog električnog kola, bez obzira na karakteristike njegovih elemenata i postojanje početnih uslova, definisaćemo generalisanu (standardizovanu) granu u obliku prikazanom na Slici 1. Koncept generalisane grane kola, kao što ćemo vidjeti, u mnogim slučajevima omogućava da se redukuje red sistema jednačina stanja. Prilikom crtanja grafa meže, generalisanu granu predstavljaćemo kao što je prikazano na Slici 2. Radi jednostavnosti kasnijeg zapisivanja matričnih jednačina pogodno je granu orijentisati tako da njen smjer odgovara referentnom smjeru napona na posmatranom pristupu generalisanoj grani.



Slika 1. Generalisana grana.



Slika 2. Grana grafa koja odgovara generalisanoj grani.

Sa Slike 1 možemo primijetiti da za generalisanu granu važi:

$$\underline{U} + \underline{U}_g = \underline{Z}\,(\underline{I}_g + \underline{I}) \quad \textbf{(1.1)}$$

$$\underline{I} + \underline{I}_g = \underline{Y}\,(\underline{U}_g + \underline{U}) \quad \textbf{(1.2)}$$

Ukoliko svaku granu kola ekvivalentiramo generalisanom granom, a zatim sa $\underset{\sim}{u}(t)$ označimo vektor napona generalisanih grana, sa $\underset{\sim}{i}(t)$ vektor struja generalisanih grana, sa $\underset{\sim}{u}_g(t)$ vektor napona naponskih generatora koji se nalaze u generalisanim granama, a sa $\underset{\sim}{i}_g(t)$ vektor struja strujnih generatora koji se nalaze u generalisanim granama, važe sledeće jednačine:

$$\underset{\sim}{u}(t) + \underset{\sim}{u}_g(t) = \underset{\sim}{Z}(D) \cdot \left[\underset{\sim}{i}(t) + \underset{\sim}{i}_g(t)\right] \quad \textbf{(1.3)}$$

$$\underset{\sim}{i}(t) + \underset{\sim}{i}_g(t) = \underset{\sim}{Y}(D) \cdot \left[\underset{\sim}{u}(t) + \underset{\sim}{u}_g(t)\right] \quad \textbf{(1.4)}$$

gdje su $\underset{\sim}{Z}(D)$ i $\underset{\sim}{Y}(D)$ matrice operatorskih impedansi i admitansi grana. Ove matrice su kvadratne matrice reda bxb. Ako kolo ne sadrži induktivno spregnute elemente ili kontrolisane izvore, onda su $\underset{\sim}{Z}(D)$ i $\underset{\sim}{Y}(D)$ dijagonalne matrice, a elementi po dijagonali odgovaraju odnosima napona I struja, odnosno struja i napona pojedinih grana, respektivno.

Ukoliko ograničimo analizu na kola sa otpornicima, kalemovima, kondezatorima i induktivno spregnutim kolima, matricu impedansi popunjavamo na osnovu sledećih relacija napon-struja.

1) Za pasivnu granu:

$$u_k(t) = R_k \cdot i_k(t) \tag{1.5}$$

2) Za granu sa kalemom:

$$u_k(t) = L_k \frac{di_k(t)}{dt} \tag{1.6}$$

3) Za granu sa kondezatorom:

$$u_k(t) = \frac{1}{C_k}\int_0^t i_k(\tau)d\tau \tag{1.7}$$

4) Za induktivno spregnutu granu *k*:

$$u_k(t) = L_k \frac{di_k(t)}{dt} \pm \sum_{l,k;l\neq k} L_{kl}\frac{di_l(t)}{dt} \tag{1.8}$$

Sa druge strane, prilikom određivanja matrice admitansi interesuje nas relacija struja-napon:

1) Za pasivnu granu:

$$i_k(t) = G_k \cdot u_k(t) \tag{1.9}$$

pri čemu je G_k provodnost grane *k.*

2) Za granu sa kalemom:

$$i_k(t) = \frac{1}{L_k}\int_0^t u_k(\tau)d\tau \tag{1.10}$$

3) Za granu sa kondezatorom:

$$i_k(t) = C_k \frac{du_k(t)}{dt} \tag{1.11}$$

4) Za induktivno spregnutu granu *k,* relaciju struja-napon dobijamo na osnovu (1.8):

$$i_k(t) = \frac{1}{L_k}\int_0^t u_k(\tau)d\tau \mp \frac{1}{L_k}\sum_{l,k;l\neq k} L_{kl} i_l(t) \tag{1.12}$$

Ukoliko je grana *k* spregnuta sa samo jednom granom *l*:

$$i_k(t) = \frac{1}{L_k}\int_0^t u_k(\tau)d\tau \mp \frac{L_{kl}}{L_k} i_l(t) \quad \textbf{(1.13)}$$

Kada uvrstimo izaz sa struju $i_l(t)$ dobijamo:

$$i_k(t) = \frac{1}{L_k}\int_0^t u_k(\tau)d\tau \mp \frac{L_{kl}}{L_k}\left(\frac{1}{L_l}\int_0^t u_l(\tau)d\tau \mp \frac{L_{kl}}{L_l} i_k(t)\right) \quad \textbf{(1.14)}$$

Odnosno:

$$\left(1 - \frac{L_{lk}{}^2}{L_l \cdot L_k}\right) i_k(t) = \frac{1}{L_k}\int_0^t u_k(\tau)d\tau \mp \frac{L_{kl}}{L_k \cdot L_k}\int_0^t u_l(\tau)d\tau \quad \textbf{(1.15)}$$

Na osnovu prethodne jednačine konačno dolazimo do relacije koja povezuje struju grane *k* sa naponom te grane i naponom induktivno spregnute grane *l*:

$$i_k(t) = \frac{L_l}{L_k L_l - L_{lk}{}^2}\int_0^t u_k(\tau)d\tau \mp \frac{L_{kl}}{L_k L_k - L_{lk}{}^2}\int_0^t u_l(\tau)d\tau \quad \textbf{(1.16)}$$

Ovu jednačinu koristićemo u skraćenom zapisu:

$$i_k(t) = \Gamma_k \int_0^t u_k(\tau)d\tau \mp \Gamma_{kl}\int_0^t u_l(\tau)d\tau \quad \textbf{(1.17)}$$

Gdje je:

$$\Gamma_k = \frac{L_l}{L_k L_l - L_{lk}{}^2} \quad \textbf{(1.18)}$$

$$\Gamma_{kl} = \mp \frac{L_{kl}}{L_k L_l - L_{lk}{}^2}$$

(1.19)

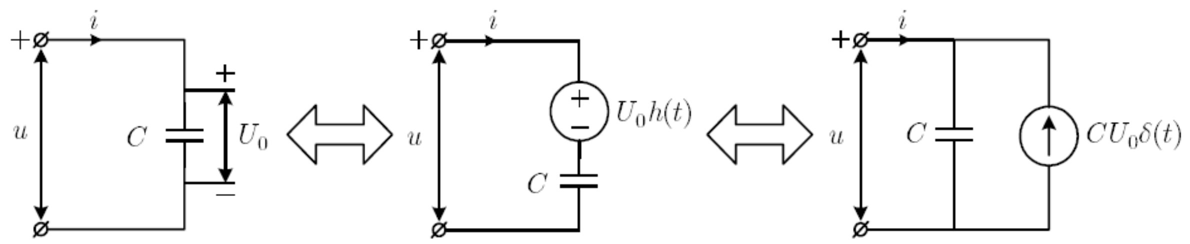
Ukoliko u kolu imamo dinamičke elemente (kalemove i kondezatore) sa akumulisanom energijom, neophodno je prilikom rešavanja kola uzeti u obzir uticaj početnih uslova, tj. vrijednosti struje kalema $i_l(0^-) = I_o$, odnosno napona kondezatora $u_c(0^-) = U_o$ neposredno prije dejstva pobude. Jedan od načina na koji se ovo može postići je uvođenje operatorskih šema za kalemove i kondezatore u kolu.

