Simetrične komponente u analizi neuravnoteženih trofaznih kola

Svaki problem neuravnoteženih trofaznih kola je poseban slučaj pa je cilj da se pronađe metodologija koja će važiti za sve konkretne slučajeve, to jest cilj je da se analiza neuravnoteženih trofaznih kola svede na analizu uravnoteženih trofaznih kola. To je postignuto uvođenjem simetričnih komponenti. Razložimo sistem faznih napona $\{\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3\}$ koji je za neuravnotežena kola nesimetričan, na tri komponente oblika:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_0 + \underline{U}_d + \underline{U}_i \qquad (1)$$

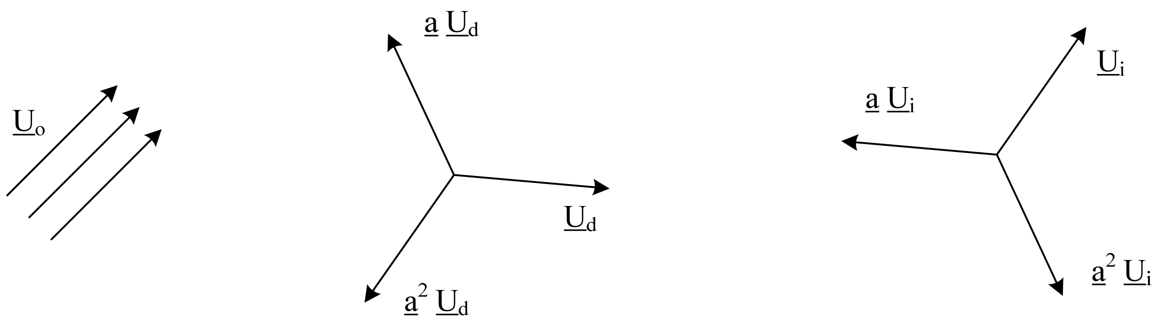
$$\underline{U}_2 = \underline{U}_0 + a^2\underline{U}_d + \underline{a}\underline{U}_i \qquad (2)$$

$$\underline{U}_3 = \underline{U}_0 + a\underline{U}_d + a^2\underline{U}_i \qquad (3)$$

Prva tri člana ovih jednačina predstavljaju nulti, druga tri direktni, a treća tri inverzni trofazni sistem. Ako saberemo ove tri jednačine dobijamo:

$$\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = 3\underline{U}_0 + \underline{U}_d\left(1 + a + a^2\right) + \underline{U}_i\left(1 + a + a^2\right)$$

a pošto je $\left(1 + a + a^2\right) = 0$, dobijamo: $\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = 3\underline{U}_0$. Dakle, nesimetrične napone razložili smo na tri simetrična trofazna sistema (nulti, direktni i inverzni). Kod nultog sistema sve tri faze su istog intenziteta, pravca i smjera, dok su direktni i inverzni sistem simetrični.



Nazivi i oznake:

- $\underline{U}_0$ - nulta komponenta napona $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$
- $\underline{U}_d$ - direktna komponenta napona $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$
- $\underline{U}_i$ - inverzna komponenta napona $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$
- $\underline{U}_0, \underline{U}_d, \underline{U}_i$ - su simetrične komponente napona $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$

Gledajući formalno matematički, relacijama (1), (2) i (3) smo prešli iz jednog oblika koordinata u drugi. Ti prelazi se obavljaju preko nesingularnih matrica (matrica čija je determinanta različita od nule).

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Matrice $\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix}$ su sistemi koordinata.

Uvedimo oznaku $\underset{\sim}{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{bmatrix}$

Lako se provjerava da je $\det\{\underset{\sim}{a}\} \neq 0$ gdje je a kompleksni operator i to $a = e^{j\frac{2\pi}{3}}$. Ovaj se prelaz jednostavno može izvršiti u oba smjera, to jest, možemo odrediti napone $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$ i $\underline{U}_3$, ako su poznate njihove simetrične komponente i obratno. Ako želimo da izrazimo $\underline{U}_0$, $\underline{U}_d$ i $\underline{U}_i$ dobićemo:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix} = \underline{a}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Pošto je matrica $\underset{\sim}{a}$ nesingularna to ona ima inverznu matricu koja je takođe nesingularna. Isto važi i za struje i njihove nesimetrične komponente:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_0 \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} \text{ i obratno:}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_0 \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} = \underline{a}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \end{bmatrix}$$

Ovo su definicione relacije za napone i struje nesimetričnih sistema napona i struja neuravnoteženih kola.

Definicije nulte, direktne i inverzne impedanse i admitanse trofaznih mreža

Po definiciji:

$\underline{Z}_0 = \dfrac{\underline{U}_0}{\underline{I}_0}$ – (6) – nulta impedansa mreže

$\underline{Z}_d = \dfrac{\underline{U}_d}{\underline{I}_d}$ – (7) – direktna impedansa mreže

$\underline{Z}_i = \dfrac{\underline{U}_i}{\underline{I}_i}$ – (8) – inverzna impedansa mreže

$\underline{Y}_0 = \frac{\underline{I}_0}{\underline{U}_0}$ – (6') – nulta admitansa mreže

$\underline{Y}_d = \frac{\underline{I}_d}{\underline{U}_d}$ – (7') – direktna admitansa mreže

$\underline{Y}_i = \frac{\underline{I}_i}{\underline{U}_i}$ – (8') – inverzna admitansa mreže

U praksi ove impedanse i admitanse se najlakše određuju mjerenjem, mada se mogu i izračunati. Alternativno se koriste i oznake: $\underline{Z}^{(0)}, \underline{Z}^{(d)}, \underline{Z}^{(i)}$ umjesto $\underline{Z}_0$, $\underline{Z}_d$, $\underline{Z}_i$ kao komponente impedansi mreže. Sada možemo definisati Omov zakon za simetrične komponente.

$$\begin{aligned} \underline{U}_0 &= \underline{Z}_0 \underline{I}_0 \\ \underline{U}_d &= \underline{Z}_d \underline{I}_d \\ \underline{U}_i &= \underline{Z}_i \underline{I}_i \end{aligned} \qquad (9)$$

odnosno:

$$\begin{aligned} \underline{I}_0 &= \underline{Y}_0 \underline{U}_0 \\ \underline{I}_d &= \underline{Y}_d \underline{U}_d \\ \underline{I}_i &= \underline{Y}_i \underline{U}_i \end{aligned} \qquad (10)$$

ili u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_d & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_0 \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} \qquad (9')$$

odnosno:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_0 \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Y}_d & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Y}_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix} \qquad (10')$$

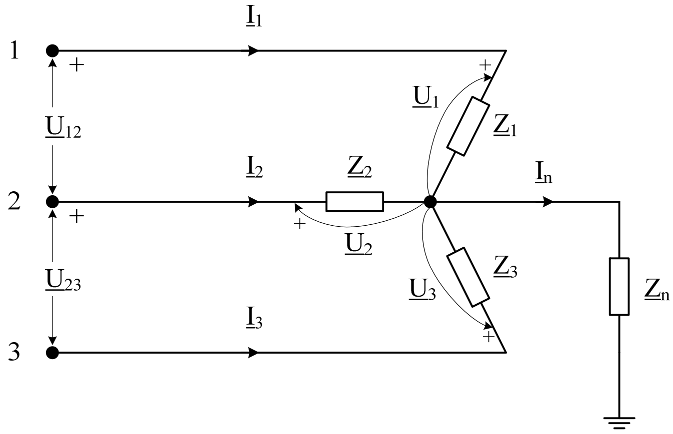
Jednačine (9) i (10) odnosno (9') i (10') predstavljaju Omov zakon za simetrične komponente. Ovim jednačinama, analiza neuravnoteženih trofaznih kola svedena ja na analizu uravnoteženih trofaznih kola. Dvije tipične grupe problema su:

I) Poznate su fazne struje $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$ i impedanse $\underline{Z}_0, \underline{Z}_d, \underline{Z}_i$ tada se proračunavaju (iz definicionih obrazaca) $\underline{I}_0, \underline{I}_d, \underline{I}_i$ iz $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$ (obrasci tipa 5). Tada se računaju $\underline{U}_0, \underline{U}_d, \underline{U}_i$ iz jednačina (9), (9'), a kada znamo $\underline{U}_0, \underline{U}_d, \underline{U}_i$ pomoću obrasca tipa 4 izračunavamo $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$

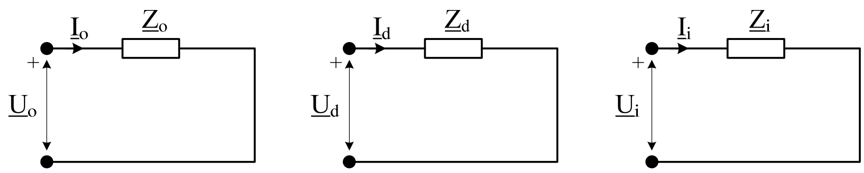
II) Poznati su naponi $\underline{U}_{1,}, \underline{U}_2, \underline{U}_3$ i admitanse. Tada se izračunavaju simetrične komponente napona $\underline{U}_{0,}, \underline{U}_d, \underline{U}_i$, na osnovu definicionih obrazaca tipa 4, zatim na osnovu jednačina (10) i (10') uvodimo simetrične komponente struja $\underline{I}_0, \underline{I}_d, \underline{I}_i$ pa na osnovu definicionog obrasca tipa 5 izračunavamo $\underline{I}_{1,}, \underline{I}_2, \underline{I}_3$.

Mreža nultog, direktnog i inverznog sistema

Imamo jedan prijemnik vezan u zvijezdu, tada se sistem $\{\underline{U}_{1,,}, \underline{U}_2, \underline{U}_3\}$ - sistem faznih napona prijemnika.



Ako je zvjezdište uzemljeno, za referentni potencijal se uzima potencijal Zemlje, čija se vrijednost potencijala obično uzima da je nula. Na osnovu zakona za simetrične komponente, neuravnotežena trofazna mreža, može se u pogledu napona i struja u njoj razdvojiti na tri monofazne odvojene mreže i to:



a) b) c)

a) Mreža nultog sistema
b) Mreža direktnog sistema
c) Mreža inverznog sistema

Ove se mreže dobijaju na osnovu Omovog zakona relacije (9) za simetrične komponente. Ako je nulta tačka (zvjezdište) neuzemljena tada je $\underline{Z}_n = \infty$ to jest, na osnovu Kirhofovog zakona za struje za tačku 0 imamo: $\underline{I}_n = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$. Napomena: Kako za napone tako i za struje važi: ako je $\{\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3\}$ sistem faznih struja prijemnika tada, za slučaj neuravnoteženih kola imamo:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_0 + \underline{I}_d + \underline{I}_i$$

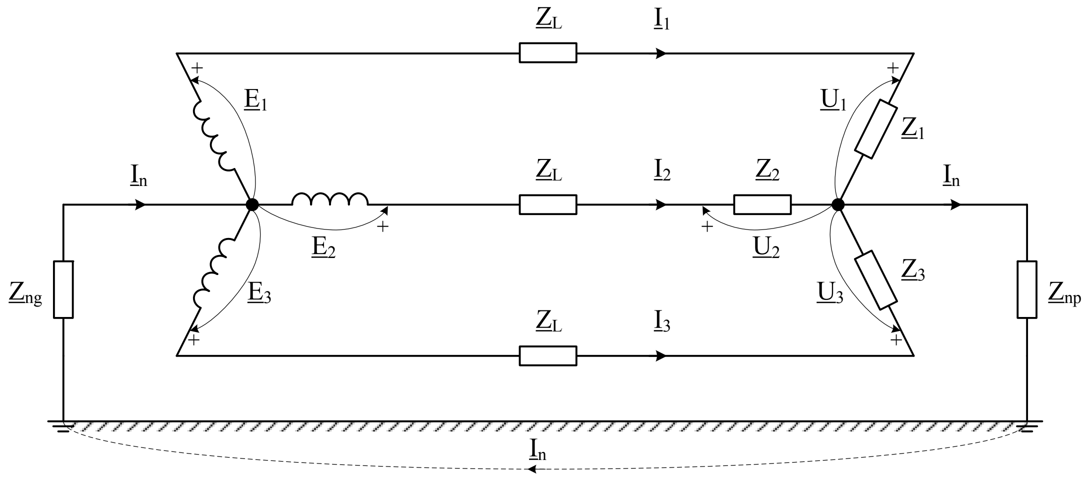
$$\underline{I}_1 = \underline{I}_0 + \underline{a}^2 \underline{I}_d + \underline{a}\underline{I}_i$$

$\underline{I}_1 = \underline{I}_0 + \underline{a}\underline{I}_d + \underline{a}^2\underline{I}_i$

Sabiranjem ovih jednačina, znajući da je $1 + \underline{a} + \underline{a}^2 = 0$ dobijamo: $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 3\underline{I}_0$. Sada na osnovu $\underline{I}_n = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$ imamo da je $\underline{I}_0 = 0$, tako da dolazimo do zaključka da je mreža nultog sistema prekinuta. Vidi se da su $\underline{Z}_0, \underline{Z}_d, \underline{Z}_i$ ulazne impedanse mreža nultog, direktnog i inverznog sistema.