Na Slici 3. Prikazane su operatorske šeme kondezatora čiji je napon neposredno prije pobude kola u trenutku *t=0* iznosio $u_c(0^-) = U_o$. Šeme su izvedene iz izraza za napon:

$$u(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0} i(\tau)d\tau + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau = U_o h(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau \quad \textbf{(1.20)}$$

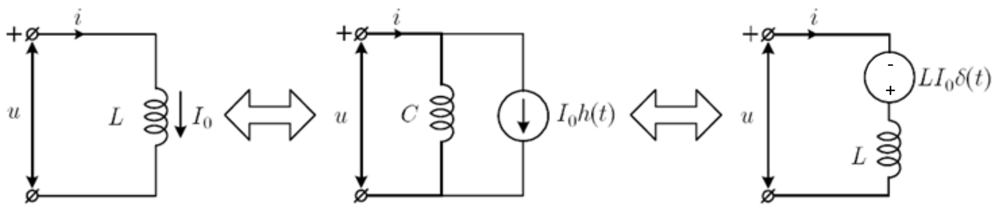
iz kojeg struju kodenzatora možemo izraziti na sledeći način:

$$i(t) = -CU_o \frac{dh(t)}{dt} + C\frac{du(t)}{dt} = -CU_o\delta(t) + C\frac{du(t)}{dt} \quad \textbf{(1.21)}$$



Slika 3. Operatorska šema kondezatora.

Operatorske šeme kalema prikazane su na Slici 4 i izvode se na sličan način:



Slika 3. Operatorska šema kalema.

$$i(t)=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t}u(\tau)d\tau=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{0}u(\tau)d\tau+\frac{1}{L}\int_{0}^{t}u(\tau)d\tau=I_o h(t)+\frac{1}{L}\int_{0}^{t}u(\tau)d\tau \quad \textbf{(1.22)}$$

$$u(t)=-LI_o\frac{dh(t)}{dt}+L\frac{di(t)}{dt}=-LI_o\delta(t)+L\frac{di(t)}{dt} \quad \textbf{(1.23)}$$

Metod nezavisnih struja

Poznato je da je algebarska suma napona grana osnovnih kontura jednaka nuli. U ustaljenom prostoperiodičnom režimu ovaj sistem od $m=b-c+1$ jednačina ima oblik:

$$\underset{\sim}{B}_f\cdot\underset{\sim}{u}=\underset{\sim}{0} \quad \textbf{(1.24)}$$

Uvrštavanjem vrijednosti za napone grana iz jednačine (1.3) dobijamo:

$$\underset{\sim}{B}_f\underset{\sim}{Z}(D)\underset{\sim}{i}(t)=\underset{\sim}{B}_f\left[\underset{\sim}{u}_g(t)-\underset{\sim}{Z}(D)\underset{\sim}{i}_g(t)\right] \quad \textbf{(1.25)}$$

Struje grana se mogu izraziti preko struja osnovnih kontura:

$$\underset{\sim}{i}(t)=\underset{\sim}{B}_f{}^T\underset{\sim}{i}_L(t) \quad \textbf{(1.26)}$$

pa imamo:

$$\underset{\sim}{B}_f\underset{\sim}{Z}(D)\underset{\sim}{B}_f{}^T\underset{\sim}{i}_L(t)=\underset{\sim}{B}_f\left[\underset{\sim}{u}_g(t)-\underset{\sim}{Z}(D)\underset{\sim}{i}_g(t)\right] \quad \textbf{(1.27)}$$

ili:

$$Z_m\underset{\sim}{i}_L(t)=\underset{\sim}{V}_g \quad \textbf{(1.28)}$$

Matrica:

$$Z_m = \underset{\sim}{B}_f \underset{\sim}{Z}(D) \underset{\sim}{B}_f^{\,T} \qquad \textbf{(1.29)}$$

se naziva matrica impedansi kontura. Za pasivnu recipročnu mrežu, matrica impedansi kontura je simetrična.

Vektor:

$$\underset{\sim}{V}_g = \underset{\sim}{B}_f \left[\underset{\sim}{u}_g(t) - \underset{\sim}{Z}(D) \underset{\sim}{i}_g(t) \right] \qquad \textbf{(1.30)}$$

je vektor ekvivalentnih naponskih izvora kontura.

Elemente matrice impedansi kontura moguće je interpretirati na sledeći način. Svaki element na glavnoj dijagonali je suma impedansi grana koje pripadaju odgovarajućoj konturi, s tim što je potrebno obratiti pažnju na induktivno spregnute grane. Svaki element koji ne pripada glavnoj dijagonali jednak je sumi impedansi u granama koje su zajedničke odgovarajućim konturama, sa predznakom plus ako se orijentacije kontura u zajedničkoj grani podudaraju, a sa predznakom minus ako se orijentacije kontura u zajedničkoj grani ne podudaraju. Sa druge strane, elementi vektora $\underset{\sim}{V}_g$ su algebarske sume napona naponskih generatora (uključujući i Tevenenove generatore) u odgovarajućoj konturi, sa referentnim smjerovima izabranim tako da budu usaglašeni sa orijentacijom konture.

Metod nezavisnih napona

Poznato je da je algebarski zbir struja svih grana presjeka jednak nuli, pa se to može zapisati kao:

$$\underset{\sim}{Q}_a \cdot \underset{\sim}{i}(t) = \underset{\sim}{0} \qquad \textbf{(1.31)}$$

Pošto je rang potpune matrice presjeka jednak *n = c − 1*, odnosno, rangu matrice osnovnih presjeka, dovoljno je posmatrati sistem od *n* jednačina:

$$\underset{\sim}{Q}_f \cdot \underset{\sim}{i}(t) = \underset{\sim}{0} \qquad \textbf{(1.32)}$$

Uvrštavanjem vrijednosti za struje grane iz jednačine (1.4) dobijamo:

$$\underset{\sim}{Q}_f \underset{\sim}{Y}(D) \underset{\sim}{u}(t) = \underset{\sim}{Q}_f \left[\underset{\sim}{i}_g(t) - \underset{\sim}{Y}(D) \underset{\sim}{u}_g(t) \right] \qquad \textbf{(1.33)}$$

Naponi grana grafa se mogu izraziti preko napona grana stabla:

$$\underset{\sim}{u}(t) = \underset{\sim}{Q}_f^{\,T} \cdot \underset{\sim}{u}_T(t) \qquad \textbf{(1.34)}$$