Nulta, direktna i inverzna impedansa trofazne linije (provodnika za vezu faze generatora i prijemnika)

Ovo je potpuna šema trofazne mreže uz oznake:



$\{\underline{E}_1, \underline{E}_2, \underline{E}_3\}$ - sistem faznih napona generatora (nesimetričan u opštem slučaju)

$\{\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3\}$ - sistem faznih napona prijemnika

$\underline{Z}_l$ - impedansa linije (provodnika za vezu jedne faze generatora i prijemnika)

$\underline{Z}_{np}$ - impedansa uzemljenja prijemnika

$\underline{Z}_{ng}$ - impedansa uzemljenja generatora

$\underline{Z}_n = \underline{Z}_{np} + \underline{Z}_{ng}$ - ukupna impedansa uzemljenja

$\{\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3\}$ - sistem faznih struja prijemnika

$\underline{I}_n$ - struja neutralnog provodnika

Ako postavimo jednačine Kirhofovih zakona za napone, uvijek po konturi koja sadrži jednu fazu i neutralni provodnik, dobijamo:

$$\underline{E}_1 - \underline{U}_1 = \underline{Z}_l\underline{I}_1 + \underline{Z}_n\underline{I}_n \qquad (11)$$
$$\underline{E}_2 - \underline{U}_2 = \underline{Z}_l\underline{I}_2 + \underline{Z}_n\underline{I}_n \qquad (12)$$
$$\underline{E}_3 - \underline{U}_3 = \underline{Z}_l\underline{I}_3 + \underline{Z}_n\underline{I}_n \qquad (13)$$

Izvršimo transformacije ovog sistema jednačina. Saberimo jednačine (11), (12), (13), pa dobijamo:

$\underline{E}_1 + \underline{E}_2 + \underline{E}_3 - \left(\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3\right) = \underline{Z}_l\left(\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3\right) + 3\underline{Z}_n\underline{I}_n$

Kako je sistem napona generatora nesimetričan u opštem slučaju, a imajući u vidu da je $\underline{I}_n = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$, po definiciji je:

$$\underline{E}_1 + \underline{E}_2 + \underline{E}_3 = 3\underline{E}_0$$
$$\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = 3\underline{U}_0$$
$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 3\underline{I}_0$$

Sada je:

$$\underline{E}_0 - \underline{U}_0 = \left(\underline{Z}_l + 3\underline{Z}_n\right) = \underline{I}_0 \qquad (14)$$

pa iz ove jednačine dobijamo:

$\dfrac{\underline{E}_0 - \underline{U}_0}{\underline{I}_0} = \underline{Z}_l + 3\underline{Z}_n = \underline{Z}_0^{(l)}$ - nulta impedansa trofazne linije

$$\underline{Z}_0^{(l)} = \underline{Z}_l + 3\underline{Z}_n$$

Sada jednačini (11) dodajmo jednačinu (12) pomnoženu sa $\underline{a}$ i jednačinu (13) pomnoženu sa $\underline{a}^2$. Dobijamo:

$$\left(\underline{E}_1 + \underline{a}\underline{E}_2 + \underline{a}^2\underline{E}_3\right) - \left(\underline{U}_1 + \underline{a}\underline{U}_2 + \underline{a}^2\underline{U}_3\right) = \underline{z}_l\left(\underline{I}_1 + \underline{a}\underline{I}_2 + \underline{a}^2\underline{I}_3\right) + \left(1 + \underline{a} + \underline{a}^2\right)\underline{Z}_n\underline{I}_n$$

Kako je $\left(\underline{E}_1 + \underline{a}\underline{E}_2 + \underline{a}^2\underline{E}_3\right) = 3\underline{E}_d$, $\left(\underline{U}_1 + \underline{a}\underline{U}_2 + \underline{a}^2\underline{U}_3\right) = 3\underline{U}_d$ i $\left(\underline{I}_1 + \underline{a}\underline{I}_2 + \underline{a}^2\underline{I}_3\right) = 3\underline{I}_d$, a koristeći da je $\left(1 + \underline{a} + \underline{a}^2\right) = 0$ dobijamo:

$$\underline{E}_d - \underline{U}_d = \underline{Z}_l\underline{I}_d \qquad (15)$$

odnosno:

$\dfrac{\underline{E}_d - \underline{U}_d}{\underline{I}_d} = \underline{Z}_l = \underline{Z}_d^{(l)}$ - direktna impedansa trofazne linije

$$\underline{Z}_d^{(l)} = \underline{Z}_l$$

Sada jednačini (11) dodajmo jednačinu (12) pomnoženu sa $\underline{a}^2$ i jednačinu (13) pomnoženu sa $\underline{a}$. Dobija se:

$$\left(\underline{E}_1 + \underline{a}^2\underline{E}_2 + \underline{a}\underline{E}_3\right) - \left(\underline{U}_1 + \underline{a}^2\underline{U}_2 + \underline{a}\underline{U}_3\right) = \underline{Z}_l\left(\underline{I}_1 + \underline{a}^2\underline{I}_2 + \underline{a}\underline{I}_3\right) + \left(1 + \underline{a} + \underline{a}^2\right)\underline{Z}_n\underline{I}_n$$

Kako je: $\left(\underline{E}_1 + \underline{a}^2\underline{E}_2 + \underline{a}\underline{E}_3\right) = 3\underline{E}_i$, $\left(\underline{U}_1 + \underline{a}^2\underline{U}_2 + \underline{a}\underline{U}_3\right) = 3\underline{U}_i$ i $\left(\underline{I}_1 + \underline{a}^2\underline{I}_2 + \underline{a}\underline{I}_3\right) = 3\underline{I}_i$, a koristeći da je $\left(1 + \underline{a} + \underline{a}^2\right) = 0$ dobijamo:

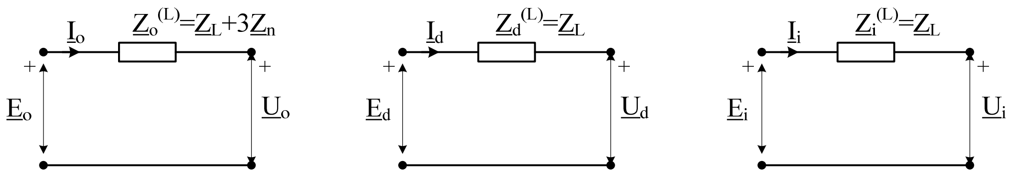
$$\underline{E}_i - \underline{U}_i = \underline{Z}_l\underline{I}_i \qquad (16)$$

odnosno:

$$\frac{\underline{E}_i - \underline{U}_i}{\underline{I}_i} = \underline{Z}_l = \underline{Z}_i^{(l)}$$ - inverzna impedansa linije

$$\underline{Z}_i^{(l)} = \underline{Z}_l$$

Jednačinama (14), (15), (16) mogu se pridružiti monofazne mreže i to:



a) b) c)

a) Mreža nultog sistema
b) Mreža direktnog sistema
c) Mreža inverznog sistema

Ako su neutralne tačke (zvjezdišta) generatora i prijemnika neuzemljene, to jest $\underline{Z}_{np} = \infty$, $\underline{Z}_{ng} = \infty$ odnosno $\underline{Z}_n = \underline{Z}_{np} + \underline{Z}_{ng} = \infty$, tada je mreža nultog napona u prekidu.

Dodatna objašnjenja

Dodatne relacije za simetrične komponente

Razložimo sistem faznih napona $\left\{\underline{U}_{1,,}, \underline{U}_2, \underline{U}_3\right\}$ na tri komponente oblika:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_0 + \underline{U}_d + \underline{U}_i \qquad (1)$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_0 + \underline{a}^2\underline{U}_d + \underline{a}\underline{U}_i \qquad (2)$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_0 + \underline{a}\underline{U}_d + \underline{a}^2\underline{U}_i \qquad (3)$$

Ako saberemo ove tri jednačine dobijamo:

$$\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = 3\underline{U}_0 + \underline{U}_d + \underline{a}^2\underline{U}_d + \underline{a}\underline{U}_d + \underline{U}_i + \underline{a}\underline{U}_i + \underline{a}^2\underline{U}_i = 3\underline{U}_0 + \underline{U}_d\left(1 + \underline{a} + \underline{a}^2\right) + \underline{U}_i\left(1 + \underline{a} + \underline{a}^2\right)$$

Kako je $\left(1 + \underline{a} + \underline{a}^2\right) = 0$, dobijamo:

$\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = 3\underline{U}_0$

$\underline{U}_0 = \frac{1}{3}\left(\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3\right)$ - nulta komponenta napona $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$.

Jednačini (1) dodajmo jednačinu(2) pomnoženu sa $\underline{a}$ i jednačinu (3) pomnoženu sa $\underline{a}^2$.

$$\underline{U}_1 + \underline{a}\underline{U}_2 + \underline{a}^2\underline{U}_3 = \underline{U}_0\left(1 + \underline{a} + \underline{a}^2\right) + \underline{U}_d\left(1 + \underline{a}^3 + \underline{a}^3\right) + \underline{U}_i\left(1 + \underline{a}^2 + \underline{a}^4\right)$$

Koristeći $\left(1 + \underline{a} + \underline{a}^2\right) = 0$, $\underline{a}^3 = 1$ i $\underline{a}^4 = a$, konačno dobijamo:

$\underline{U}_1 + \underline{a}\underline{U}_2 + \underline{a}^2\underline{U}_3 = 3\underline{U}_d$

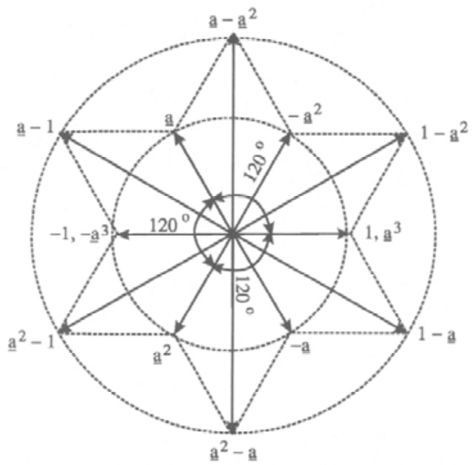
$\underline{U}_d = \frac{1}{3}\left(\underline{U}_1 + \underline{a}\underline{U}_2 + \underline{a}^2\underline{U}_3\right)$ - direktna komponenta napona $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$.

Ako jednačinu (2) pomnožimo sa $\underline{a}^2$, a jednačinu (3) sa $\underline{a}$, pa ih obje saberemo sa jednačinom (1), dobijamo:

$$\underline{U}_1 + \underline{a}^2\underline{U}_2 + \underline{a}\underline{U}_3 = \underline{U}_0\left(1 + \underline{a} + \underline{a}^2\right) + \underline{U}_d\left(\underline{a}^4 + 1 + \underline{a}^2\right) + \underline{U}_i\left(1 + \underline{a}^3 + \underline{a}^3\right) = 3\underline{U}_i$$

$\underline{U}_i = \frac{1}{3}\left(\underline{U}_1 + \underline{a}^2\underline{U}_2 + \underline{a}\underline{U}_3\right)$ - inverzna komponenta napona $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$

Operator $\underline{a}$



Operator $\underline{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}}$ je jedinični vektor gdje zbog argumenta $\frac{2\pi}{3}$, $\underline{a}$ predstavlja operator obrtanja vektora: Prema vektorskom dijagramu možemo napisati sedeće relacije:

$\underline{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\underline{a}^2 = e^{j2\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\underline{a}^3 = 1$, $\underline{a}^4 = \underline{a}$

$\underline{a}^{-1} = \underline{a}^2$, $\underline{a}^{-2} = \underline{a}$, $\underline{a}^{-3} = 1$

$\underline{a}^* = \underline{a}^2, \left(\underline{a}^2\right)^* = \underline{a}$

Značajne su i sledeće jednakosti:

$$1 - \underline{a}^2 = \frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2},\ \underline{a} - \underline{a}^2 = j\sqrt{3},\ \underline{a} - 1 = -\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2},\ \left(1 + \underline{a}\right)^{-1} = -\underline{a},\ \left(1 + \underline{a}^2\right)^{-1} = -\underline{a}^2$$

Veza između simetričnih komponenti linijskih i faznih napona

Simetrične komponente linijskih napona izražene preko linijskih napona $\left\{\underline{U}_{12}, \underline{U}_{23}, \underline{U}_{31}\right\}$ - *sistem linijskih napona.*

Bez obzira da li je veza u zvijezdu ili u trougao linijski naponi zadovoljavaju uslov: $\underline{U}_{12} + \underline{U}_{23} + \underline{U}_{31} = 0$. Simetrične komponente linijskih napona izračunavaju se po definiciji:

$\underline{U}_{0l} = \left(def\right) = \frac{1}{3}\left(\underline{U}_{12} + \underline{U}_{23} + \underline{U}_{31}\right) = 0$ - nulta komponenta linijskih napona $\underline{U}_{0l} = 0$

$\underline{U}_{dl} = \left(def\right) = \frac{1}{3}\left(\underline{U}_{12} + \underline{a}\underline{U}_{23} + \underline{a}^2\underline{U}_{31}\right)$ - direktna komponenta linijskih napona $\underline{U}_{dl}$

Pošto je $\underline{U}_{31} = -\left(\underline{U}_{12} + \underline{U}_{23}\right)$ slijedi da je:

$$\underline{U}_{dl} = \frac{1}{3}\left[\underline{U}_{12} + \underline{a}\underline{U}_{23} - \underline{a}^2\left(\underline{U}_{12} + \underline{U}_{23}\right)\right] = \frac{1}{3}\left[\left(1 - \underline{a}^2\right)\underline{U}_{12} + \left(\underline{a} - \underline{a}^2\right)\underline{U}_{23}\right]$$

$\underline{U}_{dl} = \frac{1}{3}\left[\left(1 - \underline{a}^2\right)\underline{U}_{12} - \underline{a}^2\left(1 - \underline{a}^{-1}\right)\underline{U}_{23}\right] = \frac{1}{3}\left(1 - \underline{a}^2\right)\left(\underline{U}_{12} - \underline{a}^2\underline{U}_{23}\right)$, jer je $\underline{a}^{-1} = \underline{a}^2$.

Konačno imamo:

$\underline{U}_{dl} = \frac{1}{3}\left(1 - \underline{a}^2\right)\left(\underline{U}_{12} - \underline{a}^2\underline{U}_{23}\right)$ - (18) – direktna komponenta linijskih napona.

Na sličan način možemo dobiti i inverznu komponentu:

$$\underline{U}_{il} = \frac{1}{3}\left[\underline{U}_{12} + \underline{a}^2\underline{U}_{23} + \underline{a}\underline{U}_{31}\right] = \frac{1}{3}\left[\underline{U}_{12} + \underline{a}^2\underline{U}_{23} - \underline{a}\left(\underline{U}_{12} + \underline{U}_{23}\right)\right] = \frac{1}{3}\left[\left(1 - \underline{a}\right)\underline{U}_{12} + \left(\underline{a}^2 - \underline{a}\right)\underline{U}_{23}\right]$$

$$\underline{U}_{il} = \frac{1}{3}\left[\left(1 - \underline{a}\right)\underline{U}_{12} - \underline{a}\left(1 - \underline{a}\right)\underline{U}_{23}\right] = \frac{1}{3}\left(1 - \underline{a}\right)\left(\underline{U}_{12} - \underline{a}\underline{U}_{23}\right)$$

I konačno:

$\underline{U}_{il} = \frac{1}{3}\left(1 - \underline{a}\right)\left(\underline{U}_{12} - \underline{a}\underline{U}_{23}\right)$ - (18) – inverzna komponenta linijskih napona.

Simetrične komponente linijskih napona izražene preko faznih napona.

Nulta komponenta linijskih napona je jednaka nuli $\underline{U}_{0l} = 0$. Ako relacije $\underline{U}_{12} = \underline{U}_1 - \underline{U}_2$ i $\underline{U}_{23} = \underline{U}_2 - \underline{U}_3$, uvrstimo u jednačine (17) i (18) dobijamo:

$$\underline{U}_{dl} = \frac{1}{3}\left(1-\underline{a}^2\right)\left(\underline{U}_{12} - \underline{a}^2\underline{U}_{23}\right) = \frac{1}{3}\left(1-\underline{a}^2\right)\left[\underline{U}_1 - \underline{U}_2 - \underline{a}^2\left(\underline{U}_2 - \underline{U}_3\right)\right]$$

$\underline{U}_{dl} = \frac{1}{3}\left(1-\underline{a}^2\right)\left[\underline{U}_1 - (1+\underline{a})\underline{U}_2 + \underline{a}\underline{U}_3\right]$, koristeći jednakost $1 + \underline{a} + \underline{a}^2 = 0$, dobijamo:

$\underline{U}_{dl} = \frac{1}{3}\left(1-\underline{a}\right)\left[\underline{U}_1 + \underline{a}\underline{U}_2 + \underline{a}^2\underline{U}_3\right]$ - (19) – direktna komponenta linijskih napona.

$$\underline{U}_{il} = \frac{1}{3}\left(1-\underline{a}\right)\left(\underline{U}_{12} - \underline{a}\underline{U}_{23}\right) = \frac{1}{3}\left(1-\underline{a}\right)\left[\underline{U}_1 - \underline{U}_2 - \underline{a}\left(\underline{U}_2 - \underline{U}_3\right)\right]$$

$\underline{U}_{il} = \frac{1}{3}\left(1-\underline{a}\right)\left[\underline{U}_1 - \left(1+\underline{a}\right)\underline{U}_2 + \underline{a}\underline{U}_3\right]$, koristeći jednakost $1 + \underline{a} + \underline{a}^2 = 0$, dobijamo:

$\underline{U}_{il} = \frac{1}{3}\left(1-\underline{a}\right)\left[\underline{U}_1 + \underline{a}^2\underline{U}_2 + \underline{a}\underline{U}_3\right]$ - (20) – inverzna komponenta linijskih napona.

Jednačinama (19) i (20) izražene su simetrične komponente linijskih napona preko faznih napona.

Simetrične komponente linijskih napona izražene preko simetričnih komponenti faznih napona.

Oznake:
$\underline{U}_{0l}$, $\underline{U}_{dl}$, $\underline{U}_{il}$ - simetrične komponente linijskih (l) napona
$\underline{U}_{0p}$, $\underline{U}_{dp}$, $\underline{U}_{ip}$ - simetrične komponente faznih (p) napona

Nulta komponenta linijskih napona je $\underline{U}_{0l} = 0$, dok je nulta komponenta faznih napon $\underline{U}_{0p} = \frac{1}{3}\left(\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3\right)$. Po definiciji je:

$$\underline{U}_{dp} = \frac{1}{3}\left(\underline{U}_1 + \underline{a}\underline{U}_2 + \underline{a}^2\underline{U}_2\right)$$

$$\underline{U}_{ip} = \frac{1}{3}\left(\underline{U}_1 + \underline{a}^2\underline{U}_2 + \underline{a}\underline{U}_2\right).$$

Ako ove obrasce uvrstimo u jednačine (19) i (20) dobijamo:

$$\underline{U}_{dl} = \left(1-\underline{a}^2\right)\underline{U}_{dp} = \sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{6}}\underline{U}_{dp} \qquad (21)$$

$$\underline{U}_{il} = \left(1-\underline{a}\right)\underline{U}_{ip} = \sqrt{3}e^{-j\frac{\pi}{6}}\underline{U}_{ip} \qquad (22)$$

Jednačine (21) i (22) nam ukazuju da su simetrične komponente linijskih napona po efektivnoj vrijednosti $\sqrt{3}$ puta veće od odgovarajućih simetričnih komponenti faznih napona.

Direktna komponenta linijskih prednjači direktnoj komponenti faznih napona za $\frac{\pi}{6}$, a inverzna komponenta linijskih napona kasni za inverznom komponentom faznih napona za ugao od $\frac{\pi}{6}$.

Simetrične komponente faznih napona izražene preko linijskih napona

Izjednačavanje jednačina (17) i (21) dobijamo:

$$\underline{U}_{dl} = \frac{1}{3}\left(1-\underline{a}^2\right)\left(\underline{U}_{12}-\underline{a}^2\underline{U}_{23}\right) = \left(1-\underline{a}^2\right)\underline{U}_{dp},$$

a izjednačavanjem jednačina (18) i (22):

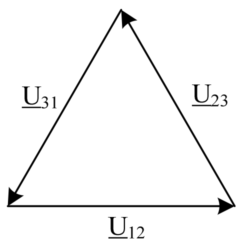
$$\underline{U}_{il} = \frac{1}{3}\left(1-\underline{a}\right)\left(\underline{U}_{12}-\underline{a}\underline{U}_{23}\right) = \left(1-\underline{a}\right)\underline{U}_{ip}.$$

Dakle na osnovu ovih jednakosti dobija se:

$$\underline{U}_{dp} = \frac{1}{3}\left(\underline{U}_{12}-\underline{a}^2\underline{U}_{23}\right) \qquad (23)$$

$$\underline{U}_{ip} = \frac{1}{3}\left(\underline{U}_{12}-\underline{a}\underline{U}_{23}\right) \qquad (24)$$

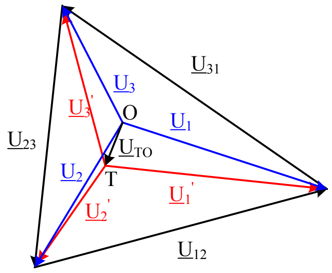
Iz jednačina (23) i (24) očigledno je da linijski naponi jednoznačno određuju direktnu i inverznu komponentu faznih napona. Nulta komponenta faznih napona je po definiciji: $\underline{U}_{0p} = \frac{1}{3}\left(\underline{U}_1+\underline{U}_2+\underline{U}_3\right)$. Međutim, na osnovu poznavanja samo linijskih napona ne možemo jednoznačno odrediti nultu komponentu faznih napona, pošto ne možemo ni fazne napone $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$ jednoznačno odrediti na osnovu poznavanja linijskih napona. Fazni naponi su nezavisni, to jest nije $\underline{U}_1+\underline{U}_2+\underline{U}_3=0$, dok su linijski naponi zavisni, važi $\underline{U}_{12}+\underline{U}_{23}+\underline{U}_{31}=0$, odnosno dva linijska napona su nezavisna dok se treći dobija kao $\underline{U}_{31}=-\underline{U}_{12}-\underline{U}_{23}$.



Na primjer, ako imamo za nepoznate $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$, a dvije poznate $\underline{U}_{12}, \underline{U}_{23}$. Sistem od dvije jednačine sa tri nepoznate ima beskonačno mnogo rješenja, jer se mora jednoj nepoznatoj dodijeliti proizvoljna vrijednost da bi se odredile preostale dvije nepoznate.

Da bi se odredile nulte komponente faznih napona potreban je još jedan podatak da bi se izvela treća nezavisna jednačina. Postavlja se pitanje: **po čemu se razlikuju tih beskonačno mnogo faznih sistema međusobno?** Svi (beskonačno mnogo njih) sistemi faznih napona, koji imaju zajednički sistem linijskih napona, imaju iste direktne i inverzne simetrične komponente, a razlikuju se samo po nultoj komponenti.

Geometrijska interpretacija



Ako tekuće zvjezdište pada u tačku O tada su: $\{\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3\}$ - tekući sistem faznih napona sa zajedničkim polom u tački O, $\{\underline{U}'_1, \underline{U}'_2, \underline{U}'_3\}$ - sistem faznih napona čiji pol pada u težište trougla linijskih napona. Ako sa vektorom $\overrightarrow{OT}$ označimo napon $\underline{U}_{TO}$ vidimo da je:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}'_1 + \underline{U}_{TO}$$
$$\underline{U}_2 = \underline{U}'_2 + \underline{U}_{TO}$$
$$\underline{U}_3 = \underline{U}'_3 + \underline{U}_{TO}$$

Sabiranjem ovih triju jednakosti dobijamo:

$$\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = \underline{U}'_1 + \underline{U}'_2 + \underline{U}'_3 + 3\underline{U}_{TO}$$

Ako je sistem linijskih napona nesimetričan, a impedansa prijemnika jednaka, tada će zajednički pol faznih napona prijemnika padati u težište trougla linijskih napona pa je:

$$\underline{U}'_1 + \underline{U}'_2 + \underline{U}'_3 = 0$$

odnosno,

$$\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = 3\underline{U}_{TO}$$

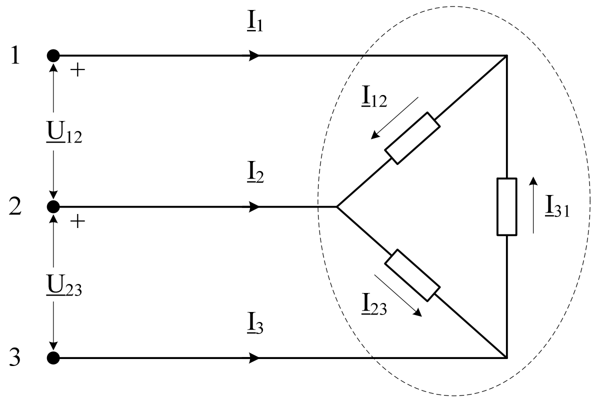
A kako je po definiciji $\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = 3\underline{U}_{0p}$, dobijamo:

$\underline{U}_{TO} = \underline{U}_{0p}$ - geometrijska interpretacija nulte komponente faznih napona je da je ona jednaka vrijednosti napona $\underline{U}_{TO}$, to jest napona između težišta trougla i pola sistema tekućih faznih napona(težište trougla označava pol faznih napona simetričnog prijemnika).

Veza između simetričnih komponenti linijskih i faznih struja

a) Simetrične komponente linijskih struja izražene preko linijskih struja

Veza u trougao



$\{\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3\}$ - sistem linijskih struja
$\{\underline{I}_{12}, \underline{I}_{23}, \underline{I}_{31}\}$ - sistem faznih struja

Po Kirhofovom zakonu za struje, za linijske struje važi: $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$. Po definiciji je:

$\underline{I}_{0l} = \frac{1}{3}(\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3) = 0$ - nulta komponenta linijskih struja

$\underline{I}_{dl} = \frac{1}{3}\left(\underline{I}_1 + \underline{a}\underline{I}_2 + \underline{a}^2\underline{I}_3\right) = \frac{1}{3}\left(\underline{I}_1 + \underline{a}\underline{I}_2 - \underline{a}^2(\underline{I}_1 + \underline{I}_2)\right)$, istim sređivanjem kao iza napone dobijamo:

$\underline{I}_{dl} = \frac{1}{3}\left(1 - \underline{a}^2\right)\left(\underline{I}_1 - \underline{a}^2\underline{I}_2\right)$ - (25) – direktna komponenta linijskih struja

Na isti način:

$\underline{I}_{il} = \frac{1}{3}\left(\underline{I}_1 + \underline{a}^2\underline{I}_2 + \underline{a}\underline{I}_3\right) = \frac{1}{3}\left(\underline{I}_1 + \underline{a}^2\underline{I}_2 - \underline{a}(\underline{I}_1 + \underline{I}_2)\right)$

$\underline{I}_{il} = \frac{1}{3}(1 - \underline{a})(\underline{I}_1 - \underline{a}\underline{I}_2)$ - (26) – inverzna komponenta linijskih struja

b) Simetrične komponente linijskih struja izražene preko faznih struja

Nulta komponenta linijskih struja je jednaka nuli $\underline{I}_{0l} = 0$. Polazeći od relacija: $\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31}$ i $\underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12}$ i njihovim uvrštavanjem u jednakosti (25) i (26) dobijamo:

$$\underline{I}_{dl} = \frac{1}{3}\left(1 - \underline{a}^2\right)\left(\underline{I}_1 - \underline{a}^2\underline{I}_2\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \underline{a}^2\right)\left[\underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} - \underline{a}^2(\underline{I}_{23} - \underline{I}_{12})\right]$$

$$\underline{I}_{dl} = \frac{1}{3}\left(1 - \underline{a}^2\right)\left[\underline{I}_{12}\left(1 - \underline{a}^2\right) - \underline{a}^2\underline{I}_{23} - \underline{I}_{31}\right] = \frac{1}{3}\left(1 - \underline{a}^2\right)(-\underline{a})\left[\underline{I}_{12} + \underline{a}\underline{I}_{23} + \underline{a}^{-1}\underline{I}_{31}\right]$$

Koristeći poznate osobine operatora $\underline{a}$, $1+\underline{a}+\underline{a}^2=0, \underline{a}^{-1}=\underline{a}^2, \underline{a}^3=1, 1+\underline{a}^2=-\underline{a}$, dobijamo direktnu komponentu linijskih struja izraženu preko faznih struja:

$$\underline{I}_{dl}=\frac{1}{3}(1-\underline{a})\left(\underline{I}_{12}+\underline{a}\underline{I}_{23}+\underline{a}^2\underline{I}_{31}\right) \text{ - (27)}$$

Na sličan način:

$$\underline{I}_{il}=\frac{1}{3}(1-\underline{a})(\underline{I}_1-\underline{a}\underline{I}_2)=\frac{1}{3}(1-\underline{a})[\underline{I}_{12}-\underline{I}_{31}-\underline{a}(\underline{I}_{23}-\underline{I}_{12})]$$

$$\underline{I}_{il}=\frac{1}{3}(1-\underline{a})\left[\underline{I}_{12}\left(1+\underline{a}^2\right)-\underline{a}\underline{I}_{23}-\underline{I}_{31}\right]=\frac{1}{3}(1-\underline{a})\left(-\underline{a}^2\right)\left[\underline{I}_{12}+\underline{a}^{-1}\underline{I}_{23}+\underline{a}^{-2}\underline{I}_{31}\right]$$

$$\underline{I}_{il}=\frac{1}{3}\left(1-\underline{a}^2\right)\left(\underline{I}_{12}+\underline{a}^2\underline{I}_{23}+\underline{a}\underline{I}_{31}\right)$$ - (28) – inverzna komponenta linijskih preko faznih struja

<u>c) Simetrične komponente linijskih struja izražene preko simetričnih komponenti faznih struja</u>

Po definiciji:

$$\underline{I}_{dp}=\frac{1}{3}\left(\underline{I}_{12}+\underline{a}\underline{I}_{23}+\underline{a}^2\underline{I}_{31}\right)$$

$$\underline{I}_{ip}=\frac{1}{3}\left(\underline{I}_{12}+\underline{a}^2\underline{I}_{23}+\underline{a}\underline{I}_{31}\right)$$

Uvrštavanjem u jednačine (27) i (28) dobija se:

$$\underline{I}_{dl}=\frac{1}{3}(1-\underline{a})\underline{I}_{dp}=\sqrt{3}e^{-j\frac{\pi}{6}}\underline{I}_{dp} \qquad (29)$$

$$\underline{I}_{il}=\frac{1}{3}\left(1-\underline{a}^2\right)\underline{I}_{ip}=\sqrt{3}e^{j\frac{\pi}{6}}\underline{I}_{ip} \qquad (30)$$

Efektivne vrijednosti simetričnih komponenti linijskih stanja su za $\sqrt{3}$ puta veće od simetričnih komponenti faznih stanja, a direktan (inverzna) komponenta linijske struje kasni (prednjači) za $\frac{\pi}{6}$ odgovarajućoj direktnoj (inverznoj) komponenti fazne struje.