Sada je:

$$\underset{\sim}{Q}_f \underset{\sim}{Y}(D) \underset{\sim}{Q}_f^{\,T} \underset{\sim}{u}_T(t) = \underset{\sim}{Q}_f \left[\underset{\sim}{i}_g(t) - \underset{\sim}{Y}(D) \underset{\sim}{u}_g(t) \right] \qquad \textbf{(1.35)}$$

Odnosno:

$$\underset{\sim}{Y}_t \underset{\sim}{u}_T(t) = \underset{\sim}{J}_t \qquad \textbf{(1.36)}$$

Matrica:

$$\underset{\sim}{Y}_t = \underset{\sim}{Q}_f \underset{\sim}{Y}(D) \underset{\sim}{Q}_f^{\ T} \qquad \textbf{(1.37)}$$

se naziva matrica admitansi glavnih presjeka. Elementi matrice admitansi glavnih presjeka se mogu interpretirati na sledeći naćin. Vrijednosti elemenata na glavnoj dijagonali su jednake sumi admitansi svih grana koje pripadaju posmatranom presjeku. Elementi koji se ne nalaze na glavnoj dijagonali su jednaki plus ili minus admitansi grane koja je zajednička za dva posmatrana presjeka. Znak plus se koristi kada je orijentacija grane podudarna sa orijentacijama oba presjeka, a minus u suprotnom.

Vektor:

$$\underset{\sim}{J}_t = \underset{\sim}{Q}_f \left[\underset{\sim}{i}_g(t) - \underset{\sim}{Y}(D) \underset{\sim}{u}_g(t) \right] \qquad \textbf{(1.38)}$$

se naziva vektor ekvivalentnih strujnih generatora osnovnih presjeka. Vrijednosti elemenata ovog vektora su algebarske sume strujnih generatora, uključujući i ekvivalentne Nortonove generatore, u granama koje pripadaju odgovarajućem presjeku sa referentnim smjerom koji odgovara orijentaciji presjeka.

Metod potencijala čvorova

Algebarska suma struja grana u svakom čvoru kola je prema prvom Kirhohovom zakonu jednaka nuli. U ustaljenom prostoperiodičnom režimu ovaj sistem od *c* jednačina se može napisati u obliku:

$$\underset{\sim}{A}_a \cdot \underset{\sim}{i}(t) = \underset{\sim}{0} \qquad \textbf{(1.39)}$$

gdje je $\underset{\sim}{A}_a$ potpuna matrica incidencija. Pošto je rang potpune matrice incidencija jednak *n = c − 1*, jednačine u ovom sistemu nisu linearno nezavisne. Ako jedan čvor u kolu izaberemo za referentni, jednačine po prvom Kirhohovom zakonu za ostale čvorove su linearno nezavisne:

$$\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{i}(t) = \underset{\sim}{0} \qquad \textbf{(1.40)}$$

U jedančini (1.40) $\underset{\sim}{A}$ je matrica incidencija za nezavisne (nereferentne) čvorove u kolu. Uvrštavanjem vrijednosti za struje grana iz jednačine (1.4) dobija se:

$$\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{Y}(D) \underset{\sim}{u}(t) = \underset{\sim}{A} \left[i_g(t) - \underset{\sim}{Y}(D) \underset{\sim}{u}_g(t) \right] \qquad \textbf{(1.41)}$$

Naponi grana grafa se mogu izraziti preko potencijala čvorova:

$$\underset{\sim}{u}(t) = \underset{\sim}{A}^T \underset{\sim}{v}(t) \qquad \textbf{(1.42)}$$

gdje je $\underset{\sim}{v}(t)$ vektor potencijala nezavisnih čvorova u odnosu na odabrani referentni čvor. Sada je:

$$\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{Y}(D) \underset{\sim}{A}^T \underset{\sim}{v}(t) = \underset{\sim}{A} \left[i_g(t) - \underset{\sim}{Y}(D) \underset{\sim}{u}_g(t) \right] \qquad \textbf{(1.43)}$$

ili:

$$\underset{\sim}{Y}_n \underset{\sim}{v}(t) = \underset{\sim}{J}_g \qquad \textbf{(1.44)}$$

Matrica

$$\underset{\sim}{Y}_n = \underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{Y}(D) \underset{\sim}{A}^T \tag{1.45}$$

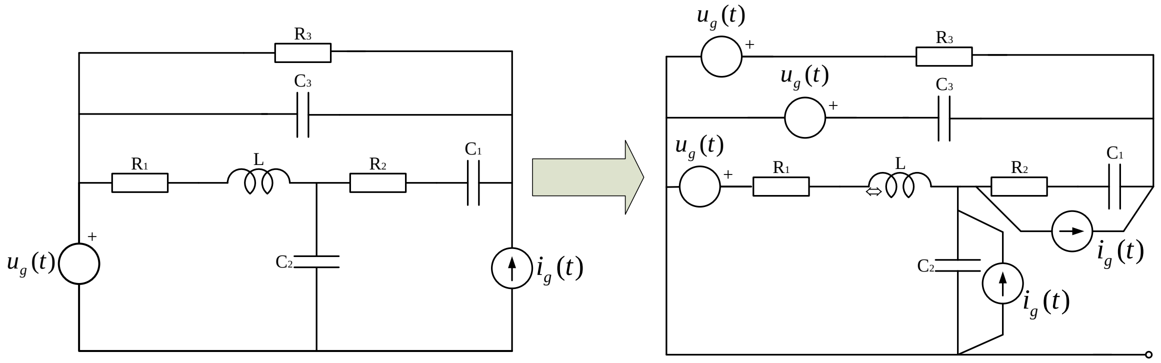
se naziva matrica admitansi čvorova. Elementi matrice admitansi čvorova se mogu interpretirati na sledeći način. Vrijednosti elemenata na glavnoj dijagonali su jednake sumi admitansi svih grana incidentnih odgovarajućem čvoru. Elementi koji se ne nalaze na glavnoj dijagonali su jednaki negativnoj admitansi grane koja se nalazi izmedu dva čvora. Vektor:

$$\underset{\sim}{J}_g = \underset{\sim}{A}\left[\underset{\sim}{i}_g(t) - \underset{\sim}{Y}(D) \underset{\sim}{u}_g(t) \right] \tag{1.46}$$

se naziva vektor ekvivalentnih strujnih generatora čvorova. Vrijednosti elemenata ovog vektora su algebarske sume strujnih generatora, uključujući i ekvivalentne Nortonove generatore, u granama incidentnim odgovarajućem čvoru, sa referentnim smjerom izabranim prema čvoru.