<u>d) Simetrične komponente faznih struja izražene preko linijskih struja</u>

Iz jednačina (25) i (29) slijedi:

$$\underline{I}_{dl}=\frac{1}{3}\left(1-\underline{a}^2\right)\left(\underline{I}_1-\underline{a}^2\underline{I}_2\right)=(1-\underline{a})\underline{I}_{dp}$$

Sređivanjem se dobija:

$$\underline{I}_{dp}=\frac{1}{3}\frac{1-\underline{a}^2}{1-\underline{a}}\left(\underline{I}_1-\underline{a}^2\underline{I}_2\right)=\frac{1}{3}\frac{(1-\underline{a})(1+\underline{a})}{(1-\underline{a})}\left(\underline{I}_1-\underline{a}^2\underline{I}_2\right)$$

$$\underline{I}_{dp} = -\frac{\underline{a}^2}{3}\left(\underline{I}_1 - \underline{a}^2\underline{I}_2\right) = \frac{\underline{a}}{3}\left(\underline{I}_2 - \underline{a}\underline{I}_1\right) \qquad (31)$$

Iz jednačina (26) i (30) dobijamo:

$$\underline{I}_{il} = \frac{1}{3}\left(1-\underline{a}\right)\left(\underline{I}_1 - \underline{a}\underline{I}_2\right) = \left(1-\underline{a}^2\right)\underline{I}_{ip}$$

Sređivanjem se dobija:

$$\underline{I}_{ip} = \frac{1}{3}\frac{1-\underline{a}}{\left(1-\underline{a}\right)\left(1+\underline{a}\right)}\left(\underline{I}_1 - \underline{a}\underline{I}_2\right)$$

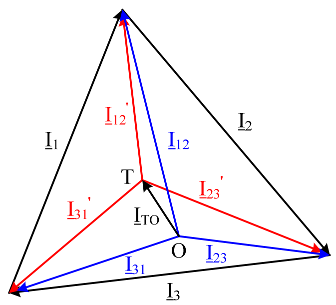
$$\underline{I}_{ip} = -\frac{\underline{a}}{3}\left(\underline{I}_1 - \underline{a}\underline{I}_2\right) = \frac{\underline{a}}{3}\left(\underline{a}\underline{I}_2 - \underline{I}_1\right) \qquad (32)$$

Nultu komponentu po definiciji izražavamo kao:

$$\underline{I}_{0p} = \frac{1}{3}\left(\underline{I}_{12} + \underline{I}_{23} + \underline{I}_{31}\right)$$

Iz jednačine (31) i (32) je očigledno da su direktna i inverzna komponenta faznih struja jednoznačno određene linijskim strujama. Međutim, nulta komponenta faznih struja, se ne može jednoznačno odrediti samo na osnovu poznavanja linijskih struja, pošto se ni fazne struje ne mogu odrediti ako je poznat samo sistem linijskih struja. Da bi se jednoznačno odredile fazne struje, odnosno njihove komponente, samo na osnovu linijskih struja potreban je još jedan podatak odnosno treća nezavisna jednačina. **<u>Zaključak</u>**: **Jednom sistemu linijskih struja odgovara beskonačno mnogo sistema faznih struja. Svi ti sistemi faznih struja koji imaju zajednički sistem linijskih struja imaju iste direktne i inverzne simetrične komponente, a razlikuju se samo po nultoj komponenti.**

Geometrijska interpretacija:



$\left\{\underline{I}_{12}, \underline{I}_{23}, \underline{I}_{31}\right\}$ - tekući sistem faznih struja sa zajedničkim polom u tački O (pol može biti svuda u površini trougla kao i van njega). $\left\{\underline{I}'_{12}, \underline{I}'_{23}, \underline{I}'_{31}\right\}$ - sistem faznih struja čiji pol pada u težište trougla linijskih struja. Sa grafika se vidi:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}'_{12} + \underline{I}_{TO}$$
$$\underline{I}_2 = \underline{I}'_{23} + \underline{I}_{TO}$$
$$\underline{I}_3 = \underline{I}'_{31} + \underline{I}_{TO}$$

Sabiranjem ovih triju jednakosti dobijamo:

$$\underline{I}_{12} + \underline{I}_{23} + \underline{I}_{31} = \underline{I}'_{12} + \underline{I}'_{23} + \underline{I}'_{31} + 3\underline{I}_{TO}$$

U slučaju da je sistem linijskih napona nesimetričan, a impedanse prijemnika jednake, važi da će pol faznih struja pasti u težište trougla linijskih struja, pa važi: $\underline{I}'_{12} + \underline{I}'_{23} + \underline{I}'_{31} = 0$, to jest, $\underline{I}_{12} + \underline{I}_{23} + \underline{I}_{31} = 3\underline{I}_{TO}$, a kako je po definiciji $\underline{I}_{12} + \underline{I}_{23} + \underline{I}_{31} = 3\underline{I}_{0p}$, konačno dobijamo: $\underline{I}_{0p} = \underline{I}_{TO}$.

Relacije koja povezuju simetrične komponente struja i napona

Simetrične komponente impedansi i admitansi (prijemnika i mreže) i njihova primjena

Napomena: Da bi obuhvatili obje sprege (trougao i zvijezdu) i olakšali indekse uvodimo oznake:

$\{\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3\}$ - sistem faznih napona prijemnika

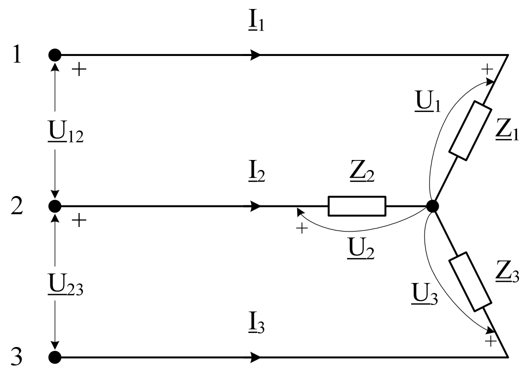
$\{\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3\}$ - sistem faznih struja prijemnika

$\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$ - impedanse pojedinih faza prijemnika

$\underline{Y}_1, \underline{Y}_2, \underline{Y}_3$ - admitanse pojedinih faza prijemnika

Pošto se radi isključivo sa faznim veličinama indeks "p", za označavanje njihovih komponenti biće izostavljen.

Simetrične komponente napona izražene preko simetričnih komponenti struja i impedansi



Imamo:

$$\underline{U}_1 = \underline{Z}_1 \underline{I}_1$$
$$\underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2$$
$$\underline{U}_3 = \underline{Z}_3 \underline{I}_3$$

Ako pređemo na simetrične komponente struja i napona (to jest iskoristimo razloga nje sistema faznih struje i napona na direktni, nulti i inverzni sistem) dobijamo:

$$\left(\underline{U}_0+\underline{U}_d+\underline{U}_i\right)=\underline{Z}_1\left(\underline{I}_0+\underline{I}_d+\underline{I}_i\right)$$
$$\left(\underline{U}_0+\underline{a}^2\underline{U}_d+\underline{a}\underline{U}_i\right)=\underline{Z}_2\left(\underline{I}_0+\underline{a}^2\underline{I}_d+\underline{a}\underline{I}_i\right)$$
$$\left(\underline{U}_0+\underline{a}\underline{U}_d+\underline{a}^2\underline{U}_i\right)=\underline{Z}_3\left(\underline{I}_0+\underline{a}\underline{I}_d+\underline{a}^2\underline{I}_i\right)$$

Pređimo na kompleksni matrični način:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a}\\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}\underline{U}_0\\ \underline{U}_d\\ \underline{U}_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\underline{Z}_1 & 0 & 0\\ 0 & \underline{Z}_2 & 0\\ 0 & 0 & \underline{Z}_3\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a}\\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}\underline{I}_0\\ \underline{I}_d\\ \underline{I}_i\end{bmatrix}$$

gdje je matrica $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a}\\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2\end{bmatrix}=\underset{\sim}{a}$, kvadratna nesingularna matrica.

Ako sa lijeve strane pomnožimo sa $\underset{\sim}{a}^{-1}$, tojest inverznom matricom matrice $\underset{\sim}{a}$ dobijamo:

$$\begin{bmatrix}\underline{U}_0\\ \underline{U}_d\\ \underline{U}_i\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2\\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a}\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}\underline{Z}_1 & 0 & 0\\ 0 & \underline{Z}_2 & 0\\ 0 & 0 & \underline{Z}_3\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a}\\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}\underline{I}_0\\ \underline{I}_d\\ \underline{I}_i\end{bmatrix}$$

Množenjem matrica dobijamo:

$$\begin{bmatrix}\underline{U}_0\\ \underline{U}_d\\ \underline{U}_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\left(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3\right) & \frac{1}{3}\left(\underline{Z}_1+\underline{a}^2\underline{Z}_2+\underline{a}\underline{Z}_3\right) & \frac{1}{3}\left(\underline{Z}_1+\underline{a}\underline{Z}_2+\underline{a}^2\underline{Z}_3\right)\\ \frac{1}{3}\left(\underline{Z}_1+\underline{a}\underline{Z}_2+\underline{a}^2\underline{Z}_3\right) & \frac{1}{3}\left(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3\right) & \frac{1}{3}\left(\underline{Z}_1+\underline{a}^2\underline{Z}_2+\underline{a}\underline{Z}_3\right)\\ \frac{1}{3}\left(\underline{Z}_1+\underline{a}^2\underline{Z}_2+\underline{a}\underline{Z}_3\right) & \frac{1}{3}\left(\underline{Z}_1+\underline{a}\underline{Z}_2+\underline{a}^2\underline{Z}_3\right) & \frac{1}{3}\left(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3\right)\end{bmatrix}*\begin{bmatrix}\underline{I}_0\\ \underline{I}_d\\ \underline{I}_i\end{bmatrix}$$

Impedanse se javljaju u tri oblika, pa analogno naponima i strujama (njihovim simetričnim komponentama), dobijamo:

$\underline{Z}_0=\frac{1}{3}\left(\underline{Z}_1+\underline{Z}_2+\underline{Z}_3\right)$ - nulta simetrična komponenta impedansi prijemnika $\underline{Z}_1,\underline{Z}_2,\underline{Z}_3$

$\underline{Z}_d=\frac{1}{3}\left(\underline{Z}_1+\underline{a}\underline{Z}_2+\underline{a}^2\underline{Z}_3\right)$ - direktna simetrična komponenta impedansi prijemnika $\underline{Z}_1,\underline{Z}_2,\underline{Z}_3$

$\underline{Z}_i=\frac{1}{3}\left(\underline{Z}_1+\underline{a}^2\underline{Z}_2+\underline{Z}z_3\right)$ - inverzna simetrična komponenta impedansi prijemnika $\underline{Z}_1,\underline{Z}_2,\underline{Z}_3$

$\underline{Z}_0,\underline{Z}_d,\underline{Z}_i$ - simetrične komponente impedansi prijemnika $\underline{Z}_1,\underline{Z}_2,\underline{Z}_3$

Dakle sada dolazimo do relacije:

$$\begin{bmatrix}\underline{U}_0\\ \underline{U}_d\\ \underline{U}_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\underline{Z}_0 & \underline{Z}_i & \underline{Z}_d\\ \underline{Z}_d & \underline{Z}_0 & \underline{Z}_i\\ \underline{Z}_i & \underline{Z}_d & \underline{Z}_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{I}_0\\ \underline{I}_d\\ \underline{I}_i\end{bmatrix} \qquad (33)$$

Sa ove matrične jednačine možemo preći na sistem jednačina:

$$\begin{aligned}
\underline{U}_0 &= \underline{Z}_0\underline{I}_0 + \underline{Z}_i\underline{I}_d + \underline{Z}_d\underline{I}_i \\
\underline{U}_d &= \underline{Z}_d\underline{I}_0 + \underline{Z}_0\underline{I}_d + \underline{Z}_i\underline{I}_i \qquad (33') \\
\underline{U}_i &= \underline{Z}_i\underline{I}_0 + \underline{Z}_d\underline{I}_d + \underline{Z}_0\underline{I}_i
\end{aligned}$$

Dakle ne važi je $\underline{U}_0 = \underline{Z}_0\underline{I}_0$, gdje je $\underline{Z}_0$ nulta impedansa prijemnika, ali važi $\underline{U}_0 = \underline{Z}_0\underline{I}_0$ ako je $\underline{Z}_0$ nulta impedansa mreže. Kada su poznate simetrična komponente struja i impedansi iz jednačina (33) i (33') određuju se simetrične komponente napona. Kada se radi o vezi u trouglu, a poznate su linijske komponente struje i impedanse pojedinih faza, iz prve jednačine sistema (33') određuje se nulta komponenta faznih struja. Postupak je sledeći:

1) Na osnovu zadatih impedansi izračunaju se $\underline{Z}_0, \underline{Z}_d, \underline{Z}_i$
2) Izračunaju se $\underline{I}_{d,}, \underline{I}_i$ jednoznačno na osnovu linijskih struja (relacije (31) i (32)).
3) Kod veze u trougao važi da je $\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = 0$, po Kirhofovom zakonu za napone pa je $\underline{U}_0 = \frac{1}{3}\left(\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3\right) = 0$, odnosno $\underline{U}_0 = 0$
4) Iz relacije $\underline{U}_0 = \underline{Z}_0\underline{I}_0 + \underline{Z}_i\underline{I}_d + \underline{Z}_d\underline{I}_i = 0$, dobijamo $\underline{I}_0 = -\frac{1}{\underline{Z}_0}\left(\underline{Z}_i\underline{I}_d + \underline{Z}_d\underline{I}_i\right)$
5) Na osnovu jednačina (33') određujemo $\underline{U}_0, \underline{U}_d, \underline{U}_i$, pa zatim određujemo i sistem faznih napona $\left\{\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3\right\}$. Pošto znamo struje i napone riješili smo kolo.

U slučaju da su impedanse prijemnika jednake $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z}$, vidimo da je $\underline{Z}_0 = \underline{Z}$ i $\underline{Z}_d = \underline{Z}_i = 0$, pa se sistem redukuje u oblik:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_0 \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix},$$

odnosno: $\underline{U}_0 = \underline{Z}\underline{I}_0$, $\underline{U}_d = \underline{Z}\underline{I}_d$, $\underline{U}_i = \underline{Z}\underline{I}_i$.