Pomjeranje naponskog i strujnog generatora

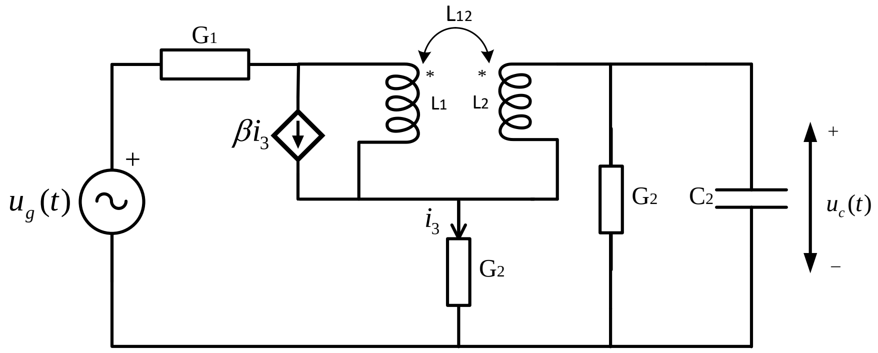
Prilikom izbora grana grafa posebnu pažnju treba posvetiti idealnim naponskim i strujnim generatorima. Pošto je u grani određenoj idealnim generatorom napon ili struja generatora poznata velčina, ukoliko se idealni generatori posmatraju kao zasebne generalisane grane, nije moguće uspostaviti vezu izmedu napona i struje posmatrane grane, što je neophodno za definisanje matrice impedansi odnono admitansi kola. Zbog toga u graf nećemo dodavati grane odeređene idealnim generatorima već ćemo transformisati kolo tako da grana bude određena rednom vezom idealnog naponskog generatora i pasivnog elementa, odnosno, paralelnom vezom idealnog strujnog generatora i pasivnog elementa. U slučaju da u kolu figuriše idealni naponski generator, moguće ga je premjestiti u grane koje se spajaju u čvoru u koji je spojen jedan od njegovih priključaka, pri čemu se priključci ranije pozicije idealnog naponskog generatora kratko spajaju. Ova transformacija rezultuje ekvivalentnim kolom jer će jednačine dobijene primjenom KZN biti nepromijenjene. Sa druge strane, u rezultujućem kolu je svaki idealni naponski generator redno vezan sa nekim pasivnim elementom što omogućava da se odredi veza izmedu napona i struje odgovarajuće grane grafa. Analogno, idealni strujni generator je moguće premjestiti paralelno svim granama koje sa polaznom pozicijom idealnog strujnog generatora čine konturu, pri čemu se polazni priključci strujnog generatora ostavljaju otvoreni. Dobijeno kolo je ekvivalentno polaznom jer će jednačine dobijene primjenom KZS biti nepromijenjene, ali će paralelno svakom idealnom strujnom generatoru biti vezan jedan pasivni element. što omogućava da se odredi veza izmedu napona i struje odgovarajuće grane. Ove transformacije se nazivaju *pomjeranje naponskog*, odnosno, *strujnog generatora*, respektivno. Na Slici 5 dat je primjer kola koje je potrebno transformisati pomjeranjem naponskih i strujnih generatora.



Slika 5. Pomjeranje naponskih i strujnih generatora.

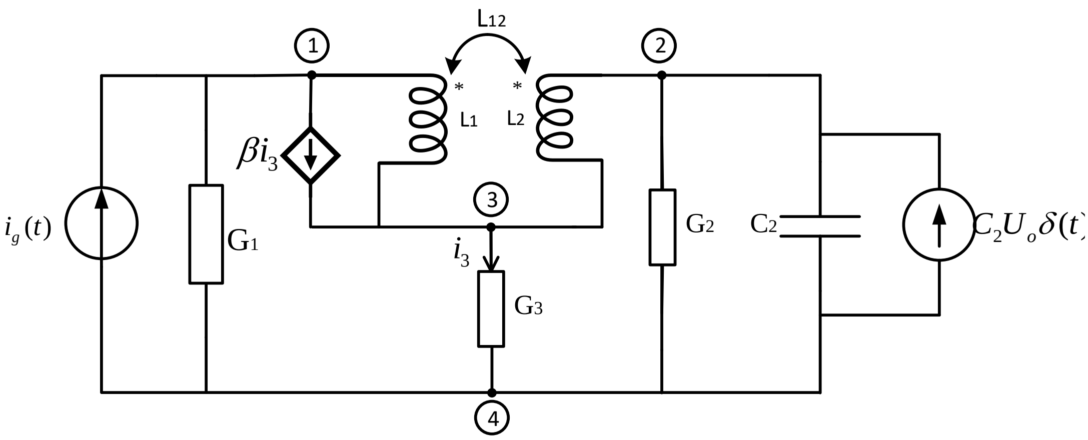
ZADACI

1. Za kolo prikazano na slici izvesti jednačine napona osnovnih presjeka u operatorskom obliku. Poznato je da je $u_c(0^-) = U_o$.



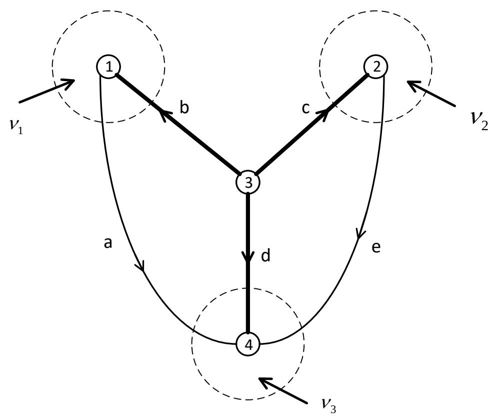
Rešenje:

Uticaj početnih uslova uzećemo u obzir korišćenjem operatorske šeme za kondezator. Takođe trasformisaćemo kolo tako da nema naponskih generatora.



$$i_g(t) = u_g(t) G_1 h(t)$$

Graf kola:



b = 5 grana

c = 4 čvora

broj grana stabla: n = c – 1 = 3

T={b,c,d}

$$\underset{\sim}{Q}_f = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} b & c & d & a & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matrica admitansi kola:

$$\underset{\sim}{Y}(D) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} b & c & d & a & e \end{array} \\ \begin{bmatrix} \Gamma_1 D^{-1} & \Gamma_{12} D^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma_{12} D^{-1} & \Gamma_2 D^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_2 + C_2 D \end{bmatrix} \end{array}$$

Vektori napona stabla, naponskih i strujnih generatora grana, redom:

$$\underset{\sim}{u}_T(t) = \begin{bmatrix} u_b(t) \\ u_c(t) \\ u_d(t) \end{bmatrix}; \qquad \underset{\sim}{u}_g(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \underset{\sim}{i}_g(t) = \begin{bmatrix} \beta i_3(t) \\ 0 \\ 0 \\ i_g(t) h(t) \\ C_2 U_o \delta(t) \end{bmatrix}$$

Pri čemu je $i_3(t) = G_3 u_d(t)$.

Do konačnog rešenja dolazimo korišćenjem jednačine (1.35):

$$\underset{\sim}{Q}_f \cdot \underset{\sim}{Y}(D) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Gamma_1 D^{-1} & \Gamma_{12} D^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma_{12} D^{-1} & \Gamma_2 D^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_2 + C_2 D \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \Gamma_1 D^{-1} & \Gamma_{12} D^{-1} & 0 & -G_1 & 0 \\ \Gamma_{12} D^{-1} & \Gamma_2 D^{-1} & 0 & 0 & -(G_2 + C_2 D) \\ 0 & 0 & G_3 & G_1 & G_2 + C_2 D \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{Z}_m = \underset{\sim}{Q}_f \cdot \underset{\sim}{Y}(D) \cdot \underset{\sim}{Q}_f^{\,T} = \begin{bmatrix} \Gamma_1 D^{-1} & \Gamma_{12} D^{-1} & 0 & -G_1 & 0 \\ \Gamma_{12} D^{-1} & \Gamma_2 D^{-1} & 0 & 0 & -(G_2 + C_2 D) \\ 0 & 0 & G_3 & G_1 & G_2 + C_2 D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