Nulta, direktna i inverzna impedansa mreže izražena preko simetričnih komponenti struja i impedansi prijemnika

Ako u sistemu jednačina (33') prvu jednačinu podijelimo sa $\underline{I}_0$, drugu sa $\underline{I}_d$ i treću sa $\underline{I}_i$ dobijamo:

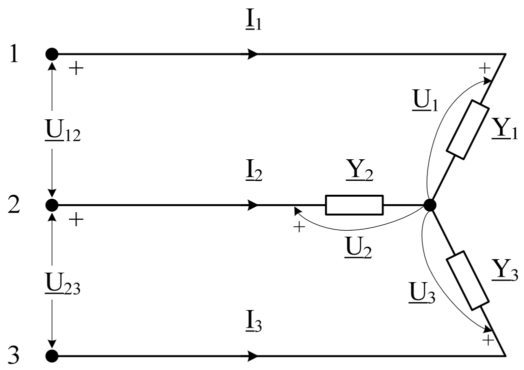
$$\frac{\underline{U}_0}{\underline{I}_0} = \underline{Z}_0 = \underline{Z}_0 + \underline{Z}_i\frac{\underline{I}_d}{\underline{I}_0} + \underline{Z}_d\frac{\underline{I}_i}{\underline{I}_0} \qquad (34)$$

$$\frac{\underline{U}_d}{\underline{I}_d} = \underline{Z}_d = \underline{Z}_d\frac{\underline{I}_0}{\underline{I}_d} + \underline{Z}_0 + \underline{Z}_i\frac{\underline{I}_i}{\underline{I}_d} \qquad (35)$$

$$\frac{\underline{U}_i}{\underline{I}_i} = \underline{Z}_i = \underline{Z}_i\frac{\underline{I}_0}{\underline{I}_i} + \underline{Z}_d\frac{\underline{I}_d}{\underline{I}_i} + \underline{Z}_0 \qquad (36)$$

Pojmovi nulta, direktna i inverzna impedansa $\underline{Z}_0, \underline{Z}_d, \underline{Z}_i$ mreže su potpuno različiti pojmovi od nulte, direktne i inverzne impedanse prijemnika $\underline{Z}_0, \underline{Z}_d, \underline{Z}_i$. Iz toga razloga nulta, direktna i inverzna impedansa mreže se ponekad obilježavaju $\underline{Z}^{(0)}, \underline{Z}^{(d)}, \underline{Z}^{(i)}$. U specijalnom slučaju kada su impedanse prijemnika jednake $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3 = \underline{Z}$ dobija se: $\underline{Z}_0 = \underline{Z}_d = \underline{Z}_i = \underline{Z}_0 = \underline{Z}$. Vidimo da nulta, direktna i inverzna komponenta impedansi prijemnika $\underline{Z}_0, \underline{Z}_d, \underline{Z}_i$ zavise samo od impedansi prijemnika $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$, dok nulta, direktna i inverzna komponenta impedansi mreže zavise od $\underline{Z}_0, \underline{Z}_d, \underline{Z}_i$ i komponenti struja $\underline{I}_0, \underline{I}_d, \underline{I}_i$.

Simetrične komponente struja izražene preko simetričnih komponenti napona i admitansi prijemnika



$$\underline{I}_1 = \underline{Y}_1 \underline{U}_1$$
$$\underline{I}_2 = \underline{Y}_2 \underline{U}_2$$
$$\underline{I}_3 = \underline{Y}_3 \underline{U}_3$$

Izrazimo napone i struje preko simetričnih komponenti:

$$\left(\underline{I}_0 + \underline{I}_d + \underline{I}_i\right) = \underline{Y}_1\left(\underline{U}_0 + \underline{U}_d + \underline{U}_i\right)$$
$$\left(\underline{I}_0 + \underline{a}^2\underline{I}_d + \underline{a}\underline{I}_i\right) = \underline{Y}_2\left(\underline{U}_0 + \underline{a}^2\underline{U}_d + \underline{a}\underline{U}_i\right)$$
$$\left(\underline{I}_0 + \underline{a}\underline{I}_d + \underline{a}^2\underline{I}_i\right) = \underline{Y}_3\left(\underline{U}_0 + \underline{a}\underline{U}_d + \underline{a}^2\underline{U}_i\right)$$

Pređimo na matrični oblik zapisivanja:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \underline{I}_0 \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Y}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Y}_3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix}$$

Množenjem sa $\underline{a}^{-1}$ sa lijeve strane dobijamo:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_0 \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \underline{Y}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Y}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Y}_3 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{a}^2 & \underline{a} \\ 1 & \underline{a} & \underline{a}^2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix}$$

Kada pomnožimo matrice na desnoj strani dobijamo:

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_0 \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_0 & \underline{Y}_i & \underline{Y}_d \\ \underline{Y}_d & \underline{Y}_0 & \underline{Y}_i \\ \underline{Y}_i & \underline{Y}_d & \underline{Y}_0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix} \qquad (37)$$

$\underline{Y}_0 = \frac{1}{3}\left(\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3\right)$ - nulta simetrična komponenta admitansi prijemnika $\underline{Y}_1, \underline{Y}_2, \underline{Y}_3$

$\underline{Y}_d = \frac{1}{3}\left(\underline{Y}_1 + \underline{a}\underline{Y} + \underline{a}^2\underline{Y}_3\right)$ - direktna simetrična komponenta admitansi prijemnika $\underline{Y}_1, \underline{Y}_2, \underline{Y}_3$

$\underline{Y}_i = \frac{1}{3}\left(\underline{Y}_1 + \underline{a}^2\underline{Y}_2 + \underline{a}\underline{Y}_3\right)$ - inverzna simetrična komponenta admitansi prijemnika $\underline{Y}_1, \underline{Y}_2, \underline{Y}_3$

Jednačina (37) u razvijenom obliku ima oblik:

$$\begin{aligned} \underline{I}_0 &= \underline{Y}_0\underline{U}_0 + \underline{Y}_i\underline{U}_d + \underline{Y}_d\underline{U}_i \\ \underline{I}_d &= \underline{Y}_d\underline{U}_0 + \underline{Y}_0\underline{U}_d + \underline{Y}_i\underline{U}_i \\ \underline{I}_i &= \underline{Y}_i\underline{U}_0 + \underline{Y}_d\underline{U}_d + \underline{Y}_0\underline{U}_i \end{aligned} \qquad (37')$$

Kada su poznate simetrične komponente napona i admitansi iz jednačina (37) i (37') određuju se simetrične komponente struja. Za vezu u zvijezdu, bez neutralnog provodnika, iz prve jednačine sistema (37') određuje se nulta komponenta faznih napona. **<u>Problem je oblika</u>**: *Dati su linijski naponi $\underline{U}_{12}, \underline{U}_{23}$ i admitanse $\underline{Y}_1, \underline{Y}_2, \underline{Y}_3$, a veza je u zvijezdu bez neutralnog provodnika.* **<u>Rješenje</u>**:

1) Odredimo simetrične komponente $\underline{Y}_0, \underline{Y}_d, \underline{Y}_i$ admitansi prijamnika $\underline{Y}_1, \underline{Y}_2, \underline{Y}_3$.
2) Na osnovu linijskih napona $\underline{U}_{12}, \underline{U}_{23}$ jednoznačno možemo odrediti $\underline{U}_d, \underline{U}_i$ (relacije (23) i (24)).
3) Za vezu u zvijezdu bez neutralnog provodnika $\underline{I}_0 = 0$, pa je iz prve jednačine sistema (37') $\underline{I}_0 = \underline{Y}_0\underline{U}_0 + \underline{Y}_i\underline{U}_d + \underline{Y}_d\underline{U}_i = 0$, dobijamo $\underline{U}_0 = -\frac{1}{\underline{Y}_0}\left(\underline{Y}_i\underline{U}_d + \underline{Y}_d\underline{U}_i\right)$
4) Kada znamo $\underline{U}_0, \underline{U}_d, \underline{U}_i$, na osnovu jednačine (37) određujemo simetrične komponente struja $\underline{I}_0, \underline{I}_d, \underline{I}_i$, pa onda i fazne struje $\underline{I}_0, \underline{I}_d, \underline{I}_i$.

Specijalan slučaj ako su admitanse jednake $\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = \underline{Y}_3 = \underline{Y}$, imamo $\underline{Y}_0 = \underline{Y}$ i $\underline{Y}_d = \underline{Y}_i = 0$ pa se jednačine redukuju :

$$\begin{bmatrix} \underline{I}_0 \\ \underline{I}_d \\ \underline{I}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Y}_0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Y}_0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Y}_0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \underline{U}_0 \\ \underline{U}_d \\ \underline{U}_i \end{bmatrix}$$

odnosno:

$$\begin{aligned} \underline{I}_0 &= \underline{Y}_0\underline{U}_0 \\ \underline{I}_d &= \underline{Y}_d\underline{U}_d \\ \underline{I}_i &= \underline{Y}_i\underline{U}_i \end{aligned}$$

Nulta, direktna i inverzna admitansa mreže izražena preko simetričnih komponenti admitansi i napona prijemnika

Ako se prva jednačina sistema (37’) podijeli sa $\underline{U}_0$, druga sa $\underline{U}_d$, a treća sa $\underline{U}_i$ dobija se:

$$\frac{\underline{I}_0}{\underline{U}_0} = \underline{Y}_0 = \underline{Y}_0 + \underline{Y}_i \frac{\underline{U}_d}{\underline{U}_0} + \underline{Y}_d \frac{\underline{U}_i}{\underline{U}_0} \qquad (38)$$

$$\frac{\underline{I}_d}{\underline{U}_d} = \underline{Y}_d = \underline{Y}_d \frac{\underline{U}_0}{\underline{U}_d} + \underline{Y}_0 + \underline{Y}_i \frac{\underline{U}_i}{\underline{U}_d} \qquad (39)$$

$$\frac{\underline{I}_i}{\underline{U}_i} = \underline{Y}_i = \underline{Y}_i \frac{\underline{U}_0}{\underline{U}_i} + \underline{Y}_d \frac{\underline{U}_d}{\underline{U}_i} + \underline{Y}_0 \qquad (40)$$

Nulta direktna i inverzna admitansa mreže su potpuno različiti pojmovi od nulte, direktne i inverzne admitanse prijemnika. Nulta direktna i inverzna admitansa prijemnika $\underline{Y}_{0,}, \underline{Y}_d, \underline{Y}_i$ zavise samo od admitansi prijemnika $\underline{Y}_{1,}, \underline{Y}_2, \underline{Y}_3$, dok nulta, direktna i inverzna admitansa mreže $\underline{Y}_{0,}, \underline{Y}_d, \underline{Y}_i$ zavise od $\underline{Y}_{0,}, \underline{Y}_d, \underline{Y}_i$ i komponenti napona. Za specijalni slučaj kada je $\underline{Y}_1 = \underline{Y}_2 = \underline{Y}_3 = \underline{Y}$ važi:

$$\underline{Y}_{0,} = \underline{Y}_d = \underline{Y}_i = \underline{Y}_0 = \underline{Y}$$

Važi : $\underline{Y}_1 = \dfrac{1}{\underline{Z}_1}$, $\underline{Y}_2 = \dfrac{1}{\underline{Z}_2}$, $\underline{Y}_3 = \dfrac{1}{\underline{Z}_3}$, $\underline{Y}_0 \neq \dfrac{1}{\underline{Z}_0}$, $\underline{Y}_d \neq \dfrac{1}{\underline{Z}_d}$, $\underline{Y}_i \neq \dfrac{1}{\underline{Z}_i}$

Snage izražene preko simetričnih komponenti

Dato je polazno ulazno neuravnoteženo kolo pa je ukupna kompleksna snaga:

$$\underline{S} = \underline{U}_1 \overset{*}{\underline{I}_1} + \underline{U}_2 \overset{*}{\underline{I}_2} + \underline{U}_3 \overset{*}{\underline{I}_3}$$

Koncepcija simetričnih komponenti je da se neuravnoteženi sistem razloži na simetrične komponente pa se dobija:

$$\underline{S} = 3\underline{U}_0 \overset{*}{\underline{I}_0} + 3\underline{U}_d \overset{*}{\underline{I}_d} + 3\underline{U}_i \overset{*}{\underline{I}_i}$$

jer su ovo simetrični sistemi $\left\{\underline{U}_0, \underline{U}_d, \underline{U}_i\right\}$.

Provjerimo:

Iz $\underline{S} = \underline{U}_1 \overset{*}{\underline{I}_1} + \underline{U}_2 \overset{*}{\underline{I}_2} + \underline{U}_3 \overset{*}{\underline{I}_3}$ zamjenom simetričnih komponenti dobijamo:

$$\underline{S} = \left(\underline{U}_0 + \underline{U}_d + \underline{U}_i\right)\left(\underline{I}_0^* + \underline{I}_d^* + \underline{I}_i^*\right) +$$

$$+\left(\underline{U}_0 + \underline{a}^2\underline{U}_d + \underline{a}\underline{U}_i\right)\left[\underline{I}_0^* + \left(\underline{a}^2\right)^* \underline{I}_d^* + \left(\underline{a}\right)^* \underline{I}_i^*\right] +$$

$$+\left(\underline{U}_0 + \underline{a}\underline{U}_d + \underline{a}^2\underline{U}_i\right)\left[\underline{I}_0^* + \left(\underline{a}\right)^* \underline{I}_d^* + \left(\underline{a}^2\right)^* \underline{I}_i^*\right]$$

Koristeći osovine $1 + \underline{a} + \underline{a}^2 = 0,\ \underline{a}^* = \underline{a}^2, \left(\underline{a}^2\right)^* = \underline{a},\ \underline{a}^3 = 1,\ \underline{a}^4 = \underline{a}$ dobijamo:

$$\underline{S} = \underline{U}_0\underline{I}_0^* + \underline{U}_d\underline{I}_0^* + \underline{U}_i\underline{I}_0^* + \underline{U}_0\underline{I}_d^* + \underline{U}_d\underline{I}_d^* + \underline{U}_i\underline{I}_d^* + \underline{U}_0\underline{I}_i^* + \underline{U}_d\underline{I}_i^* + \underline{U}_i\underline{I}_i^* +$$
$$+\underline{U}_0\underline{I}_0^* + \underline{a}^2\underline{U}_d\underline{I}_0^* + \underline{a}\underline{U}_i\underline{I}_0^* + \underline{a}\underline{U}_0\underline{I}_d^* + \underline{U}_d\underline{I}_d^* + \underline{a}^2\underline{U}_i\underline{I}_d^* + \underline{a}^2\underline{U}_0\underline{I}_i^* + \underline{a}\underline{U}_d\underline{I}_i^* + \underline{U}_i\underline{I}_i^* +$$
$$+\underline{U}_0\underline{I}_0^* + \underline{a}\underline{U}_d\underline{I}_0^* + \underline{a}^2\underline{U}_i\underline{I}_0^* + \underline{a}^2\underline{U}_0\underline{I}_d^* + \underline{U}_d\underline{I}_d^* + \underline{a}\underline{U}_i\underline{I}_d^* + \underline{a}\underline{U}_0\underline{I}_i^* + \underline{a}^2\underline{U}_d\underline{I}_i^* + \underline{U}_i\underline{I}_i^*,$$
$$\underline{S} = 3\underline{U}_0\underline{I}_0^* + 3\underline{U}_d\underline{I}_d^* + 3\underline{U}_i\underline{I}_i^* + \underline{U}_d\underline{I}_0^*\left(1 + \underline{a}^2 + \underline{a}\right) + \underline{U}_i\underline{I}_0^*\left(1 + \underline{a} + \underline{a}^2\right) +$$
$$+\underline{U}_0\underline{I}_d^*\left(1 + \underline{a} + \underline{a}^2\right) + \underline{U}_i\underline{I}_d^*\left(1 + \underline{a}^2 + \underline{a}\right) + \underline{U}_0\underline{I}_i^*\left(1 + \underline{a}^2 + \underline{a}\right) + \underline{U}_d\underline{I}_i^*\left(1 + \underline{a} + \underline{a}^2\right)$$