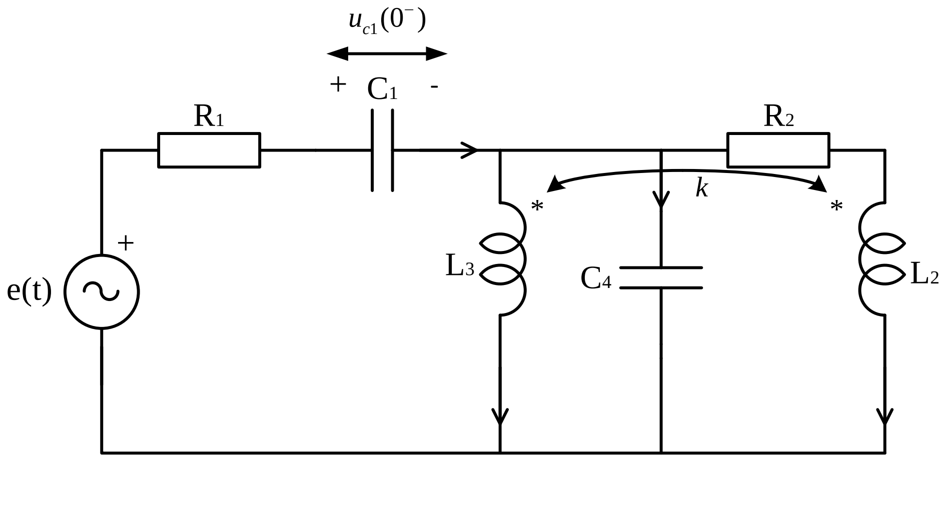
$$= \begin{bmatrix} G_1 + \Gamma_1 D^{-1} & \Gamma_{12} D^{-1} & -G_1 \\ \Gamma_{12} D^{-1} & G_2 + \Gamma_2 D^{-1} + C_2 D & -(G_2 + C_2 D) \\ -G_1 & -(G_2 + C_2 D) & G_3 + G_1 + G_2 + C_2 D \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{J}_t = \underset{\sim}{Q}_f \underset{\sim}{i}_g(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta i_3(t) \\ 0 \\ 0 \\ i_g(t)h(t) \\ CU_o\delta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta G_3 u_d(t) - G_1 u_g(t)h(t) \\ -C_2 U_o \delta(t) \\ G_1 u_g(t)h(t) + C_2 U_o \delta(t) \end{bmatrix}$$

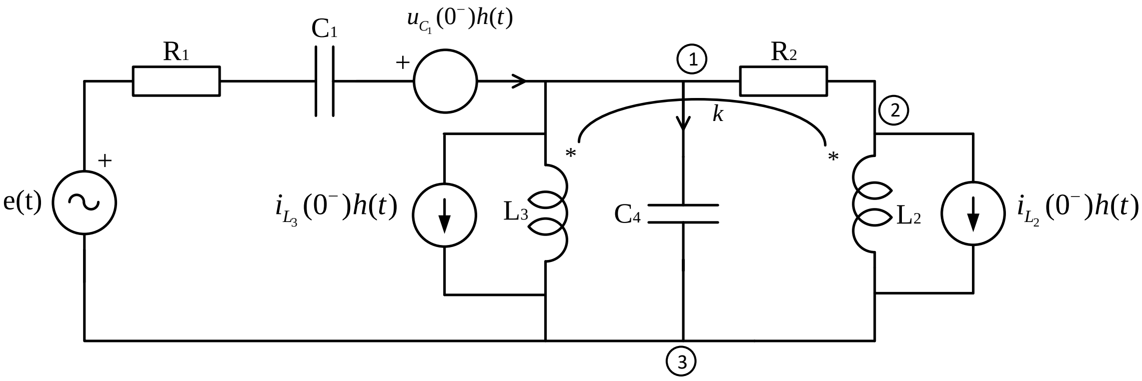
Kako je $\underset{\sim}{Y}_t \underset{\sim}{u}_T(t) = \underset{\sim}{J}_t$, dolazimo do konačnog sistema jednačina:

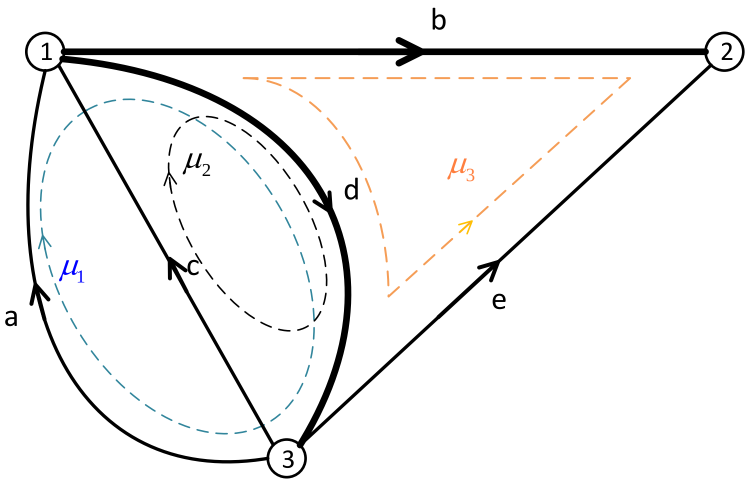
$$\begin{bmatrix} G_1 + \Gamma_1 D^{-1} & \Gamma_{12} D^{-1} & -G_1 \\ \Gamma_{12} D^{-1} & G_2 + \Gamma_2 D^{-1} + CD & -(G_2 + C_2 D) \\ -G_1 & -(G_2 + CD) & G_3 + G_1 + G_2 + C_2 D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_b(t) \\ u_c(t) \\ u_d(t) \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} \beta G_3 u_d(t) - G_1 u_g(t)h(t) \\ -C_2 U_o \delta(t) \\ G_1 u_g(t)h(t) + C_2 U_o \delta(t) \end{bmatrix}$$

2. Za mrežu sa slike izvesti jednačine nazavisnih struja u operatorskom obliku. Poznati parametri su: $R_1, C_1, L_3, C_4, R_2, L_2, k$ i veličine $e(t)$, $i_{L_3}(0^-)$, $i_{L_2}(0^-)$ i $u_{C_1}(0^-)$.



Rešenje:





b = 5 grana

c = 3 čvora

broj grana stabla: n = c – 1 = 2

T={b, d}

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} b & d & a & c & e \end{matrix} \\ \underset{\sim}{B}_f = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matrica impedansi kola:

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} b & \quad d & \quad a & \quad c & \quad e \end{matrix} \\ \underset{\sim}{Z}(D) = & \begin{bmatrix} R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_4 D} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_1 + \frac{1}{C_1 D} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_3 D & L_{23} D \\ 0 & 0 & 0 & L_{23} D & L_2 D \end{bmatrix} \end{array}$$

Do rešenja dolazimo na osnovu jednačine:

$$\underset{\sim}{B}_f \underset{\sim}{Z}(D) \underset{\sim}{B}_f^{\,T} \underset{\sim}{i}_L(t) = \underset{\sim}{B}_f \left[\underset{\sim}{u}_g(t) - \underset{\sim}{Z}(D) \underset{\sim}{i}_g(t) \right]$$