Konačno, koristeći $1 + \underline{a} + \underline{a}^2 = 0$ dobija se upravo pretpostavljena jednakost za kompleksnu snagu preko komponenti napona i struja: $\underline{S} = 3\underline{U}_0\underline{I}_0^* + 3\underline{U}_d\underline{I}_d^* + 3\underline{U}_i\underline{I}_i^*$. Ova se jednakost može zapisati kao: $\underline{S} = \underline{S}_0 + \underline{S}_d + \underline{S}_i$, gdje je:

$$\underline{S}_0 = 3\underline{U}_0\underline{I}_0^* = P_0 + jQ_0$$
$$\underline{S}_d = 3\underline{U}_d\underline{I}_d^* = P_d + jQ_d$$
$$\underline{S}_i = 3\underline{U}_i\underline{I}_i^* = P_i + jQ_i$$

Pošto je $\underline{S} = P + jQ$ slijedi $P = P_0 + P_d + P_i$ i $Q = Q_0 + Q_d + Q_i$, a važe i relacije:

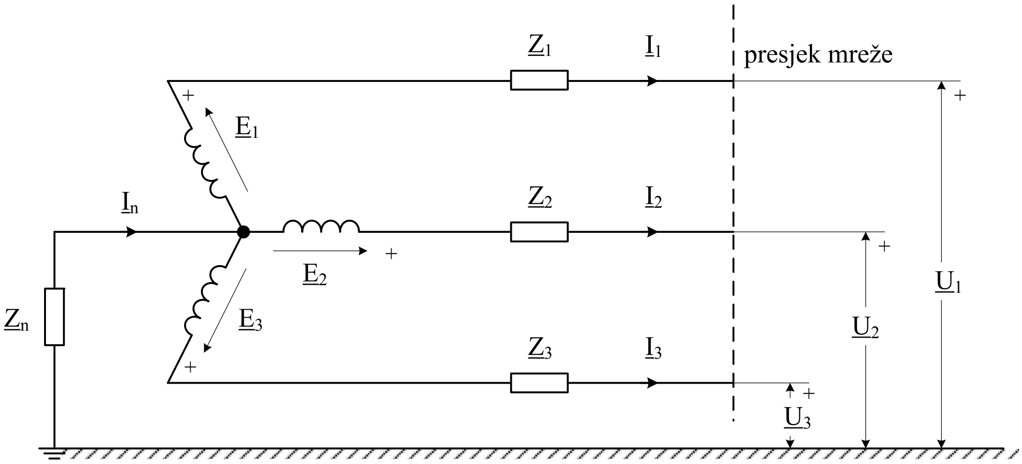
$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \text{ i } \cos\varphi = \frac{P}{S}.$$

Ako postoje spregnuti elementi, tada se treba prvo osloboditi sprege pa tek onda primjenjivati metod simetričnih komponenti.

Kvarovi trofaznih mreža

Posmatraćemo kvarove u ustaljenom režimu i to:
- kratak spoj kod trofaznih mreža
- prekid kod trofaznih mreža

Kratak spoj u trofaznim mrežama



Oznake:

$\{\underline{E}_1, \underline{E}_2, \underline{E}_3\}$ - sistem elektromotornih sila pojedinih faza generatora.

$\{\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3\}$ - sistem napona na mjestu presjeka mreže (naponi faza prema zemlji).

$\{\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3\}$ - sistem faznih struja.

$\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$ - ukupne impedanse faza do mjesta presjeka mreže (impedansa faze generatora i linije do mjesta presjeka mreže)

$\underline{Z}_n$ - impedansa uzemljenja (neutralnog provodnika)

$\underline{I}_n$ - struja neutralnog provodnika

Birajući uvijek jednu fazu i Zemlju, Kirhofov zakon za napone po tim konturama glasi:

$$\underline{E}_1 = \underline{Z}_n \underline{I}_{n+} + \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{U}_1 \qquad (41)$$

$$\underline{E}_2 = \underline{Z}_n \underline{I}_{n+} + \underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{U}_2 \qquad (42)$$

$$\underline{E}_3 = \underline{Z}_n \underline{I}_{n+} + \underline{Z}_3 \underline{I}_3 + \underline{U}_3 \qquad (43)$$

Uvode se oznake:

$$\underline{V}_1 = \underline{Z}_n \underline{I}_{n+} + \underline{Z}_1 \underline{I}_1$$

$$\underline{V}_2 = \underline{Z}_n \underline{I}_{n+} + \underline{Z}_2 \underline{I}_2$$

$$\underline{V}_3 = \underline{Z}_n \underline{I}_{n+} + \underline{Z}_3 \underline{I}_3$$

Tada su $\{\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3\}$ padovi napona duž jednog faznog i neutralnog provodnika.

Dakle uvrštavanjem u jednačine (41), (42) i (43) dobijamo:

$$\underline{E}_1 = \underline{V}_1 + \underline{U}_1 \qquad (41')$$

$$\underline{E}_2 = \underline{V}_2 + \underline{U}_2 \qquad (42')$$

$$\underline{E}_3 = \underline{V}_3 + \underline{U}_3 \qquad (43')$$

Transformacijom ovih jednačina:

1) njihovim sabiranjem dobijamo $\underline{E}_1 + \underline{E}_2 + \underline{E}_3 = \underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3 + \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3$, pa pošto je $\underline{E}_1 + \underline{E}_2 + \underline{E}_3 = 3\underline{E}_0$, $\underline{V}_1 + \underline{V}_2 + \underline{V}_3 = 3\underline{V}_0$, $\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = 3\underline{U}_0$, konačno dobijamo:

$$\underline{E}_0 = \underline{V}_0 + \underline{U}_0 \qquad (44)$$

2) Prvoj jednačini sabira se druga pomnožena sa $\underline{a}$ i treća pomnožena sa $\underline{a}^2$, pa se dobija: $\underline{E}_1 + \underline{a}\underline{E}_2 + \underline{a}^2\underline{E}_3 = \underline{V}_1 + \underline{a}\underline{V}_2 + \underline{a}^2\underline{V}_3 + \underline{U}_1 + \underline{a}\underline{U}_2 + \underline{a}^2\underline{U}_3$, a kako je $\underline{E}_1 + \underline{a}\underline{E}_2 + \underline{a}^2\underline{E}_3 = 3\underline{E}_d$, $\underline{V}_1 + \underline{a}\underline{V}_2 + \underline{a}^2\underline{V}_3 = 3\underline{V}_d$, $\underline{U}_1 + \underline{a}\underline{U}_2 + \underline{a}^2\underline{U}_3 = 3\underline{U}_d$, konačno dobijamo:

$$\underline{E}_d = \underline{V}_d + \underline{U}_d \qquad (45)$$

3) Prvoj jednačini sabira se druga pomnožena sa $\underline{a}^2$ i treća pomnožena sa $\underline{a}$, pa se dobija: $\underline{E}_1 + \underline{a}\underline{E}_2 + \underline{a}^2\underline{E}_3 = \underline{V}_1 + \underline{a}\underline{V}_2 + \underline{a}^2\underline{V}_3 + \underline{U}_1 + \underline{a}\underline{U}_2 + \underline{a}^2\underline{U}_3$, a kako je $\underline{E}_1 + \underline{a}^2\underline{E}_2 + \underline{a}\underline{E}_3 = 3\underline{E}_i$, $\underline{V}_1 + \underline{a}^2\underline{V}_2 + \underline{a}\underline{V}_3 = 3\underline{V}_i$, $\underline{U}_1 + \underline{a}^2\underline{U}_2 + \underline{a}\underline{U}_3 = 3\underline{U}_i$, konačno dobijamo:

$$\underline{E}_i = \underline{V}_i + \underline{U}_i \qquad (46)$$

U relacijama (44), (45) i (46) je:

$\underline{E}_0, \underline{E}_d, \underline{E}_i$ - simetrične komponente elektromotorne sile $\underline{E}_1, \underline{E}_2, \underline{E}_3$

$\underline{V}_0, \underline{V}_d, \underline{V}_i$ - simetrične komponente padova napona $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$

$\underline{U}_0, \underline{U}_d, \underline{U}_i$ - simetrične komponente napona na mjestu presjeka mreže $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$

Na osnovu Omovog zakona za simetrične komponente pišemo: $\underline{V}_0 = \underline{Z}_0\underline{I}_0$, $\underline{V}_d = \underline{Z}_d\underline{I}_d$, $\underline{V}_i = \underline{Z}_i\underline{I}_i$, gdje su $\underline{Z}_0, \underline{Z}_d, \underline{Z}_i$ nulta, direktna i inverzna impedansa mreže. Uvrštavanjem u jednačine (44), (45) i (46) dobija se:

$$\begin{aligned} \underline{E}_0 &= \underline{Z}_0\underline{I}_0 + \underline{U}_0 \\ \underline{E}_d &= \underline{Z}_d\underline{I}_d + \underline{U}_d \qquad (47) \\ \underline{E}_i &= \underline{Z}_i\underline{I}_i + \underline{U}_i \end{aligned}$$

Sistem jednačina (47) izveli smo pod uslovom da je na mjestu presjeka proizvoljno opterećenje. Dakle, ove jednačine će važiti i ako je na mjestu presjeka jedna, odnosno dvije ili sve tri faze spojene sa Zemljom. Iz tog razloga ove se jednačine nazivaju opštim jednačinama kratkog spoja trofazne mreže, to jest one vrijede za sve vrste kratkih spojeva. $\underline{Z}_0, \underline{Z}_d, \underline{Z}_i$ - nulta, direktna i inverzna impedansa mreže ne mjestu kratkog spoja (presjeka mreže). Pošto se danas generatori proizvode da su njihove elektromotorne sile simetrične i obrazuju direktan sistem, dobija se: $\underline{E}_1 = \underline{E}$, $\underline{E}_2 = \underline{a}^2\underline{E}_1$ i $\underline{E}_3 = \underline{a}\underline{E}_1$, pa se kao posledica toga dobija:

$$\underline{E}_0 = \frac{1}{3}\left(\underline{E}_1 + \underline{E}_2 + \underline{E}_3\right) = 0$$

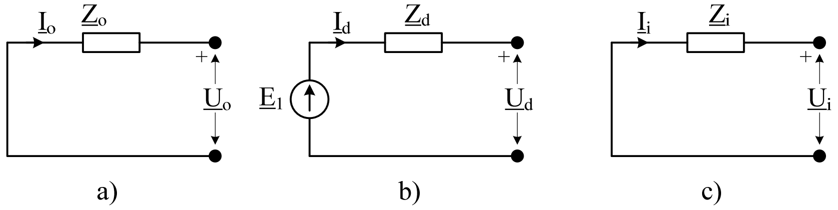
$$\underline{E}_i = \frac{1}{3}\left(\underline{E}_1 + \underline{a}^2\underline{E}_2 + \underline{a}\underline{E}_3\right) = 0$$

$$\underline{E}_d = \frac{1}{3}\left(\underline{E}_1 + \underline{a}\underline{E}_2 + \underline{a}^2\underline{E}_3\right) = \underline{E}_1$$

pa kada se ovo uvrsti u sistem jednačina (47) dobija se:

$$\underline{Z}_0\underline{I}_0 + \underline{U}_0 = 0$$
$$\underline{Z}_d\underline{I}_d + \underline{U}_d = \underline{E}_1 \qquad (47.a)$$
$$\underline{Z}_i\underline{I}_i + \underline{U}_i = 0$$

Koristeći se jednačinama (47.a) data se mreža može rastaviti na tri monofazne mreže:

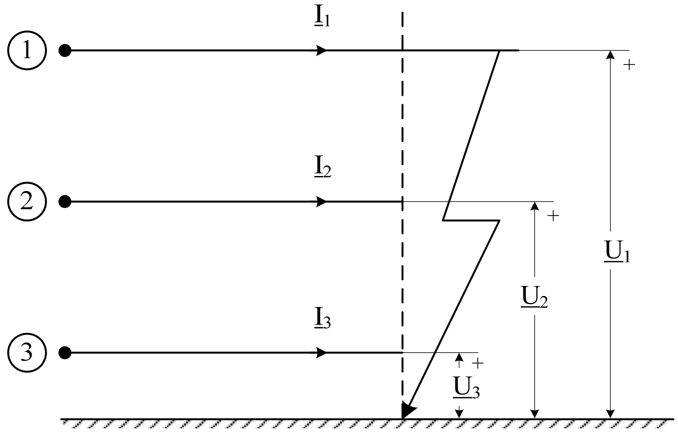


a) mreža nultog sistema
b) mreža direktnog sistema
c) mreža inverznog sistema

Očigledno je da $\underline{Z}_0,\underline{Z}_d,\underline{Z}_i$ predstavljaju ulazne impedanse mreža nultog, direktnog i inverznog sistema, računate na mjestu presjeka mreže. U slučaju kratkog spoja označenog presjeka mreže, naponi $\underline{U}_1,\underline{U}_2,\underline{U}_3$ i struje $\underline{I}_1,\underline{I}_2,\underline{I}_3$ predstavljaju napone i struje kratkog spoja. Da bi odredili ove napone i struje potrebno je predhodno odrediti tri simetrične komponente napona $\left(\underline{U}_i,\underline{U}_d,\underline{U}_i\right)$ i struja $\left(\underline{I}_0,\underline{I}_d,\underline{I}_i\right)$. Dakle imamo 6 nepoznatih veličina.

Opšte jednačine kratkog spoja daju tri nezavisne jednačine, pa nam trebaju još tri nezavisne jednačine da bi sve nepoznate bile jednoznačno određene. Te dodatne jednačine nazivaju se posebne jednačine kratkog spoja koje karakterišu samo konkretan kratak spoj (za različite vrste kratkih spojeva ove su jednačine različite). Posebne jednačine kratkog spoja pisaćemo za sve primjere uz pretpostavku da je mreža na mjestu presjeka neopterećena.

PRIMJER 1. - Jednopolni (dozemni) kratak spoj za fazu 1



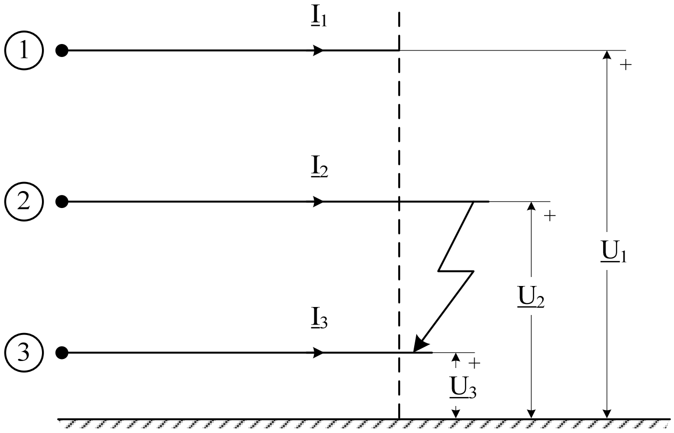
Posebne jednačne su: $\underline{U}_1 = 0$, $\underline{U}_0 + \underline{U}_d + \underline{U}_i = 0$. Pošto je mreža neopterećena slijedi:

$\underline{I}_2 = 0 \Rightarrow \underline{I}_0 + \underline{a}\underline{I}_d + \underline{a}^2\underline{I}_i = 0$

$\underline{I}_3 = 0 \Rightarrow \underline{I}_0 + \underline{a}^2 \underline{I}_d + \underline{a}\underline{I}_i = 0$

Prethodne tri jednačine su posebne jednačine datog kratkog spoja, koje uz opšte jednačine kratkog spoja u potpunosti određuju $\left(\underline{U}_i, \underline{U}_d, \underline{U}_i\right)$ i $\left(\underline{I}_0, \underline{I}_d, \underline{I}_i\right)$, pa samim tim i $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$ i $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$.

PRIMJER 2. - Međuspoj dvije faze



Posebne jednačine su:

$\underline{U}_2 = \underline{U}_3 \Rightarrow \underline{U}_0 + \underline{a}^2\underline{U}_d + \underline{a}\underline{U}_i = \underline{U}_0 + \underline{a}\underline{U}_d + \underline{a}^2\underline{U}_i$

$\underline{I}_1 = 0 \Rightarrow \underline{I}_0 + \underline{I}_d + \underline{I}_i = 0$

$\underline{I}_2 = -\underline{I}_3 \Rightarrow \underline{I}_0 + \underline{a}^2 \underline{I}_d + \underline{a}\underline{I}_i = -\left(\underline{I}_0 + \underline{a}\underline{I}_d + \underline{a}^2 \underline{I}_i\right)$.

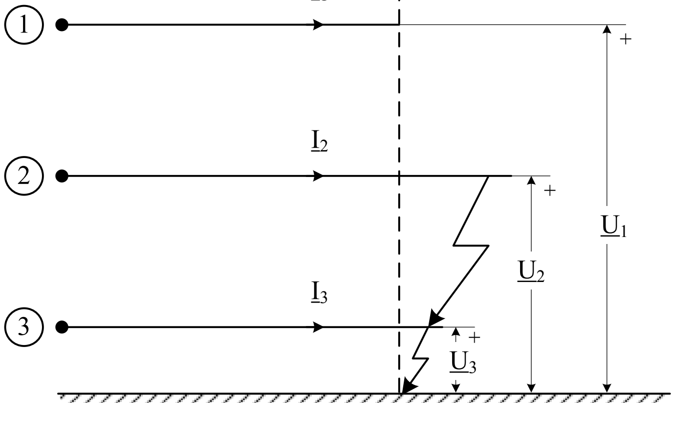
Sređivanjem dobijamo:

$\underline{U}_d = \underline{U}_i$

$\underline{I}_0 + \underline{I}_d + \underline{I}_i = 0$

$2\underline{I}_0 - \underline{I}_d - \underline{I}_i = 0$

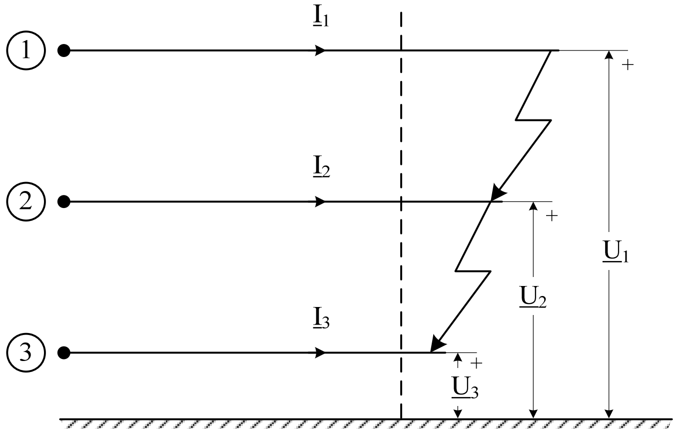
PRIMJER 3.



Posebne jednačine su:

$$\underline{I}_1 = 0 \Rightarrow \underline{I}_0 + \underline{I}_d + \underline{I}_i = 0$$
$$\underline{U}_2 = 0 \Rightarrow \underline{U}_0 + \underline{a}^2\underline{U}_d + \underline{a}\underline{U}_i = 0$$
$$\underline{U}_3 = 0 \Rightarrow \underline{U}_0 + \underline{a}\underline{U}_d + \underline{a}^2\underline{U}_i = 0$$

PRIMJER 4. - Tropolni kratki spoj



Posebne jednačine su:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \Rightarrow \underline{U}_0 + \underline{U}_d + \underline{U}_i = \underline{U}_0 + \underline{a}^2\underline{U}_d + \underline{a}\underline{U}_i$$
$$\underline{U}_1 = \underline{U}_3 \Rightarrow \underline{U}_0 + \underline{U}_d + \underline{U}_i = \underline{U}_0 + \underline{a}\underline{U}_d + \underline{a}^2\underline{U}_i$$
$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \Rightarrow \underline{I}_0 + \underline{I}_d + \underline{I}_i + \underline{I}_0 + \underline{a}^2\underline{I}_d + \underline{a}\underline{I}_i + \underline{I}_0 + \underline{a}\underline{I}_d + \underline{a}^2\underline{I}_i = 0\,.$$

Sređivanjem se dobija:

$$\left(1-\underline{a}^2\right)\underline{U}_d = \left(\underline{a}-1\right)\underline{U}_i \tag{1p}$$
$$\left(\underline{a}-1\right)\underline{U}_d = \left(1-\underline{a}^2\right)\underline{U}_i \tag{2p}$$
$$3\underline{I}_0 + \left(1+\underline{a}+\underline{a}^2\right)\underline{I}_d + \left(1+\underline{a}+\underline{a}^2\right)\underline{I}_i = 0 \Rightarrow \underline{I}_0 = 0 \tag{3p}$$

Dalje jednačina (1p) se može pojednostaviti:

$$\underline{U}_i = \frac{\left(1-\underline{a}^2\right)}{\left(\underline{a}-1\right)}\underline{U}_d = \frac{\left(1-\underline{a}\right)\left(1+\underline{a}\right)}{\left(\underline{a}-1\right)}\underline{U}_d = -\left(1-\underline{a}\right)\underline{U}_d = \underline{a}^2\underline{U}_d \tag{1p'}$$

Jednačina (2p) se svodi na:

$$\underline{U}_i = \frac{\left(\underline{a}-1\right)}{\left(1-\underline{a}^2\right)}\underline{U}_d = \frac{\left(\underline{a}-1\right)}{\left(1-\underline{a}\right)\left(1+\underline{a}\right)}\underline{U}_d = -\frac{1}{\left(1-\underline{a}\right)}\underline{U}_d = \underline{a}^{-2}\underline{U}_d = \underline{a}\underline{U}_d \tag{2p'}$$

Sada kombinujući jednačine (1p') i (2p') dobija se:

$\underline{U}_i = \underline{U}_i \Rightarrow \underline{a}\underline{U}_d = \underline{a}^2\underline{U}_d$.

Ovaj uslov zadovoljen je samo ako je $\underline{U}_d = 0$. Uvrštavanjem uslova $\underline{U}_i = \underline{a}^2\underline{U}_d$ u drugu posebnu jednačinu dobijamo:

$$\underline{U}_0 + \underline{U}_d + \underline{U}_i = \underline{U}_0 + \underline{a}\underline{U}_d + \underline{a}^2\underline{U}_i$$
$$\underline{U}_d + \underline{a}^2\underline{U}_d = +\underline{a}\underline{U}_d + \underline{a}^4\underline{U}_d$$
$$\left(1 + \underline{a}^2\right)\underline{U}_d = 2\underline{a}\underline{U}_d$$

a ova je jednakost ispunjena jedino ako je $\underline{U}_d = 0$. Iz jednačine $\underline{U}_2 = \underline{U}_3$ dobija se:

$$\underline{U}_0 + \underline{a}^2\underline{U}_d + \underline{a}\underline{U}_i = \underline{U}_0 + \underline{a}\underline{U}_d + \underline{a}^2\underline{U}_i$$
$$\left(\underline{a}^2 - \underline{a}\right)\underline{U}_d = \underline{U}_i\left(\underline{a}^2 - \underline{a}\right) \Rightarrow \underline{U}_d = \underline{U}_i$$

Kako je utvrđeno da je $\underline{U}_d = 0$, slijedi da je i $\underline{U}_i = 0$. Dakle, za sada je dobijeno:

$$\underline{U}_d = \underline{U}_i = 0 \qquad (1.1p)$$
$$\underline{I}_0 = 0 \qquad (2.1p)$$

Iskoristimo jednačine kratkog spoja:

$$\underline{Z}_0\underline{I}_0 + \underline{U}_0 = 0$$
$$\underline{Z}_d\underline{I}_d + \underline{U}_d = \underline{E}_1$$
$$\underline{Z}_i\underline{I}_i + \underline{U}_i = 0$$

Korišćenjem jednačina(1.1p) i (2.1p) dobijamo:

$$\underline{U}_0 = 0$$
$$\underline{Z}_d\underline{I}_d = \underline{E}_1$$
$$\underline{I}_i = 0$$

Dakle, konačno se dobija:

$$\underline{U}_0 = \underline{U}_d = \underline{U}_i = 0$$
$$\underline{I}_0 = \underline{I}_i = 0$$
$$\underline{I}_d = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_d}$$

Pošto imamo simetrične komponente možemo odrediti sistem napona i struja.

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_0 + \underline{U}_d + \underline{U}_i = 0$$
$$\underline{U}_2 = \underline{U}_0 + \underline{a}^2\underline{U}_d + \underline{a}\underline{U}_i = 0$$

$\underline{U}_3 = \underline{U}_0 + \underline{a}\underline{U}_d + \underline{a}^2\underline{U}_i = 0$

Tropolni kratki spoj ima isti uticaj na napone kao da su sve faze spojene sa zemljom, to jest spoj sa zemljom ne bi ništa promijenio.

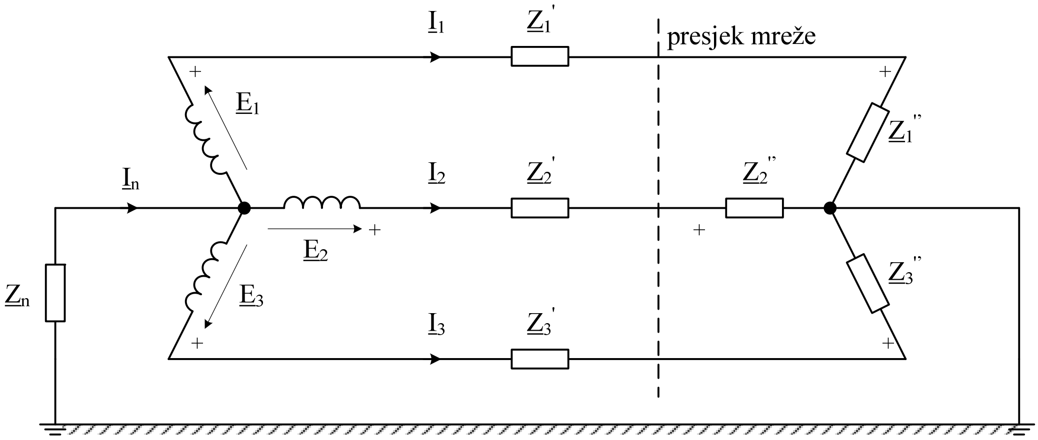
$$\underline{I}_1 = \underline{I}_0 + \underline{I}_d + \underline{I}_i = \frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_d}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_0 + \underline{a}^2\underline{I}_d + \underline{a}\underline{I}_i = \underline{a}^2\frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_d}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_0 + \underline{a}\underline{I}_d + \underline{a}^2\underline{I}_i = \underline{a}\frac{\underline{E}_1}{\underline{Z}_d}$$

Sistem faznih struja je simetričan. Dakle, tropolni kratki spoj predstavlja simetrično opterećenje jer su naponi jednaki nuli, a sistem faznih struja je simetričan.

Opšte jednačine prekida mreža



Oznake:
$\{\underline{E}_1, \underline{E}_2, \underline{E}_3\}$ - sistem elektromotornih sila generatora.
$\underline{Z}'_1, \underline{Z}'_2, \underline{Z}'_3$ - ukupne impedanse generatora i linija lijevo od presjeka mreže.
$\underline{Z}''_1, \underline{Z}''_2, \underline{Z}''_3$ - ukupne impedanse linija desno od presjeka mreže i impedansa prijemnika.
$\{\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3\}$ - sistem faznih struja.
$\underline{Z}_n$ - impedansa neutralnog provodnika.
$\underline{I}_n$ - struja nultog provodnika.

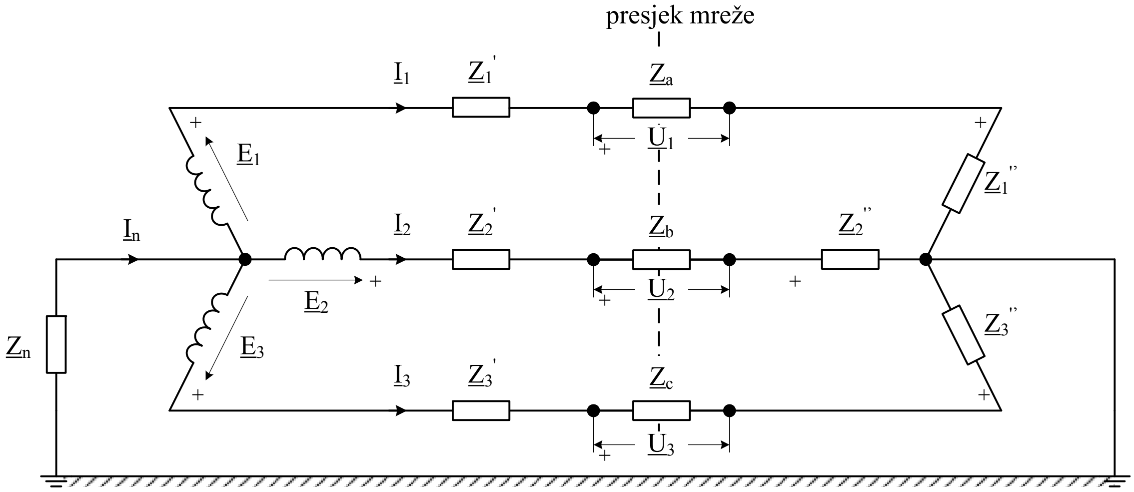
Obilježićemo:

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_1' + \underline{Z}_1''$$

$$\underline{Z}_2 = \underline{Z}_2' + \underline{Z}_2''$$

$$\underline{Z}_3 = \underline{Z}_3' + \underline{Z}_3''$$

Zamislimo da je na mjestu presjeka mreže linija prekinuta pa između svake tačke dobijenog prekida jedna iste faze vežemo impedanse $\underline{Z}_a, \underline{Z}_b, \underline{Z}_c$. Naponi na ovim impedansama su: $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$.