Odnosno:

$$Z_m \underset{\sim}{i}_L(t) = \underset{\sim}{V}_g$$

Matrica impedansi kontrura i vektor ekvivalentnih naponskih izvora kontura dobijaju se prema jednačinama:

$$Z_m = \underset{\sim}{B}_f \underset{\sim}{Z}(D) \underset{\sim}{B}_f^{\,T}$$

$$\underset{\sim}{V}_g = \underset{\sim}{B}_f \left[\underset{\sim}{u}_g(t) - \underset{\sim}{Z}(D) \underset{\sim}{i}_g(t) \right]$$

$$\underset{\sim}{B}_f \cdot \underset{\sim}{Z}(D) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_4 D} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_1 + \frac{1}{C_1 D} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_3 D & L_{23} D \\ 0 & 0 & 0 & L_{23} D & L_2 D \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_4 D} & R_1 + \frac{1}{C_1 D} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_4 D} & 0 & L_3 D & L_{23} D \\ -R_2 & \frac{1}{C_4 D} & 0 & L_{23} D & L_2 D \end{bmatrix}$$

$$Z_m = \underset{\sim}{B}_f \underset{\sim}{Z}(D) \underset{\sim}{B}_f^{\,T} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C_4 D} & R_1 + \frac{1}{C_1 D} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_4 D} & 0 & L_3 D & L_{23} D \\ -R_2 & \frac{1}{C_4 D} & 0 & L_{23} D & L_2 D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} R_1 + \frac{1}{C_1 D} + \frac{1}{C_4 D} & \frac{1}{C_4 D} & \frac{1}{C_4 D} \\ \frac{1}{C_4 D} & L_3 D + \frac{1}{C_4 D} & \frac{1}{C_4 D} + L_{23} D \\ \frac{1}{C_4 D} & \frac{1}{C_4 D} + L_{23} D & L_2 D + \frac{1}{C_4 D} + R_2 \end{bmatrix}$$

Vektor naponskih generatora, vektor strujnih generatora i vector struja spojnica, redom:

$$\underset{\sim}{u}_g(t)=\begin{bmatrix}0\\0\\ \left[e(t)-u_{c1}(0^-)\right]h(t)\\0\\0\end{bmatrix};\qquad \underset{\sim}{i}_g(t)=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\ i_{L_3}(0^-)h(t)\\ i_{L_2}(0^-)h(t)\end{bmatrix};\qquad \underset{\sim}{i}_L(t)=\begin{bmatrix}i_a(t)\\ i_c(t)\\ i_e(t)\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B}_f\cdot\underset{\sim}{u}_g(t)=\begin{bmatrix}0&1&1&0&0\\0&1&0&1&0\\-1&1&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\ \left[e(t)-u_{c1}(0^-)\right]h(t)\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left[e(t)-u_{c1}(0^-)\right]h(t)\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B}_f\cdot\underset{\sim}{Z}(D)\cdot\underset{\sim}{i}_g(t)=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{C_4D}&R_1+\frac{1}{C_1D}&0&0\\0&\frac{1}{C_4D}&0&L_3D&L_{23}D\\-R_2&\frac{1}{C_4D}&0&L_{23}D&L_2D\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\0\\ i_{L_3}(0^-)h(t)\\ i_{L_2}(0^-)h(t)\end{bmatrix}=$$

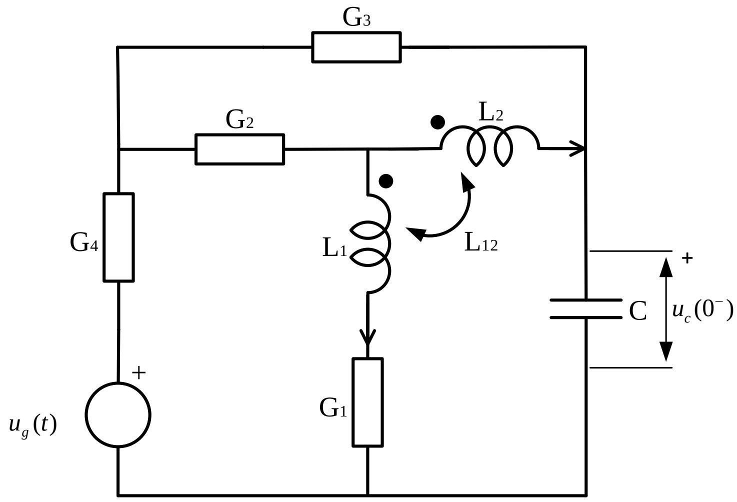
$$=\begin{bmatrix}0\\ \left[i_{L_3}(0^-)L_3+i_{L_2}(0^-)L_{23}\right]\delta(t)\\ \left[i_{L_3}(0^-)L_{23}+i_{L_2}(0^-)L_2\right]\delta(t)\end{bmatrix}$$

Konačno rešenje:

$$Z_m\underset{\sim}{i}_L(t)=\underset{\sim}{V}_g\ \Rightarrow$$

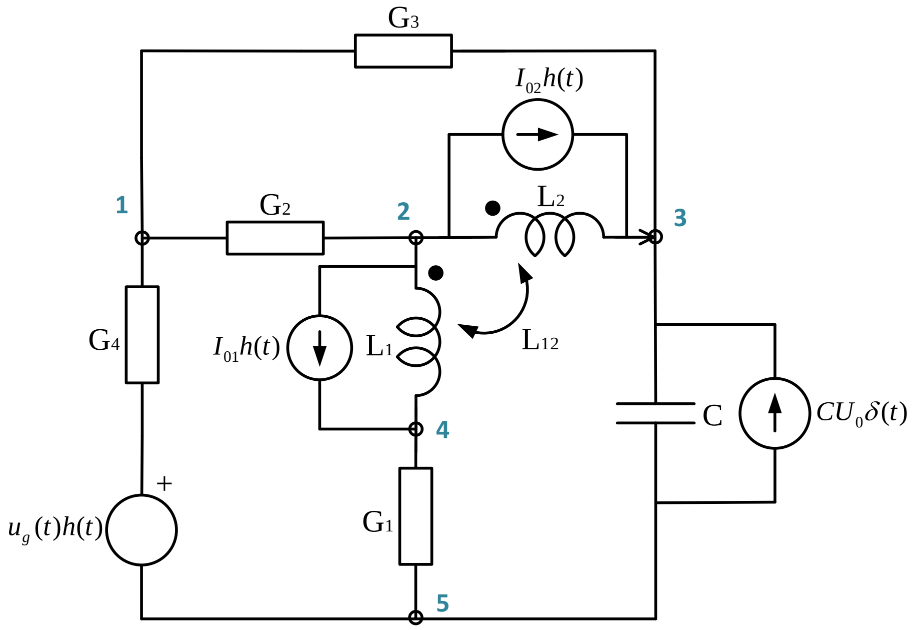
$$\begin{bmatrix}R_1+\frac{1}{C_1D}+\frac{1}{C_4D}&\frac{1}{C_4D}&\frac{1}{C_4D}\\ \frac{1}{C_4D}&L_3D+\frac{1}{C_4D}&\frac{1}{C_4D}+L_{23}D\\ \frac{1}{C_4D}&\frac{1}{C_4D}+L_{23}D&L_2D+\frac{1}{C_4D}+R_2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}i_a(t)\\ i_c(t)\\ i_e(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left[e(t)-u_{c1}(0^-)\right]h(t)\\ -\left[i_{L_3}(0^-)L_3+i_{L_2}(0^-)L_{23}\right]\delta(t)\\ -\left[i_{L_3}(0^-)L_{23}+i_{L_2}(0^-)L_2\right]\delta(t)\end{bmatrix}$$

3. Dato je kolo prema šemi. Poznati su svi parametri kola, $u_g(t)$ i početni uslovi $i_{L_1}(0^-) = I_{01}$, $i_{L_2}(0^-) = I_{02}$ i $u_c(0^-) = U_0$. Izvesti sistem jednačina potencijala čvorova u operatorskom obliku.