Postavljajući Kirhofove zakone za napone uvijek po konturi koja obuhvata jednu fazu i uvijek neutralni provodnik dobijamo sledeće jednačine:

$$\underline{E}_1 = \underline{Z}_n \underline{I}_n + \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{U}_1$$
$$\underline{E}_2 = \underline{Z}_n \underline{I}_n + \underline{Z}_2 \underline{I}_2 + \underline{U}_2$$
$$\underline{E}_3 = \underline{Z}_n \underline{I}_n + \underline{Z}_3 \underline{I}_3 + \underline{U}_3$$

Obilježimo sa:

$$\underline{V}_1 = \underline{Z}_n \underline{I}_n + \underline{Z}_1 \underline{I}_1$$
$$\underline{V}_2 = \underline{Z}_n \underline{I}_n + \underline{Z}_2 \underline{I}_2$$
$$\underline{V}_3 = \underline{Z}_n \underline{I}_n + \underline{Z}_3 \underline{I}_3$$

$\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$ - ukupni padovi napona duž neutralnog i jednog faznog provodnika izuzimajući padove napona $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$ na impedansama $\underline{Z}_a, \underline{Z}_b, \underline{Z}_c$. Sada je:

$$\underline{E}_1 = \underline{V}_1 + \underline{U}_1$$
$$\underline{E}_2 = \underline{V}_2 + \underline{U}_2$$
$$\underline{E}_3 = \underline{V}_3 + \underline{U}_3$$

Analognim transformacijama nad ovim sistemom kao i u slučaju kratkog spoja dobijamo:

$$\begin{aligned} \underline{E}_0 &= \underline{V}_d + \underline{U}_0 \\ \underline{E}_d &= \underline{V}_d + \underline{U}_d \qquad (48') \\ \underline{E}_i &= \underline{V}_i + \underline{U}_i \end{aligned}$$

gdje su:
$\underline{V}_0, \underline{V}_d, \underline{V}_i$ - simetrične komponente padova napona $\underline{V}_1, \underline{V}_2, \underline{V}_3$

$\underline{E}_0, \underline{E}_d, \underline{E}_i$ - simetrične komponente elektromotornih sila $\{\underline{E}_1, \underline{E}_2, \underline{E}_3\}$

$\underline{U}_0, \underline{U}_d, \underline{U}_i$ - simetrične komponente napona, na impedansama $\underline{Z}_a, \underline{Z}_b, \underline{Z}_c$, $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$.

Polazeći od Omovog zakona za simetrične komponente dobija se:

$$
\begin{aligned}
\underline{V}_0 &= \underline{Z}_0 \underline{I}_0 \\
\underline{V}_d &= \underline{Z}_d \underline{I}_d \\
\underline{V}_i &= \underline{Z}_i \underline{I}_i
\end{aligned}
$$

gdje su $\underline{Z}_0, \underline{Z}_d, \underline{Z}_i$ nulta, direktna i inverzna impedansa mreže. Uvrštavanjem u jednačinu (48) dobija se:

$$
\begin{aligned}
\underline{E}_0 &= \underline{Z}_0 \underline{I}_0 + \underline{U}_0 \\
\underline{E}_d &= \underline{Z}_d \underline{I}_d + \underline{U}_d \\
\underline{E}_i &= \underline{Z}_i \underline{I}_i + \underline{U}_i
\end{aligned}
\qquad (48)
$$

Pošto pri izvođenju ovog sistema jednačina nijesu postavljane nikakve pretpostavke o impedansama $\underline{Z}_a, \underline{Z}_b, \underline{Z}_c$, to ovaj sistem jednačina važi i kada su jedna, dvije ili sve tri impedanse jednake +∞ pa se iz tog razloga ovaj sistem naziva opštim jednačinama prekida mreže, gdje su: $\underline{Z}_0, \underline{Z}_d, \underline{Z}_i$ - nulta, direktna i inverzna impedansa mreže izračunate na mjestu prekida mreže. Ako su elektromotorne sile generatora simetrične i obrazuju direktan sistem:

$$
\begin{aligned}
\underline{E}_1 &= \underline{E} \\
\underline{E}_2 &= \underline{a}^2 \underline{E}_1 \\
\underline{E}_3 &= \underline{a} \underline{E}_1 ,
\end{aligned}
$$

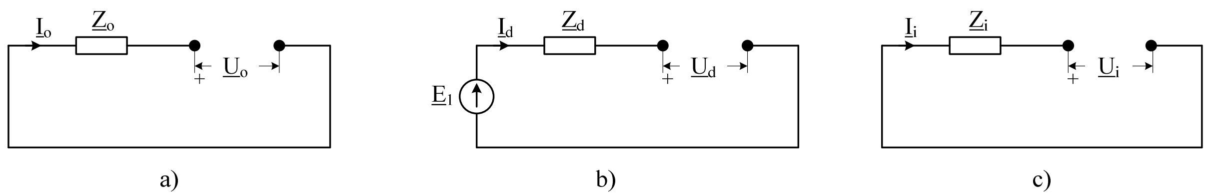
to je posledica

$$
\begin{aligned}
\underline{E}_0 &= 0 \\
\underline{E}_i &= 0 \\
\underline{E}_d &= \underline{E}_1
\end{aligned}
$$

pa sistem (48) sada ima oblik:

$$
\begin{aligned}
\underline{Z}_0 \underline{I}_0 + \underline{U}_0 &= 0 \\
\underline{Z}_d \underline{I}_d + \underline{U}_d &= \underline{E}_1 \\
\underline{Z}_i \underline{I}_i + \underline{U}_i &= 0
\end{aligned}
\qquad (48.a)
$$

Ovim jednačinama (48.a) pridružujemo tri monofazne mreže.

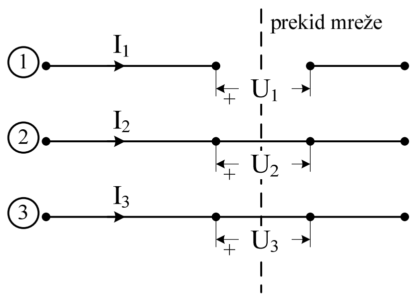


Očigledno je da su $\underline{Z}_0, \underline{Z}_d, \underline{Z}_i$ ulazne impedanse mreža nultog, direktnog i inverznog sistema, računate na mjestu prekida mreže. U slučaju prekida mreže označenog presjeka mreže naponi $\underline{U}_1, \underline{U}_2, \underline{U}_3$ i struje $\underline{I}_1, \underline{I}_2, \underline{I}_3$ predstavljaju napone i struje prekida mreže.

Da bi odredili ove napone i struje potrebno je prethodno odrediti tri simetrične komponente napona $\{\underline{U}_0, \underline{U}_d, \underline{U}_i\}$ i tri simetrične komponente struja $\{\underline{I}_0, \underline{I}_d, \underline{I}_i\}$, što ukupno predstavlja 6 nepoznatih.

Opšte jednačine prekida mreže daju tri nezavisne jednačine pa nam trebaju još tri. Ove dodatne tri jednačine se nazivaju posebnim jednačinama prekida mreže koje karakterišu svaki konkretan prekid mreže, to jest za različite vrste prekida mreže i ove posebne jednačine su različite.

PRIMJER 1. - Uprekidu je faza 1



Pretpostavimo da je mreža neopterećena na mjestu prekida. (prije prekida na jednoj fazi nema spoja sa nekom drugom fazom preko nekog opterećenja). Posebne jednačine na mjestu prekida mreže su:

$$\underline{I}_1 = 0$$
$$\underline{U}_2 = 0$$
$$\underline{U}_2 = 0$$

Preko simetričnih komponenti:

$$\underline{I}_0 + \underline{I}_d + \underline{I}_i = 0 \qquad \text{(a)}$$
$$\underline{U}_0 + \underline{a}^2\underline{U}_d + \underline{a}\underline{U}_i = 0 \qquad \text{(b)}$$
$$\underline{U}_0 + \underline{a}\underline{U}_d + \underline{a}^2\underline{U}_i = 0 \qquad \text{(c)}$$

Ako od jednačine (b) oduzmemo jednačinu (c), dobija se:

$$\left(\underline{a}^2 - \underline{a}\right)\underline{U}_d - \left(\underline{a}^2 - \underline{a}\right)\underline{U}_i = 0$$
$$\underline{U}_d = \underline{U}_i$$

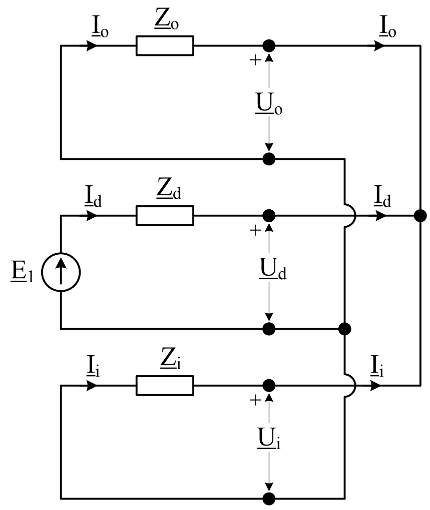
Sada, ako ovu jednakost uvrstimo u jednačinu (b), dobija se:

$$\underline{U}_0 + \underline{a}^2\underline{U}_d + \underline{a}\underline{U}_i = 0$$
$$\underline{U}_0 + \left(\underline{a}^2 + \underline{a}\right)\underline{U}_d = 0$$
$$\underline{U}_0 = \underline{U}_d$$

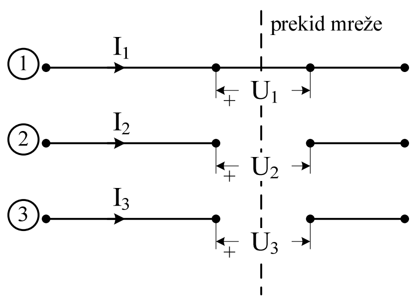
pa slijedi:

$$\underline{I}_0 + \underline{I}_d + \underline{I}_i = 0$$
$$\underline{U}_0 = \underline{U}_d = \underline{U}_i$$

Ove jednačine nam kazuju da se mreže nultog, direktnog i inverznog sistema vezane paralelno u tačkama prekida (jer su naponi isti).



PRIMJER 2. - U prekidu su faze 2 i 3



Posebne jednačine su:

$$\underline{U}_1 = 0$$

$\underline{I}_2 = 0$

$\underline{I}_3 = 0$

Preko simetričnih komponenti ove jednačine su:

$$\underline{U}_0 + \underline{U}_d + \underline{U}_i = 0 \qquad \text{(a)}$$
$$\underline{I}_0 + \underline{a}^2 \underline{I}_d + \underline{a}\underline{I}_i = 0 \qquad \text{(b)}$$
$$\underline{I}_0 + \underline{a}\underline{I}_d + \underline{a}^2 \underline{I}_i = 0 \qquad \text{(c)}$$

Od jednačine (b) oduzmimo jednačinu (c), dobija se:

$$\left(\underline{a}^2 - \underline{a}\right)\underline{I}_d - \left(\underline{a}^2 - \underline{a}\right)\underline{I}_i = 0$$
$$\underline{I}_d = \underline{I}_i$$

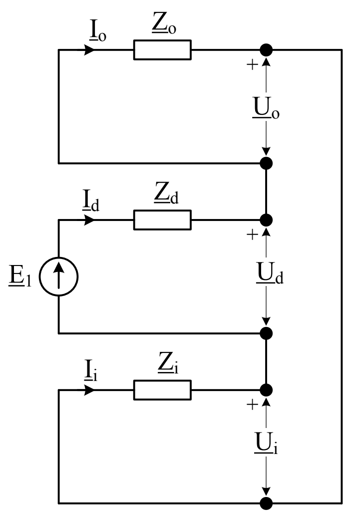
Uvrstimo ovu jednačinu u jednačinu (b), dobija se:

$$\underline{I}_0 + \underline{a}^2 \underline{I}_d + \underline{a}\underline{I}_i = 0$$
$$\underline{I}_0 + \left(\underline{a} + \underline{a}^2\right)\underline{I}_d = 0$$
$$\underline{I}_0 = \underline{I}_d \,.$$

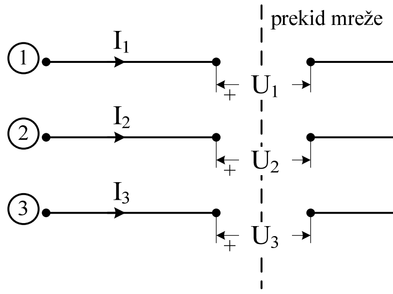
Dakle, jednačine su:

$$\underline{U}_0 + \underline{U}_d + \underline{U}_i = 0$$
$$\underline{I}_0 = \underline{I}_d = \underline{I}_i \,.$$

Ove jednačine ukazuju na to da su mreže nultog, direktnog i inverznog sistema vezane redno (struje su iste).



PRIMJER 3. - U prekidu su sve tri faze



Posebne jednačine su:

$\underline{I}_1 = 0$ (a)

$\underline{I}_2 = 0$ (b)

$\underline{I}_3 = 0$ (c)

Iz ovih jednačina dobijamo:

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_d = \underline{I}_i = 0\,.$$

Da bi odredili napone primjenjujemo opšte jednačine prekida mreže.

$$\underline{Z}_0\underline{I}_0 + \underline{U}_0 = 0$$
$$\underline{Z}_d\underline{I}_d + \underline{U}_d = \underline{E}_1$$
$$\underline{Z}_i\underline{I}_i + \underline{U}_i = 0$$

Uvrštavanjem jednačina (a), (b) i (c) u ove jednakosti, dobija se:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_d = \underline{E}_1$$
$$\underline{U}_2 = \underline{a}^2\underline{E}_1$$
$$\underline{U}_3 = \underline{a}\underline{E}_1$$

Na mjestu prekida naponi su simetrični, direktnog redosleda faza, što je i logično jer si i elektromotorne sile generatora simetrične.