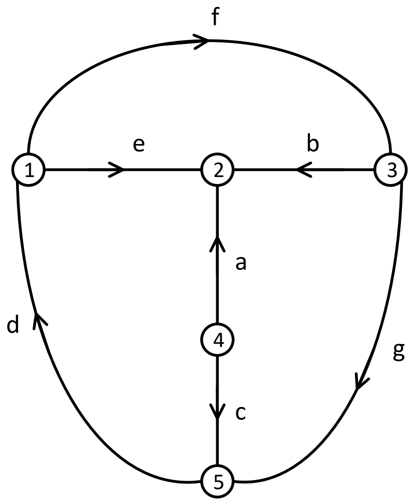


Rešenje:

Uticaj početnih uslova uzećemo u obzir korišćenjem operatorskih šema za kalemove i kondezator.



Graf kola:



b = 7 grana

c = 5 čvorova

broj nezavisnih čvorova: n = c – 1 = 4

Uzećemo da je čvor 5 referentni čvor, pa je matrica nezavisnih čvorova:

$$
\underset{\sim}{A} = \begin{array}{c c}
\begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \end{array} & \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} -> c1 \\ -> c2 \\ -> c3 \\ -> c4 \end{array}
\end{array}
$$

Operatorska matrica admitansi grana kola:

$$
\underset{\sim}{Y}(D) = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \end{array} \\
\begin{bmatrix} \Gamma_1 D^{-1} & \Gamma_{12} D^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma_{12} D^{-1} & \Gamma_2 D^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & CD \end{bmatrix}
\end{array}
$$

Pri čemu je:

$$\Gamma_1 = \frac{L_2}{L_1 L_2 - L_{12}^{\;2}}$$

$$\Gamma_2 = \frac{L_1}{L_1 L_2 - L_{12}^{\;2}}$$

$$\Gamma_{12} = -\frac{L_{12}}{L_1 L_2 - L_{12}^{\;2}}$$

Vektori nezavisnih naponskih i strujnih izvora:

$$\underset{\sim}{u}_g(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_g(t)h(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \underset{\sim}{i}_g(t) = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} I_{01}h(t) \\ I_{02}h(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ CU_0\delta(t) \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} -> a \\ -> b \\ -> c \\ -> d \\ -> e \\ -> f \\ -> g \end{array}$$

Jednačine potencijala čvorova dobijamo iz sledeće matrične jednačine:

$$\underset{\sim}{A} \cdot \underset{\sim}{Y}(D) \underset{\sim}{A}^T \underset{\sim}{v}(t) = \underset{\sim}{A}\left[\underset{\sim}{i}_g(t) - \underset{\sim}{Y}(D) \underset{\sim}{u}_g(t)\right]$$

Ili:

$$\underset{\sim}{Y}_n \underset{\sim}{v}(t) = \underset{\sim}{J}_g$$

gdje je $\underset{\sim}{v}(t)$ vektor potencijala nezavisnih čvorova:

$$\underset{\sim}{v}(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \\ v_4(t) \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{Y}(D)=\begin{bmatrix}0&0&0&-1&1&1&0\\-1&-1&0&0&-1&0&0\\0&1&0&0&0&-1&1\\1&0&1&0&0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\Gamma_1 D^{-1}&\Gamma_{12}D^{-1}&0&0&0&0&0\\\Gamma_{12}D^{-1}&\Gamma_2 D^{-1}&0&0&0&0&0\\0&0&G_1&0&0&0&0\\0&0&0&G_4&0&0&0\\0&0&0&0&G_2&0&0\\0&0&0&0&0&G_3&0\\0&0&0&0&0&0&CD\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}0&0&0&-G_4&G_2&G_3&0\\-(\Gamma_1+\Gamma_{12})D^{-1}&-(\Gamma_2+\Gamma_{12})D^{-1}&0&0&-G_2&0&0\\\Gamma_{12}D^{-1}&\Gamma_2 D^{-1}&0&0&0&-G_3&CD\\\Gamma_1 D^{-1}&\Gamma_{12}D^{-1}&G_1&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{Y}_n=\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{Y}(D)\cdot\underset{\sim}{A}^T=\begin{bmatrix}0&0&0&-G_4&G_2&G_3&0\\-(\Gamma_1+\Gamma_{12})D^{-1}&-(\Gamma_2+\Gamma_{12})D^{-1}&0&0&-G_2&0&0\\\Gamma_{12}D^{-1}&\Gamma_2 D^{-1}&0&0&0&-G_3&CD\\\Gamma_1 D^{-1}&\Gamma_{12}D^{-1}&G_1&0&0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&-1&0&1\\0&-1&1&0\\0&0&0&1\\-1&0&0&0\\1&-1&0&0\\1&0&-1&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}G_2+G_3+G_4&-G_2&-G_3&0\\-G_2&G_2+(\Gamma_1+2\Gamma_{12}+\Gamma_2)D^{-1}&-(\Gamma_2+\Gamma_{12})D^{-1}&-(\Gamma_1+\Gamma_{12})D^{-1}\\-G_3&-(\Gamma_2+\Gamma_{12})D^{-1}&\Gamma_2 D^{-1}+G_3+CD&\Gamma_{12}D^{-1}\\0&-(\Gamma_1+\Gamma_{12})D^{-1}&\Gamma_{12}D^{-1}&G_1+\Gamma_1 D^{-1}\end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{A}\cdot i_g(t)=\begin{bmatrix}0&0&0&-1&1&1&0\\-1&-1&0&0&-1&0&0\\0&1&0&0&0&-1&1\\1&0&1&0&0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}I_{01}h(t)\\I_{02}h(t)\\0\\0\\0\\0\\CU_0\delta(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-(I_{01}+I_{02})h(t)\\I_{02}h(t)+CU_0\delta(t)\\I_{01}h(t)\end{bmatrix}$$

$$
\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{Y}(D)\cdot\underset{\sim}{u}_g(t)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -G_4 & G_2 & G_3 & 0 \\ -(\Gamma_1+\Gamma_{12})D^{-1} & -(\Gamma_2+\Gamma_{12})D^{-1} & 0 & 0 & -G_2 & 0 & 0 \\ \Gamma_{12}D^{-1} & \Gamma_2 D^{-1} & 0 & 0 & 0 & -G_3 & CD \\ \Gamma_1 D^{-1} & \Gamma_{12}D^{-1} & G_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_g(t)h(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}=
$$

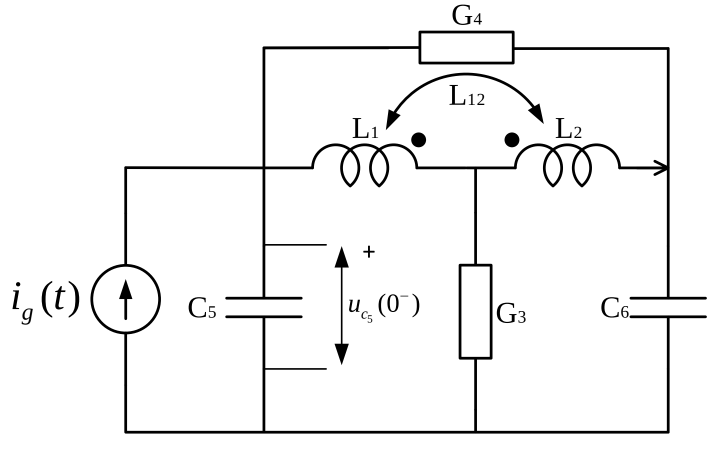
$$
=\begin{bmatrix} -G_4 u_g(t)h(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\underset{\sim}{J}_g=\underset{\sim}{A}\left[i_g(t)-\underset{\sim}{Y}(D)\underset{\sim}{u}_g(t)\right]=\begin{bmatrix} G_4 u_g(t)h(t) \\ -(I_{01}+I_{02})h(t) \\ I_{02}h(t)+CU_0\delta(t) \\ I_{01}h(t) \end{bmatrix}
$$

Sistem jednačina potencijala nezavisnih čvorova u operatorskom obliku:

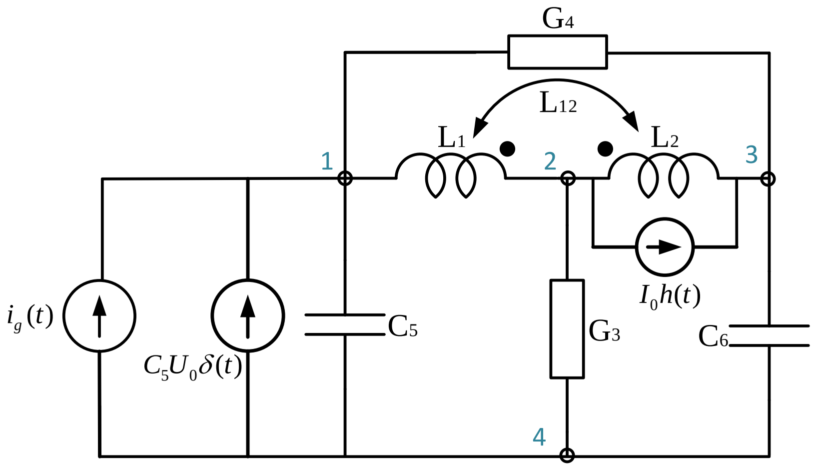
$$
\begin{bmatrix} G_2+G_3+G_4 & -G_2 & -G_3 & 0 \\ -G_2 & G_2+(\Gamma_1+2\Gamma_{12}+\Gamma_2)D^{-1} & -(\Gamma_2+\Gamma_{12})D^{-1} & -(\Gamma_1+\Gamma_{12})D^{-1} \\ -G_3 & -(\Gamma_2+\Gamma_{12})D^{-1} & \Gamma_2 D^{-1}+G_3+CD & \Gamma_{12}D^{-1} \\ 0 & -(\Gamma_1+\Gamma_{12})D^{-1} & \Gamma_{12}D^{-1} & G_1+\Gamma_1 D^{-1} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \\ v_4(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} G_4 u_g(t)h(t) \\ -(I_{01}+I_{02})h(t) \\ I_{02}h(t)+CU_0\delta(t) \\ I_{01}h(t) \end{bmatrix}
$$

4. Formirati sistem jednačina napona osnovnih presjeka u operatorskom obliku za kolo prema šemi. Poznati su svi paramtri kola, $i_g(t)$ i početni uslovi $i_{L_2}(0^-)=I_0$ i $u_{c_5}(0^-)=U_0$.

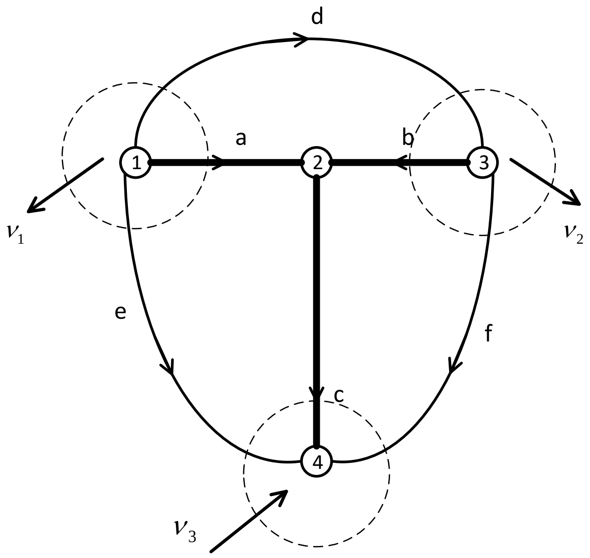


Rešenje:

Uticaj početnih uslova uzećemo u obzir korišćenjem operatorskih šema za kalem i kondezator.



Graf kola:



b = 6 grana

c = 4 čvorova

broj grana stabla: n = c – 1=3

T={a,b,c}

Matrica osnovnih presjeka:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\
Q_f = & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} -> v_1 \\ -> v_2 \\ -> v_3 \end{array}
\end{array}
$$

Matrica admitansi grana u operatorskom obliku:

$$\underset{\sim}{Y}(D)=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{bmatrix} \Gamma_1 D^{-1} & \Gamma_{12} D^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma_{12} D^{-1} & \Gamma_2 D^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_5 D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_6 D \end{bmatrix} \end{array}$$

Sistem jednačina napona osnovnih presjeka u operatorskom obliku je:

$$\underset{\sim}{Q}_f \underset{\sim}{Y}(D) \underset{\sim}{Q}_f{}^T \underset{\sim}{u}_T(t)=\underset{\sim}{Q}_f\left[\underset{\sim}{i}_g(t)-\underset{\sim}{Y}(D)\underset{\sim}{u}_g(t)\right]$$

Na osnovu vrijednosti vektora nezavisnih naponskih i strujnih izvora:

$$\underset{\sim}{u}_g(t)=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \underset{\sim}{i}_g(t)=\begin{bmatrix} 0 \\ I_0 h(t) \\ 0 \\ 0 \\ i_g(t)h(t)+C_5U_0\delta(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

dolazimo do sistema jednačina:

$$\begin{bmatrix} G_4+C_5D+\Gamma_1D^{-1} & -G_4+\Gamma_{12}D^{-1} & C_5D \\ -G_4+\Gamma_{12}D^{-1} & G_4+C_6D+\Gamma_2D^{-1} & C_6D \\ C_5D & C_6D & G_3+C_5D+C_6D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_a(t) \\ u_b(t) \\ u_c(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} i_g(t)h(t)+C_5U_0\delta(t) \\ I_0h(t) \\ i_g(t)h(t)+C_5U_0\delta(t) \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_1=\frac{L_2}{L_1L_2-L_{12}{}^2}\ ;\ \Gamma_2=\frac{L_1}{L_1L_2-L_{12}{}^2};\ \Gamma_{12}=-\frac{L_{12}}{L_1L_2-L_{12}{}^2}$$